И. М. Кричевер, Л. А. Тахтаджян, Алгебраическая теорема де Рама и функция Бейкера–Ахиезера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2024, том 88, выпуск 3, 101–110

DOI: 10.4213/im9533

УДК 512.732+512.772

$\boxed{\text{И. М. Кричевер}}$, Л. А. Тахтаджян

Алгебраическая теорема де Рама и функция Бейкера–Ахиезера

Для случая алгебраических кривых (компактных римановых поверхностей) показано, что группа когомологий де Рама $H^1_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C})$ римановой поверхности X рода g имеет естественную структуру симплектического векторного пространства. Выбор неспециального эффективного дивизора D степени g на X задает симплектический базис $H^1_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C})$, состоящий из голоморфных дифференциалов и дифференциалов второго рода с полюсами в D. Этот результат, алгебраическая теорема де Рама, позволяет описать касательное пространство к многообразиям Пикара и Якоби римановой поверхности X в терминах дифференциалов второго рода и определить естественные векторные поля на многообразии Якоби, отвечающие движению точек дивизора D. В терминах формализма Лакса на алгебраических кривых эти векторные поля соответствуют уравнениям Дубровина в теории интегрируемых систем, а функция Бейкера–Ахиезера естественным образом получается интегрированием вдоль интегральных кривых.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: римановы поверхности, дивизоры, линейные расслоения, теорема Римана–Роха, дифференциалы второго рода, алгебраическая теорема де Рама, многообразия Пикара и Якоби, векторные поля на многообразии Якоби, представление Лакса, уравнения Дубровина, функция Бейкера–Ахиезера.

DOI: https://doi.org/10.4213/im9533

§ 1. Введение

Пусть X – это гладкое алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{C}$, снабженное классической топологией комплексного многообразия. Согласно Атье и Ходжу [1] замкнутая мероморфная p-форма φ на X называется *дифференциалом второго рода*, если она имеет нулевые вычеты на открытых подмножествах $U = X \setminus D$ для достаточно больших дивизоров D. Далеко идущее обобщение результатов Атьи и Ходжа было дано Гротендиком [2]. Факторгруппы

$$\frac{\{p\text{-формы второго рода}\}}{\{\text{точные формы}\}}$$

имеют естественную интерпретацию в терминах спектральной последовательности комплекса пучков мероморфных форм на X [3, гл. 3, § 5]. В частности, справедливо утверждение

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C}) \simeq \frac{\{1\text{-формы второго рода}\}}{\{\text{точные формы}\}}.$$

Когда X – это гладкая алгебраическая кривая рода g, этот изоморфизм следует из теоремы Римана–Роха. Оказывается, в этом случае на пространстве дифференциалов второго рода имеется естественная кососимметрическая билинейная форма, невырожденная на факторпространстве по подпространству точных форм. Используя эту билинейную форму, в теореме 1 мы приводим более явную формулировку алгебраической теоремы де Рама. А именно, мы показываем, что каждый неспециальный эффективный дивизор D степени g на римановой поверхности X задает симплектический базис векторного пространства $H^1_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C})$, позволяющий явно описать дополнение к лагранжевому подпространству 1-форм на X как пространство дифференциалов второго рода с полюсами в D.

В § 4 показано, что каждый неспециальный эффективный дивизор D степени g на X задает явный изоморфизм векторного пространства $H^{0,1}(X,\mathbb{C})$ и лагранжевого подпространства дифференциалов второго рода с полюсами в D. Это позволяет явно описать касательное пространство к многообразию Пикара (и его "инкарнаций", многообразий Альбанезе и Якоби) в алгебро-геометрических терминах.

Замечательным образом этот формализм связан с теорией интегрируемых систем. В стандартном подходе (см., например, [4]), интегрируемая система задается посредством уравнения нулевой кривизны

$$\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{\partial M}{\partial x}+LM-ML=0,$$

где $L(x,t,\lambda)$ и $M(x,t,\lambda)$ – это $r\times r$ матричнозначные рациональные функции спектрального параметра λ на $\mathbb{CP}^1$, также зависящие от дополнительных переменных x и t (переменных, описывающих пространство и время). В работах [5], [6] первого автора формализм уравнения нулевой кривизны был сформулирован для случая, когда спектральный параметр меняется на алгебраической кривой.

А именно, в [5] было показано, что такое обобщение естественным образом описывается формализмом систем Хитчина, записанных в терминах параметров Тюрина стабильных векторных расслоений ранга r и степени rg на алгебраической кривой. Соответственно, рациональные функции L на $\mathbb{CP}^1$ становятся $r\times r$ мероморфными 1-формами $L(z)\,dz$ на алгебраической кривой; многообразие таких матриц параметризуется пространством модулей (точнее, его открытым подмножеством в топологии Зариского) стабильных векторных расслоений ранга r и степени rg (подробнее см. [5]). Аналогичным образом описываются мероморфные $r\times r$ матричнозначные функции $M(z)$.

Оказывается, что в простейшем случае $r=1$ этот формализм остается нетривиальным и тесно связан с теоремой 1 и обсуждением в § 3. А именно, как показано в § 5, мероморфные 1-формы $L(z)\,dz$ переходят в дифференциалы первого рода на алгебраической кривой X, а аналоги $M(z)$ – это мероморфные функции f, определенные заданием двух неспециальных эффективных дивизоров D и D_0 степени g на римановой поверхности X. Переменные дивизоры D параметризуют многообразие Якоби кривой X с отмеченной точкой D_0, а векторные поля, описывающие движение точек дивизора D, естественным образом выражаются в терминах мероморфных функций f.

Замечательным образом в случае, когда X – это гиперэллиптическая кривая, уравнения для интегральных кривых этих векторных полей, уравнения (5.3), совпадают с *уравнениями Дубровина*, возникающими в теории конечнозонного интегрирования уравнения Кортевега–де Фриза [7]! Более того, интегрируя мероморфные функции f по интегральным кривым и используя уравнения Дубровина, мы естественным образом получаем *функцию Бейкера–Ахиезера* – фундаментальный объект алгебро-геометрического подхода к интегрируемым системам, введенный первым автором в работе [8].

Второй автор признателен рецензенту за конструктивные замечания и предложения.

§ 2. Дифференциалы второго рода

Пусть X – компактная связная риманова поверхность рода g, рассматриваемая в классической топологии. Обозначим через $\mathcal{O}_X$ пучок ростков голоморфных функций на X, через $\mathcal{M}_X$ – пучок ростков мероморфных функций на X, а через $\mathcal{M}$ – векторное пространство мероморфных функций на X. Для любого дивизора D на X обозначим через $L = \mathcal{O}(D)$ голоморфное линейное расслоение, ассоциированное с D, а через $H^0(X, L)$ – векторное пространство голоморфных сечений расслоения L над X. Очень полезным является изоморфизм

$$H^0(X, L) \simeq \mathcal{L}_D = \{f \in \mathcal{M} \colon (f) + D \geqslant 0\}.$$

Теорема Римана–Роха вместе с двойственностью Кодаиры–Серра приводит к формуле

$$h^0(L) - h^0(K_X - L) = \deg L + 1 - g,$$

где $h^0(L) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, L)$, $\deg L$ – это степень линейного расслоения L, а K_X – каноническое линейное расслоение над X, голоморфное кокасательное расслоение.

Пусть d – внешний дифференциал на X. Пучок $\mathrm{d}\mathcal{M}_X$ – это пучок ростков дифференциалов второго рода на X, а $\Omega^{(2\mathrm{nd})} = H^0(X, \mathrm{d}\mathcal{M}_X)$ – бесконечномерное векторное пространство дифференциалов второго рода, мероморфных 1-форм на X, не имеющих ненулевых вычетов.

На бесконечномерном векторном пространстве $\Omega^{(2\mathrm{nd})}$ имеется естественная кососимметрическая билинейная форма[1]

$$\omega_X(\theta_1, \theta_2) = \sum_{P \in X} \operatorname*{Res}_P(\mathrm{d}^{-1}\theta_1 \theta_2), \qquad \theta_1, \theta_2 \in \Omega^{(2\mathrm{nd})},$$

где $\mathrm{d}^{-1}\theta_1$ означает локально определенную функцию f такую, что $\mathrm{d}f = \theta_1$, и называемую локальной первообразной. Произвол в выборе f является несущественным.

[1] В отдельной статье второго автора будут рассмотрены аналоги кососимметрической билинейной формы ω_X и алгебраической теоремы де Рама для мероморфных квадратичных дифференциалов.

Действительно, ясно, что билинейная форма ω_X задается конечной суммой и не зависит от выбора произвольных констант в определении локальной первообразной. Кососимметричность формы ω_X следует из основного свойства

$$\operatorname*{Res}_P(f_1\,\mathrm{d}f_2) = -\operatorname*{Res}_P(f_2\,\mathrm{d}f_1),$$

где мероморфные функции f_1 и f_2 – это локальные первообразные для θ_1 и θ_2 в некоторой окрестности $P\in X$.

§ 3. Алгебраическая теорема де Рама

В абстрактной форме алгебраическая теорема де Рама представляет собой следующее утверждение:

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C}) \simeq \Omega^{(\mathrm{2nd})}/\mathrm{d}\mathcal{M}, \tag{3.1}$$

легко доказываемое при помощи изоморфизма де Рама из теории пучков

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C}) \simeq H^1(X,\underline{\mathbb{C}}),$$

где $\underline{\mathbb{C}}$ – это локально постоянный пучок.

В самом деле, рассмотрим короткую точную последовательность пучков

$$0\to\underline{\mathbb{C}}\xrightarrow{i}\mathcal{M}_X\xrightarrow{\mathrm{d}}\mathrm{d}\mathcal{M}_X\to 0$$

и ассоциированную с ней точную когомологическую последовательность

$$H^0(X,\mathcal{M}_X)\xrightarrow{\mathrm{d}}H^0(X,\mathrm{d}\mathcal{M}_X)\xrightarrow{\delta}H^1(X,\underline{\mathbb{C}})\to H^1(X,\mathcal{M}_X).$$

Как вытекает из теоремы Римана–Роха,

$$H^1(X,\mathcal{O}(D))=\{0\},$$

если $\deg D > 2g-2$, откуда следует (см., например, [9, гл. 2, § 17.7])

$$H^1(X,\mathcal{M}_X)=\{0\},$$

что и доказывает (3.1).

Используя билинейную форму ω_X, мы можем конкретизировать изоморфизм (3.1). А именно, имеет место следующий результат (см. [10, гл. 6, § 8], [11, гл. III, § 5.3, § 5.4] и [12, теорема 4]).

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *ограничение билинейной формы ω_X на $\Omega^{(\mathrm{2nd})}/\mathrm{d}\mathcal{M}$ невырожденно и*

$$\dim_{\mathbb{C}}\Omega^{(\mathrm{2nd})}/\mathrm{d}\mathcal{M}=2g;$$

(ii) *каждому эффективному неспециальному дивизору D на X степени g отвечает изоморфизм*

$$\Omega^{(\mathrm{2nd})}/\mathrm{d}\mathcal{M}\simeq\Omega^{(\mathrm{2nd})}\cap H^0(X,K_X+2D);$$

(iii) *пусть* $D = P_1 + \dots + P_g$ *– неспециальный эффективный дивизор степени* g *с различными точками; каждому выбору локальных координат в окрестностях точек* P_i *отвечает симплектический базис* $\{\vartheta_i, \tau_i\}_{i=1}^g$ *векторного пространства* $\Omega^{(2\mathrm{nd})} \cap H^0(X, K_X + 2D)$ *по отношению к симплектической форме* ω_X,

$$\omega_X(\vartheta_i, \vartheta_j) = \omega_X(\tau_i, \tau_j) = 0, \quad \omega_X(\vartheta_i, \tau_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, g,$$

этот базис состоит из дифференциалов первого рода ϑ_i *и дифференциалов второго рода* τ_i, *однозначно определяемых условиями*

$$\vartheta_i = \bigl(\delta_{ij} + O(z - z_j)\bigr)\,\mathrm{d}z \quad \textit{и} \quad \tau_i = \left(\frac{\delta_{ij}}{(z - z_j)^2} + O(z - z_j)\right)\mathrm{d}z,$$

где $z_j = z(P_j)$ *для локальной координаты* z *в* P_j *и* $i, j = 1, \dots, g$.

Доказательство. Пусть $(\theta)_\infty = \sum_{i=1}^l n_i Q_i$ – дивизор полюсов дифференциала второго рода $\theta \in \Omega^{(2\mathrm{nd})}$, $n_i \geqslant 2$. Поскольку дивизор D неспециальный, то $h^0(K_X - D) = 0$, и по формуле Римана–Роха $h^0(D + nQ_i) = n + 1$ для $n \geqslant 0$. Таким образом, если точка Q_i не принадлежит дивизору D, то найдется мероморфная функция $f_i \in \mathcal{L}_{D+(n_i-1)Q_i}$ такая, что

$$\operatorname*{ord}_{Q_i}(\theta - df_i) \geqslant 0.$$

Если точка Q_i принадлежит дивизору D, то найдется функция $f_i \in \mathcal{L}_{D+(n_i-1)Q_i}$ такая, что

$$\operatorname*{ord}_{Q_i}(\theta - df_i) \geqslant -2.$$

(Поскольку $h^0(D) = 1$, то в этом случае выбором главной части df_i в Q_i нельзя сократить возможный полюс второго порядка дифференциала θ.) Таким образом, для $f = \sum_{i=1}^l f_i$ получаем

$$(\theta - \mathrm{d}f) \geqslant -2D,$$

что и доказывает утверждение (ii).

Формула для размерности в утверждении (i) легко вытекает из доказанного утверждения:

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} \Omega^{(2\mathrm{nd})} \cap H^0(X, K_X + 2D) &= h^0(X, K_X + 2D) - h^0(X, K_X + D) + h^0(X, K_X)\\ &= (3g - 1) - (2g - 1) + g = 2g.\end{aligned}$$

Для доказательства (iii) и оставшегося утверждения в (i) рассмотрим линейное отображение

$$L\colon \Omega^{(2\mathrm{nd})} \cap H^0(X, K_X + 2D) \to \mathbb{C}^{2g},$$

задаваемое следующим образом. Для каждого $\theta \in \Omega^{(2\mathrm{nd})} \cap H^0(X, K_X + 2D)$ определим $\alpha_i(\theta), \beta_i(\theta) \in \mathbb{C}$ из разложения

$$\frac{\theta}{\mathrm{d}z} - \alpha_i(\theta) - \frac{\beta_i(\theta)}{(z - z_i)^2} = O(z - z_i)$$

в окрестности P_i и положим

$$L(\theta) = \bigl(\alpha_1(\theta), \beta_1(\theta), \dots, \alpha_g(\theta), \beta_g(\theta)\bigr).$$

Поскольку дивизор D неспециальный, то отображение L иньективно и, следовательно, является изоморфизмом, ϑ_i и τ_i определяются следующим выбором ненулевых компонент L: $\alpha_i = 1$ и $\beta_i = 1$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Выбор неспециального эффективного дивизора D на X с g различными точками P_i и локальными координатами – это алгебраический аналог выбора a-циклов на римановой поверхности. Соответственно, дифференциалы τ_i – это аналоги дифференциалов второго рода с полюсами второго порядка, нулевыми a-периодами и нормализованными b-периодами. Симплектичность базиса $\{\vartheta_i, \tau_i\}_{i=1}^{g}$ – это аналог закона взаимности для дифференциалов первого рода и дифференциалов второго рода (см. [13, гл. 5, § 1] и [14, гл. VI, § 3]).

Замечание 2. Пусть $\Omega^{(2\mathrm{nd})}(2D)$ – это подпространство $\Omega^{(2\mathrm{nd})}$, натянутое на τ_i,

$$\Omega^{(2\mathrm{nd})}(2D) = \mathbb{C}\tau_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\tau_g.$$

Тогда $\Omega^{(2\mathrm{nd})}(2D)$ и $H^0(X, K_X)$ – это лагранжевы подпространства в $\Omega^{(2\mathrm{nd})}/\mathrm{d}\mathcal{M}$, двойственные по отношению к спариванию, задаваемому симплектической формой ω_X.

§ 4. Касательное пространство к многообразию Пикара

Имеет место разложение

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C}) = H^{1,0}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{0,1}(X, \mathbb{C}) \tag{4.1}$$

с естественным спариванием

$$H^{1,0}(X, \mathbb{C}) \otimes H^{0,1}(X, \mathbb{C}) \ni \alpha \otimes \beta \mapsto (\alpha, \beta) = \int_X \alpha \wedge \beta \in \mathbb{C}.$$

Отображение периодов

$$H^{1,0}(X, \mathbb{C}) \ni \vartheta \mapsto \int_c \vartheta \in \mathbb{C}, \quad \text{где} \ \ c \in H_1(X, \mathbb{Z}),$$

задает каноническое вложение решетки $H_1(X, \mathbb{Z})$ в векторное пространство $H^{1,0}(X, \mathbb{C})^\vee$, двойственное к векторному пространству $H^{1,0}(X, \mathbb{C})$, и определяет многообразие Альбанезе

$$\mathrm{Alb}(X) = H^{1,0}(X, \mathbb{C})^\vee / H_1(X, \mathbb{Z}).$$

Используя изоморфизм Дольбо и экспоненциальную последовательность пучков на X, для многообразия Пикара голоморфных линейных расслоений степени 0 на X получаем

$$\mathrm{Pic}^0(X) = H^{0,1}(X, \mathbb{C}) / H^1(X, \mathbb{Z}).$$

Таким образом, голоморфное касательное пространство к $\mathrm{Pic}^0(X)$ отождествляется с векторным пространством $H^{0,1}(X,\mathbb{C})$.

Однако теорема 1 позволяет описать касательное пространство к многообразию Пикара исключительно в алгебро-геометрических терминах. А именно, справедлив следующий простой результат.

Предложение 1. *Каждый неспециальный эффективный дивизор D степени g на римановой поверхности X определяет изоморфизм*

$$H^{0,1}(X,\mathbb{C}) \simeq \Omega^{(\mathrm{2nd})}(2D).$$

Доказательство. Как следует из пункта (iii) теоремы 1, отображение

$$H^{0,1}(X,\mathbb{C}) \ni \beta \mapsto \psi(\beta) = \sum_{i=1}^{g} (\vartheta_i, \beta)\tau_i \in \Omega^{(\mathrm{2nd})}(2D)$$

обладает свойством

$$(\vartheta, \beta) = \omega_X(\vartheta, \psi(\beta))$$

для произвольного $\vartheta \in H^0(X, K_X)$ и является изоморфизмом. Предложение доказано.

Отождествляя векторные пространства $H^{1,0}(X,\mathbb{C})^\vee$ и $\Omega^{(\mathrm{2nd})}(2D)$, мы получаем вложение решетки $H_1(X,\mathbb{Z})$ в векторное пространство $\Omega^{(\mathrm{2nd})}(2D)$, определяемое следующим образом. Пусть θ_c – это $(0,1)$-компонента элемента из $H^1(X,\mathbb{Z})$, двойственного по Пуанкаре циклу $c \in H_1(X,\mathbb{Z})$, так что

$$\int_c \vartheta = \int_X \vartheta \wedge \theta_c = (\vartheta, \theta_c) \quad \text{для всех} \quad \vartheta \in H^{1,0}(X,\mathbb{C}).$$

Тогда

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \ni c \mapsto \tau_c = \psi(\theta_c) = \sum_{i=1}^{g} \int_c \vartheta_i \cdot \tau_i \in \Omega^{(\mathrm{2nd})}(2D), \tag{4.2}$$

так что

$$\mathrm{Alb}(X) = \Omega^{(\mathrm{2nd})}(2D)/H_1(X,\mathbb{Z}). \tag{4.3}$$

Таким образом, выбор неспециального эффективного дивизора D степени g на римановой поверхности X позволяет отождествить голоморфные касательные векторные пространства к многообразиям

$$\mathrm{Alb}(X) \simeq \mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Jac}(X)$$

с векторным пространством $\Omega^{(\mathrm{2nd})}(2D)$ дифференциалов второго рода с полюсами в точках дивизора D. Соответственно, голоморфное кокасательное пространство естественным образом отождествляется с векторным пространством $H^{1,0}(X,\mathbb{C})$ дифференциалов первого рода, а спаривание с $\Omega^{(\mathrm{2nd})}(2D)$ задается симплектической формой ω_X.

§ 5. Функция Бейкера–Ахиезера

Зафиксируем неспециальный эффективный дивизор $D_0 = Q_1 + \dots + Q_g$ степени g на римановой поверхности X и обозначим через $\{\vartheta_i\}_{i=1}^g$ базис векторного пространства $H^0(X, K_X)$ из теоремы 1, построенный по дивизору D_0. Рассмотрим отображение Абеля–Якоби

$$X^{(g)} \ni D \to \mu^{(g)}(D) \in \mathrm{Jac}(X),$$

где $\mu^{(g)}$ – это абелева сумма: для переменного дивизора $D = P_1 + \dots + P_g$,

$$\mu^{(g)}(D) = \biggl(\sum_{i=1}^{g} \int_{Q_i}^{P_i} \vartheta_1, \dots, \sum_{i=1}^{g} \int_{Q_i}^{P_i} \vartheta_g\biggr). \tag{5.1}$$

Выберем локальные координаты в точках P_i и положим $z_i = z(P_i)$. Как следует из формулы (5.1), 1-формы dz_i на $\mathrm{Jac}(X)$ в отмеченной точке $\mu^g(D_0)$ отвечают дифференциалам ϑ_i, а векторные поля $\partial/\partial z_i$ – дифференциалам второго рода τ_i из теоремы 1. Если дивизор D также неспециальный, то из группового закона на многообразии Якоби и теоремы 1 следует, что $\mathrm{d}z_i$ и $\partial/\partial z_i$ в точке $\mu^{(g)}(D) \in \mathrm{Jac}(X)$ задают симплектический базис векторного пространства $\Omega^{(2\mathrm{nd})} \cap H^0(X, K_X + 2D)$ из теоремы 1.

Эквивалентным образом эти векторные поля на $\mathrm{Jac}(X)$ можно описать с помощью формализма уравнений Лакса на алгебраических кривых, развитого первым автором в работах [5], [6]. Основными ингредиентами в [5], [6] являются стабильные векторные расслоения ранга r и степени rg и операторы Лакса, специальные мероморфные $r \times r$ матричнозначные 1-формы $L(z)\,dz$ на римановой поверхности X и мероморфные $r \times r$ матричнозначные функции $M(z)$.

Специализация к многообразию Якоби отвечает случаю $r = 1$ и существенно упрощает конструкцию в работах [5], [6]. А именно, мероморфные 1-формы $L(z)\,\mathrm{d}z$ – это дифференциалы первого рода $\vartheta \in H^0(X, K_X)$, а аналоги мероморфных функций $M(z)$ определяются следующим образом.

Рассмотрим векторное пространство

$$\mathcal{L}_{D+D_0} = \{f \in \mathcal{M} \colon (f) + D + D_0 \geqslant 0\}.$$

Как следует из теоремы Римана–Роха, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{D+D_0} = g+1$. Таким образом, для любого выбора главных частей функций из $\mathcal{L}_{D+D_0}$ в точках дивизора D_0, отличного от тождественно равного нулю, существует единственная, с точностью до несущественной аддитивной константы, функция $f \in \mathcal{L}_{D+D_0}$, удовлетворяющая условиям

$$f(z) = \frac{\alpha_i}{z - z_i} + O(1), \qquad z_i = z(P_i), \tag{5.2}$$

во всех точках дивизора $D = P_1 + \dots + P_g$. Функции f, параметризованные фиксированными главными частями в точках дивизора D_0, играют роль мероморфных функций $M(z)$ в случае $r = 1$; коэффициенты α_i зависят от выбора главных частей в точках дивизора D_0.

Имеет место однозначное разложение

$$\mathrm{d}f = \tau - \tau_0,$$

где $\tau \in \Omega^{(2\mathrm{nd})}(2D)$ (см. замечание 2) и $(\tau_0) + 2D_0 \geqslant 0$. По теореме о вычетах

$$-\sum_{i=1}^{g} \operatorname*{Res}_{P_i}(f\vartheta) = \omega_X(\vartheta, \tau) = \omega_X(\vartheta, \tau_0), \qquad \vartheta \in H^0(X, K_X),$$

так что спаривание (2.22) в работе [5], задаваемое симплектической формой Кричевера–Фонга, совпадает со спариванием, задаваемым симплектической формой ω_X.

Выбор симплектического базиса векторного пространства

$$\Omega^{(2\mathrm{nd})} \cap H^0(X, K_X + 2D)$$

устанавливает соответствие

$$f \mapsto \mathscr{L}_f = -\sum_{i=1}^{g} \alpha_i \frac{\partial}{\partial z_i}$$

между рациональными функциями $f \in \mathcal{L}_{D+D_0}$ и векторными полями на многообразии $\mathrm{Jac}(X)$. Вдоль интегральной кривой $D(t) = P_1(t) + \dots + P_g(t)$ с начальным условием $D(0) = D$ для векторного поля $\mathscr{L}_f$ имеем

$$\dot{z}_i(t) = -\alpha_i(t), \qquad i = 1, \dots, g, \tag{5.3}$$

где точка означает производную по переменной t. В случае, когда X – это гиперэллиптическая кривая, уравнения (5.3) – это классические *уравнения Дубровина* из теории конечнозонного интегрирования уравнения Кортевега–де Фриза [7], записанные в терминах преобразования Абеля. Используя уравнения Дубровина, получаем, что вдоль интегральной кривой уравнения (5.2) приобретают вид

$$f_t(z) = -\frac{\dot{z}_i(t)}{z - z_i(t)} + O(1), \qquad i = 1, \dots, g. \tag{5.4}$$

Таким образом, интегрируя и полагая

$$\Psi(z) = \exp\biggl\{\int_0^T f_t(z)\,dt\biggr\},$$

мы видим из (5.4), что Ψ – это мероморфная функция на $X \setminus D_0$, имеющая простые полюса только в точках дивизора D, простые нули только в точках дивизора $D(T)$ и имеющая существенные особенности в точках дивизора D_0.

Функция Ψ и есть знаменитая *функция Бейкера–Ахиезера*, введенная первым автором в работе [8]!

Мы предоставляем заинтересованному читателю описать явными формулами эту связь алгебраической теоремы де Рама с интегрируемыми системами.

Список литературы

1. W. V. D. Hodge, M. F. Atiyah, “Integrals of the second kind on an algebraic variety”, *Ann. of Math.* (2), **62** (1955), 56–91.
2. A. Grothendieck, “On the de Rham cohomology of algebraic varieties”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **29** (1966), 95–103.

3. Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, Мир, М., 1982, 864 с.; пер. с англ.: Ph. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Pure Appl. Math., Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, xii+813 pp.
4. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986, 528 с.; англ. пер.: L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Reprint of the 1987 original, Classics Math., Springer, Berlin, 2007, x+592 pp.
5. I. Krichever, "Vector bundles and Lax equations on algebraic curves", *Comm. Math. Phys.*, **229**:2 (2002), 229–269.
6. I. M. Krichever, "Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Whitham equations", *Mosc. Math. J.*, **2**:4 (2002), 717–752.
7. Б. А. Дубровин, "Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза в классе конечнозонных потенциалов", *Функц. анализ и его прил.*, **9**:3 (1975), 41–51; англ. пер.: B. A. Dubrovin, "Periodic problems for the Korteweg–de Vries equation in the class of finite band potentials", *Funct. Anal. Appl.*, **9**:3 (1975), 215–223.
8. И. М. Кричевер, "Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии", *Функц. анализ и его прил.*, **11**:1 (1977), 15–31; англ. пер.: I. M. Krichever, "Integration of nonlinear equations by the methods of algebraic geometry", *Funct. Anal. Appl.*, **11**:1 (1977), 12–26.
9. О. Форстер, *Римановы поверхности*, Мир, М., 1980, 248 с.; пер. с нем.: O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Heidelberger Taschenbucher, **184**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977, x+223 pp.
10. К. Шевалле, *Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной*, Физматгиз, М., 1959, 334 с.; пер. с англ.: C. Chevalley, *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*, Math. Surveys, **VI**, Amer. Math. Soc., New York, 1951, xi+188 pp.
11. M. Eichler, *Introduction to the theory of algebraic numbers and functions*, Transl. from the German, Pure Appl. Math., **23**, Academic Press, New York–London, 1966, xiv+324 pp.
12. Л. А. Тахтаджян, "Квантовые теории поля на алгебраических кривых. I. Аддитивные бозоны", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:2 (2013), 165–196; англ. пер.: L. A. Takhtajan, "Quantum field theories on algebraic curves. I. Additive bosons", *Izv. Math.*, **77**:2 (2013), 378–406.
13. K. Iwasawa, *Algebraic functions*, Transl. from the Japan., Transl. Math. Monogr., **118**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, xxii+287 pp.
14. И. Кра, *Автоморфные формы и клейновы группы*, Мир, М., 1975, 296 с.; пер. с англ.: I. Kra, *Automorphic forms and Kleinian groups*, Math. Lecture Note Ser., W. A. Benjamin, Inc., Reading, MA, 1972, xiv+464 pp.

Игорь Моисеевич Кричевер
(Igor M. Krichever)
Columbia University, New York, USA;
Сколковский институт науки и технологий,
территория Инновационного Центра "Сколково"

Поступило в редакцию
16.08.2023
17.10.2023

Леон Арменович Тахтаджян
(Leon A. Takhtajan)
Department of Mathematics,
Stony Brook University, NY, USA;
Международный математический институт
им. Л. Эйлера, г. Санкт-Петербург
E-mail: leontak@math.stonybrook.edu