

# Álgebra Linear

Notas da aula <sup>1</sup>  
MA327 2021-2 <sup>2</sup>

Joa Weber

<sup>1</sup>[www.math.stonybrook.edu/~joa/PUBLICATIONS/00-publications.html](http://www.math.stonybrook.edu/~joa/PUBLICATIONS/00-publications.html)

<sup>2</sup>revisado 2024-1



Extensão

*Totalitarismo* defronte de *Democracia*<sup>1</sup>

*A ferramenta chave do totalitarismo é medo; suportado de pânico e histeria.  
Meias palavras, difamações, e denúncias formam a estratégia.  
Não tem discussões livres, nem diferenças de opinião honestas.  
Argumentos não tem mais valor – o pensamento baixo já levou a melhor.  
O pensamento mesmo é o inimigo.*

*Democracia é o domínio da dignidade do humano  
e o direito, a pensar propriamente, o direito para uma opinião própria,  
ainda mais, o direito, afirmar explícito a opinião própria e  
proteger-se contra a intrusão na sua psique e contra constrangimento psíquico.  
Democracia solicita uma alta atividade intelectual dos seus membros.  
Democracia rege a sociedade por os seus erros sem intimidação.*

---

<sup>1</sup> Em parte tirado do sumário [Hir21] do livro [Mee56].



# Prefácio

Este texto oriunda de notas da aula para o curso MA327 Álgebra Linear dado múltiplas vezes, isto é, nos semestres 2013-2, 2014-1, 2015-1, 2016-2, 2019-2, 2020-2, e 2021-2. Quando cheguei em agosto 2013 fui assinado ensinar este curso e como meu Português foi (ainda mais) fraco, na realidade quase inexistente, eu busquei um livro em Português mesmo. Encontrei um texto excelente, o livro do Elon Lages Lima [Lim11], no qual eu baseei meu manuscrito em 2013-2. Nos semestres na seguida eu usei como base meu manuscrito de 2013, adicionando e melhorando uma ou outra coisa. Só em 2020-2 quando a aula foi mandado ser remota eu digitei meus manuscritos no computador resultando no texto presente o qual em grandes partes ainda é um condensado do Lima. Um outro texto excelente o qual eu recomendo particularmente para alunos de disciplinas de estudo não matemáticas é o Pulino [Pul12].

O que é diferente no texto presente é, na seção 5, a abordagem a matrizes de transformações lineares como ilustrado no diagrama (5.0.1). O texto na forma atual ainda precisa ser estendido ca e la, o que vai acontecer no semestre 2021-2 e no futuro.

## Agradecimentos

É um prazer agradecer os pagadores de imposto do Brasil para as condições excelentes de pesquisar e até 2019 de ensinar.

Espero que o Deus protege todos os cidadãos de todas as nações e leve a responsabilidade todos fomentando medo e gerando pânico.

Campinas,  
Semestre 2021-2

*Joa Weber*



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
Notações . . . . .	3
Convenções . . . . .	4
<b>I Teoria dos espaços vetoriais</b>	<b>5</b>
<b>1 Espaços vetoriais</b>	<b>7</b>
1.1 Axiomas . . . . .	7
1.1.1 Grupo . . . . .	8
1.1.2 Corpo . . . . .	9
1.1.3 Espaço vetorial . . . . .	13
1.2 Exemplos . . . . .	14
1.2.1 Listas ordenadas . . . . .	15
1.2.2 Matrizes . . . . .	16
1.2.3 Funções e polinômios . . . . .	17
1.3 Independência linear . . . . .	18
1.3.1 Combinação linear . . . . .	18
1.3.2 Linearmente independente . . . . .	19
<b>2 Subespaços</b>	<b>23</b>
2.1 Definição e exemplos . . . . .	23
2.2 Subespaço gerado por um conjunto . . . . .	25
2.3 Soma direta . . . . .	27
<b>3 Bases</b>	<b>29</b>
3.1 Aplicações . . . . .	32
3.1.1 Coordenadas de um vetor . . . . .	32
3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial . . . . .	33
3.1.3 Escalonamento: Dimensão de um subespaço gerado . . . . .	36
3.2 Existência e extensão . . . . .	37

<b>II</b>	<b>Teoria das transformações lineares 1</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>Transformações lineares</b>	<b>43</b>
4.1	Exemplos e construção . . . . .	43
4.1.1	O espaço vetorial das transformações lineares . . . . .	45
4.1.2	Isomorfismos . . . . .	46
4.1.3	Construção de transformações lineares . . . . .	46
4.1.4	O espaço dual . . . . .	48
4.2	Matrizes . . . . .	49
4.3	Dimensão dois – o plano . . . . .	53
4.3.1	rotações . . . . .	55
4.3.2	Projeção ortogonal sobre uma reta . . . . .	57
4.3.3	Reflexão ortogonal em torno de uma reta . . . . .	58
4.4	Ap.: Produto de transformações lineares . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Matrizes de transformações lineares</b>	<b>61</b>
5.1	Bases induzem isomorfismos . . . . .	62
5.2	A matriz em respeito a uma base . . . . .	63
5.3	Mudança de base – comutatividade do diagrama . . . . .	65
5.3.1	Vetor coordenada – parte triangular . . . . .	65
5.3.2	Matriz de uma TL – parte trapézio . . . . .	66
5.3.3	Determinante . . . . .	68
5.3.4	Traço . . . . .	69
5.4	Exercícios e umas soluções . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Núcleo e imagem</b>	<b>75</b>
6.1	Escalonamento: Cálculo do posto . . . . .	77
6.2	Sobrejetividade – inversa à direita . . . . .	78
6.3	Injetividade – inversa à esquerda . . . . .	79
6.4	Bijetividade – inversa . . . . .	81
6.4.1	Isomorfismos . . . . .	81
6.5	Teorema de Núcleo e Imagem . . . . .	84
6.6	Escalonamento: Núcleo e imagem . . . . .	86
6.6.1	Sistemas lineares . . . . .	86
6.6.2	Determinar bases de nucleo e imagem . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Soma direta e projeções</b>	<b>89</b>
7.1	Projeções . . . . .	91
7.2	Involuções . . . . .	92
7.3	Exercícios . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Subespaços invariantes – autovalores/vetores</b>	<b>97</b>
8.1	Autovalores e autovetores . . . . .	99
8.2	Polinômio característico . . . . .	104
8.3	Existência no caso real e complexo . . . . .	109
8.4	Exercícios . . . . .	110

<b>III Estruturas adicionais e operadores especiais</b>	<b>113</b>
<b>9 Produto interno</b>	<b>115</b>
9.1 Produto interno, norma, métrica . . . . .	115
9.1.1 Espaço dual – dualidade . . . . .	118
9.1.2 Matrizes simétricas positivas . . . . .	120
9.2 O plano euclidiano: Ângulos e comprimentos . . . . .	122
9.3 Ortogonalidade . . . . .	125
9.3.1 Projeção ortogonal sobre uma reta . . . . .	126
9.4 Desigualdades . . . . .	127
9.5 Ortonormalização – processo de Gram-Schmidt . . . . .	128
9.5.1 Existência e extensão de bases ortogonais . . . . .	130
9.5.2 Projeção ortogonal sobre um subespaço . . . . .	130
9.6 Complemento ortogonal . . . . .	131
9.7 Exercícios e umas soluções . . . . .	133
<b>10 A adjunta</b>	<b>135</b>
10.1 Definição e propriedades . . . . .	135
10.1.1 Adjunta e ortogonalidade . . . . .	137
10.1.2 Matriz da adjunta . . . . .	138
10.2 Fórmula para inversa à direita/esquerda . . . . .	139
10.3 Traço – produto interno em $\mathcal{L}(E, F)$ . . . . .	140
10.4 Operadores normais . . . . .	140
10.5 Exercícios . . . . .	141
<b>11 Operadores auto-adjuntos</b>	<b>143</b>
11.1 Auto-adjunto e ortogonalidade . . . . .	144
11.2 Matrizes simétricas . . . . .	144
11.3 Teorema espectral – diagonalização . . . . .	146
11.4 Operadores não-negativos . . . . .	148
11.5 Valores singulares (operadores gerais) . . . . .	152
11.6 Exercícios . . . . .	153
<b>12 Operadores ortogonais</b>	<b>155</b>
12.1 Matrizes ortogonais . . . . .	155
12.2 Operadores ortogonais . . . . .	159
12.3 Decomposição polar . . . . .	161
12.4 Exercícios . . . . .	164
<b>13 Produto hermitiano</b>	<b>165</b>
13.1 Definições . . . . .	165
13.2 Adjunta complexa $A^\dagger$ . . . . .	167
13.2.1 Operadores complexos são triangularizáveis . . . . .	167
13.2.2 Operadores normais $A^\dagger A = AA^\dagger$ . . . . .	168
13.2.3 Operadores hermitianos $A^\dagger = A$ . . . . .	168
13.2.4 Operadores unitários $A^\dagger = A^{-1}$ . . . . .	168

<b>IV</b>	<b>Teoria das transformações lineares 2</b>	<b>169</b>
<b>14</b>	<b>Formas quadráticas</b>	<b>171</b>
14.1	Formas bilineares . . . . .	171
14.2	Formas quadráticas . . . . .	172
14.3	Produto interno . . . . .	174
<b>V</b>	<b>Apêndices</b>	<b>177</b>
<b>A</b>	<b>MA141 – Revisão de matrizes e sistemas lineares</b>	<b>179</b>
A.1	Matrizes . . . . .	179
A.2	Escalonamento de matrizes segundo Gauss . . . . .	182
A.2.1	Aplicações de escalonamento . . . . .	184
A.3	Sistemas Lineares . . . . .	185
A.4	Cálculo da matriz inversa – Gauss-Jordan . . . . .	187
A.4.1	O determinante de matrizes quadradas . . . . .	187
A.5	Exercícios . . . . .	189
<b>B</b>	<b>Polinômios</b>	<b>191</b>
B.1	Espaço vetorial . . . . .	192
B.2	Anel . . . . .	192
B.3	Fatorização . . . . .	194
B.4	Teorema fundamental da álgebra . . . . .	194
<b>C</b>	<b>Demonstrações restantes</b>	<b>197</b>
C.1	Espaços vetoriais . . . . .	197
C.2	Subespaços . . . . .	199
C.3	Bases – SLH . . . . .	200
C.4	Transformações lineares . . . . .	201
C.5	Existência de subespaço invariante ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) . . . . .	203
C.6	Projeção ortogonal . . . . .	205
C.7	Operadores ortogonais . . . . .	208
C.8	Formas bilineares . . . . .	209
<b>D</b>	<b>Vários – Allerlei</b>	<b>211</b>
D.1	Teorema de adição de seno e coseno . . . . .	211
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>213</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>215</b>

# Introdução

## *Álgebra Linear*

*é o estudo dos espaços lineares e das transformações lineares.*

Um outro termo para *espaço linear* é *espaço vetorial*.

O próximo exemplo descreve como os conceitos de vetor e espaço vetorial foram descobertos: como flechas no plano onde se considera igual todos da mesma direção e do mesmo comprimento. A identificação “considerar igual” lida a uma enorme importância e poder do conceito na física (campos de forças).

**Exemplo 0.0.1** (O espaço vetorial  $F$  das flechas equipolentes no plano). Seja  $F$  o conjunto das flechas no plano  $\Pi$ , onde *consideramos iguais* duas flechas se

- (i) as duas flechas são paralelas,
- (ii) têm o mesmo sentido de percurso, e
- (iii) têm o mesmo comprimento.

Chama-se duas flechas satisfazendo (i-iii) de **flechas equipolentes**, símbolo  $\sim$ . Chamamos de **vetores** os elementos de  $F$ . Assim um vetor é uma flecha  $v$  onde consideramos iguais todas flechas equipolente a  $v$ , todas as quais denotamos de  $v$  também, e cada uma chamamos de um **representante** do vetor.<sup>2</sup> Se fixamos um ponto do plano, vamos nomear este ponto  $O$ , cada um vetor possui um representante, uma flecha equipolente, cujo ponto inicial é o ponto  $O$ .

Seja  $F$  munido de duas operações, primeiro, multiplicar uma flecha  $v$  com um número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  e, segundo, adicionar duas flechas  $v$  e  $w$ . Veja Figura 1.

*Multiplicação (escalar)*. Pela definição  $\alpha v$  é a flecha na direção de  $v$  cujo comprimento é  $\alpha$  vezes aquele de  $v$  (muda-se a direção caso o número  $\alpha$  é negativo).

*Adição (vetorial)*. Pela definição  $v + w$  é a flecha cujo ponto inicial é aquela de  $v$  e cujo ponto termino  $p$  é obtido depois fazer uma translação de  $w$  movendo o ponto inicial de  $w$  no ponto termino de  $v$ . Então  $p$  é definido como o ponto termino do novo  $w$ .

---

<sup>2</sup> Esta definição dos elementos de  $F$  é informal e só serve para nossa introdução. Uma excelente referência básica para a definição de  $F$  como um conjunto composto de coleções de flechas equipolentes é [Lim05].

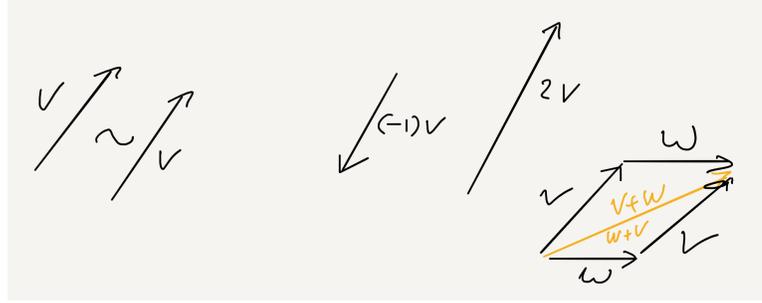


Figura 1: Flechas consideradas iguais, multiplicação escalar, e adição

O conjunto  $F$  munido das duas operações é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ . Um exemplo de uma transformação linear em  $F$  é uma rotação  $r_\theta : F \rightarrow F$  que vira cada uma flecha  $v$  pelo ângulo  $\theta$  em torno do ponto inicial.

**Exemplo 0.0.2** (Pares de números reais). Seja  $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  o conjunto de todas listas ordenadas de dois membros reais munido de adição membro-por-membro e de multiplicação com um número real  $\alpha \in \mathbb{R}$ , também membro-por-membro. Então  $\mathbb{R}^2$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

**Comentário 0.0.3** (Identificação dos conjuntos e operações – isomorfismo). Os dois exemplos anteriores são “iguais” no sentido seguinte. Suponhamos que na reta podemos medir a distância 1. No plano  $\Pi$  escolha um eixo  $OX$ , ou seja uma reta com dois pontos diferentes  $O$  e  $X$  da distância 1, e um segundo eixo  $OY$  cujo primeiro ponto  $O$  é aquele do  $OX$  e qual intersecta  $OX$  no ponto  $O$  só (equivalentemente  $OX \neq OY$ ). Uma tal escolha de dois eixos é chamado um **sistema de coordenadas** no plano, símbolo  $OXY$ . Veja Figura 2.

Observe-se que um eixo  $OX$  chega com uma direção (de  $O$  para  $X$ ) e com um comprimento unitário (o comprimento do segmento entre  $O$  e  $X$ ). Uma escolha de coordenadas  $OXY$  no plano  $\Pi$  nos da uma aplicação

$$F \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v = \overrightarrow{OP} \mapsto (x, y) \quad (0.0.1)$$

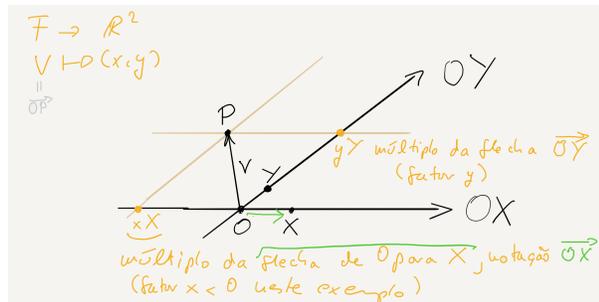


Figura 2: Sistema de coordenadas  $OXY$  composto de dois eixos  $OX$  e  $OY$

a qual identifica os vetores de  $F$  (escolha representantes  $v$  com ponto inicial  $O$ ) com as listas de  $\mathbb{R}^2$  unicamente (bijetora) – e ainda é **linear**: compatível com as duas operações no domínio e as duas no contra-domínio. Uma tal aplicação (bijetora linear) é chamado um **isomorfismo** entre espaços vetoriais. Deixamos ao leitor definir esta aplicação.<sup>3</sup>

**Definição 0.0.4** (Sistema de coordenadas Cartesianas). Escolhendo dois eixos *ortogonais* René Descartes (1596-1650) introduziu em 1637 a identificação (0.0.1) a qual é assim chamado de **sistema de coordenadas Cartesianas**; veja [Koe85, p. 7].

Na Seção 9.2 vamos ver como ângulos e comprimentos no plano traduzem ao lado algébrico como um chamado produto interno no  $\mathbb{R}^2$ .

**Exemplo 0.0.5** (Funções contínuas e integração). Sejam  $a < b$  dois números reais. Então o quadruplo  $V = (C^0([a, b], \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$  que é composto do conjunto das funções contínuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  munido com as duas operações de adicionar  $f + g$  duas funções e multiplicar  $\alpha f$  uma função com um número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

Também  $W = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$  composto dos números reais  $\mathbb{R}$  e munido das operações óbvias é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

Integração  $T : V \rightarrow W, f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ , é *compatível com*, as duas adições e as duas multiplicações (em  $V$  e em  $W$ ) no sentido que

$$T(f + g) = Tf + Tg, \quad T(\alpha f) = \alpha Tf,$$

para todos os vetores  $f, g \in V$  e escalares  $\alpha$  do corpo  $\mathbb{R}$ . Uma aplicação  $T$  entre espaços vetoriais qual respeita as duas operações no domínio e no contra-domínio é chamada de **transformação linear**.

## Notações

Para uma lista extensiva dos símbolos usados veja o Índice Remissivo D.3.

**Comentário 0.0.6** (Números). Vamos trabalhar com os seguintes **números**

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}, \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$	naturais
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	inteiros
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$	racionais
$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ “a reta real”	reais
$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ “o plano complexo”	complexos

Com  $|\alpha|$  denotamos o absoluto de um número real  $\alpha$ . Denotamos **intervalos** fechados de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e abertos de  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . Usamos os símbolos

$$\forall \text{ “para todos os”} \quad \exists \text{ “existe um”} \quad \exists! \text{ “existe um único”}.$$

<sup>3</sup> Dica: Os pontos  $O, X$  e  $O, Y$  dão duas flechas. Represente um elemento  $v$  de  $F$  por uma flecha equipolente com ponto inicial  $O$ . Pensa num paralelogramo tal que  $O$  e o ponto termino da flecha equivalente são dois vértices opostos.

A notação  $A := B$  significa que  $A$  é **definido** pelo lado direito  $B$ . Escrevendo  $\dim E = n$  ou  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  indica sem ser mencionado explicitamente que  $n$  e  $k$  são números naturais, particularmente têm valor **finito**.

“Sejam  $x_1, \dots, x_\ell$  elementos de um conjunto  $X$ ” é uma frase encontrada frequentemente e depois quer-se trabalhar com o conjunto composto destes elementos. Um ponto útil é que não é proibido que uns dos elementos, ainda todos, são iguais. O jeito certo de escrever o conjunto correspondente é assim  $\{x_1\} \cup \dots \cup \{x_\ell\}$ . Para este conjunto usa-se também a notação  $\{x_i \mid i = 1, \dots, \ell\}$ . Veja Definição 1.1.2.

### Convenções

É comum usar para o mesmo conceito às vezes terminologia diferente, por exemplo **transformação linear** e **operador linear**, ou ainda só **operador**, denota todo o mesmo conceito.

**Cor cinza.** Parágrafos e maiores partes de texto em cinza indicam matéria avançada direcionado às turmas A e B do “cursão”, mas não às outras turmas. Palavras individuais em cinza geralmente são nomes ou informações complementares.

## Parte I

# Teoria dos espaços vetoriais



# Capítulo 1

## Espaços vetoriais

### 1.1 Axiomas

**Definição 1.1.1.** Um<sup>1</sup> **conjunto**  $X$  é composto de elementos os quais são dois-a-dois diferentes. **Então não faz sentido escrever expressões da forma  $\{2, 3, 2\}$ .** Um conjunto não é ordenado, por exemplo  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ . A **união** de dois conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto  $A \cup B$  cujos elementos pertencem a  $A$  ou a  $B$ . Por exemplo

$$\{2, 3\} \cup \{2\} = \{2, 3\} = \{3, 2\}. \quad (1.1.1)$$

A **interseção** de dois conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto  $A \cap B$  composto de todos os elementos que pertencem a ambos  $A$  e  $B$ . Um conjunto chama-se **ordenado** se seus elementos são enumerados, por exemplo  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . O conjunto que não contém nenhum elemento é chamado **o conjunto vazio**, símbolo  $\emptyset$ . Usamos a notação  $A \dot{\cup} B$  para transferir a informação adicional que os dois conjuntos  $A$  e  $B$  são **disjuntos**, ou seja não tem nenhum elemento comum, em símbolos  $A \cap B = \emptyset$ . Denotamos de  $|X|$  o **número de elementos de um conjunto** quando o número é finito. Neste caso  $X$  é chamado de **conjunto finito**.

Um **subconjunto** de um conjunto  $X$  é um conjunto  $A$  tal que cada um elemento de  $A$  é elemento de  $X$ , notação  $A \subset X$ . Observe que conforme esta definição, o conjunto vazio  $\emptyset$  é subconjunto de todos conjuntos: para todo conjunto  $X$  temos  $\emptyset \subset X$ .

**Definição 1.1.2.** “*Sejam  $x_1, \dots, x_\ell$  elementos de um conjunto  $X$* ” é uma frase encontrada frequentemente e depois quer-se trabalhar com o conjunto composto destes elementos. Um ponto sutil é que não é proibido que uns dos elementos, ainda todos, são iguais. Mas conforme nossa convenção para denotar conjuntos, veja Definição 1.1.1, a notação  $\{x_1, \dots, x_\ell\}$  só faz sentido, e é permitida, quando os elementos são dois-a-dois diferente. A notação certa, junta com sua abreviação, para **o conjunto contendo os elementos  $x_1, \dots, x_\ell$  de  $X$**  é

$$\{x_1\} \cup \dots \cup \{x_\ell\} =: \{x_i \mid i = 1, \dots, \ell\}.$$

---

<sup>1</sup>Cap. 1 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

Uma escolha arbitraria forma o conjunto  $\cup_{\lambda \in \Lambda} \{x_\lambda\} =: \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ .

**Definição 1.1.3.** O **produto cartesiano**  $X \times Y$  de dois conjuntos  $X$  e  $Y$  é o conjunto de todas listas ordenadas  $(x, y)$  dos elementos  $x \in X$  e  $y \in Y$ , ou seja

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Observe que se um fator fica vazio, ou seja  $X = \emptyset$  ou  $Y = \emptyset$ , então  $X \times Y = \emptyset$ . Abreviamos

$$Y^{\times k} := Y \times \cdots \times Y \quad (1.1.2)$$

se na direita temos  $k$  fatores.

### 1.1.1 Grupo

**Definição 1.1.4.** Um conjunto não-vazio  $G \neq \emptyset$  munido de uma operação

$$*: G \times G \rightarrow G, \quad (f, g) \mapsto f * g$$

é chamado um **grupo**, notação  $(G, *)$ , se valem os três axiomas

1.  $f * (g * h) = (f * g) * h$  para todos os elementos  $f, g, h \in G$  (associatividade)

2. existe um elemento  $e \in G$  tal que (elemento neutro)

$$e * g = g, \quad g * e = g$$

para todos os elementos  $g \in G$ .

3. para todo  $g \in G$  existe um elemento  $h \in G$  t.q. (inverso)

$$g * h = e, \quad h * g = e.$$

Chama-se  $h$  de **inverso** do elemento  $g$  e denota-se  $h$  com o símbolo  $\bar{g}$ .

Em palavras,

*um grupo é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa, contendo um elemento neutro, e tal que cada um elemento admite um inverso.*

O seguinte lema diz que um grupo  $G$  tem exatamente um elemento neutro, notação comum  $e$ , e cada um elemento  $g$  de  $G$  tem exatamente um inverso, notação  $\bar{g}$ . Às vezes é comum e útil escrever o elemento neutro na forma 0 ou 1 e os inversos na forma  $-g$  ou  $g^{-1}$ ; veja os dois exemplos em Exercício 1.1.7 a).

**Lema 1.1.5.** *Seja  $(G, *)$  um grupo. Então vale o seguinte.*

1) *O elemento neutro é único.*

2) *Os elementos inversos são únicos.*

3) *Dado elementos  $f, g, h \in G$ , então vale:*

a)  $f * g = f * h \Rightarrow g = h$

b)  $f * g = f \Rightarrow g = e$

c)  $f * g = e \Rightarrow g = \bar{f}$

*(lei da corte)*

Note que b) e c) são consequências imediatas de a).

*Demonstração.* Lema C.1.1. □

**Definição 1.1.6.** Um grupo  $(G, *)$  é chamado de **abeliano** se a ordem dos dois elementos na operação não importa, em símbolos  $f * g = g * f$ . (comutatividade)

**Exercício 1.1.7.** Mostre que

- a) são grupos (ainda abelianos):  $(\mathbb{Z}, +)$  e  $(\mathbb{R}, \cdot)$
- b) não são grupos:  $(\mathbb{N}, +)$  e  $(\mathbb{N}_0, +)$  e  $(\mathbb{Z}, \cdot)$
- c) não são grupos abelianos:
  - as matrizes  $3 \times 3$  sob multiplicação matriz
  - as rotações em  $\mathbb{R}^3$  sob composição.

## 1.1.2 Corpo

**Definição 1.1.8.** Um conjunto  $\mathbb{K}$  munido de duas operações<sup>2</sup>

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$

é chamado um **corpo** se valem os três axiomas

1.  $(\mathbb{K}, +)$  é um grupo abeliano.  
(O elemento neutro seja denotado 0 e  $-\alpha$  denota o inverso de  $\alpha \in \mathbb{K}$ .)
2.  $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  é um grupo abeliano.  
(O elemento neutro seja denotado 1 e  $\alpha^{-1}$  denota o inverso de  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .)
3. Distributividade:  $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$  para todos  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ .  
(É costume escrever  $\alpha\beta$  em vez de  $\alpha \cdot \beta$ .)

Para distinguir chamamos o elemento neutro da primeira operação – para a qual temos usado o símbolo “+” ainda que geralmente não tem nada ver com adição de números – o **elemento neutro aditivo**. Chamamos o elemento neutro da segunda operação – motivado pelo uso do símbolo “.” – o **elemento neutro multiplicativo**. Como é feio escrever  $\alpha + (-\beta)$  para a soma de um elemento com um elemento inverso aditivo definimos  $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$ . Isso é uma abreviação só, não é, nem tem diferença. Analogamente simplificamos a notação escrevendo  $\alpha/\beta$  em vez de  $\alpha\beta^{-1}$ .

**Corolário 1.1.9.** *Um corpo contém pelo menos dois elementos.*

*Demonstração.* Pelos axiomas 1. e 2. cada uma operação tem um elemento neutro as quais não podem ser iguais por causa de 2. □

**Lema 1.1.10.** *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e 0 o elemento neutro da adição. Então  $0\beta = 0$  e  $\beta 0 = 0$  para todos os elementos  $\beta \in \mathbb{K}$ .*

<sup>2</sup> as quais vamos batizar aos nomes “+” e “.” – ainda que *geralmente não tem nada ver com adição e multiplicação de números*, mas esta escolha é motivada pelos exemplos principais (Exemplo 1.1.12) nos quais “+” e “.” são adição e multiplicação de números

*Demonstração.* Lema C.1.2. □

**Definição 1.1.11.** Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e 0 e 1 os elementos neutros da adição e multiplicação. O menor número natural  $k \geq 2$ , caso existisse, tal que a soma seguinte se anula

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{k \text{ vezes}} = 0$$

é chamado de **caraterística** do corpo. Caso não existe nenhum tal  $k$  chamamos o corpo de **caraterística nula**.

### Exemplos de corpos

**Exemplo 1.1.12** (Os corpos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{Q}$ ). São corpos  $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$  e  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ .

**Exemplo 1.1.13** (O corpo dos números complexos  $\mathbb{C}$ ). Vamos chamar a letra  $i$  de **unidade imaginária**. Um **número complexo** é uma soma formal da forma  $a + ib$  onde  $a$  e  $b$  são números reais. O conjunto  $\mathbb{C}$  de todos os números complexos munido das duas operações definidas assim

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &:= (a + c) + i(b + d) \\ (a + ib) \cdot (c + id) &:= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

é um corpo, denotado  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ , ou simplesmente  $\mathbb{C}$ .

Enquanto a regra da adição é fácil para memorizar, você consegue memorizar a multiplicação? Eu não. Deixa ver se tem um jeito simples para chegar na fórmula certa: Fazemos multiplicação formal como fossem números, ou seja

$$\begin{aligned}(a + ib) \cdot (c + id) &= ac + aid + ibc + i^2bd \\ &= ac + i^2bd + i(ad + bc) \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Assim só precisamos memorizar que  $i^2 = -1$ , mas isso é uma fórmula famosa.

Considere um número complexo  $z = a + ib$ . Chama-se  $a$  a **parte real** de  $z$ , notação  $\text{Re}(z) = a$ , e chama-se  $b$  a **parte imaginária** de  $z$ , notação  $\text{Im}(z) = b$ .

O **complexo conjugado** de  $z = a + ib$  é definido por  $\bar{z} := a - ib$  e o **absoluto**, ou módulo, por  $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Exercício 1.1.14.** Os números inteiros  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$  não formam um corpo.

**Exemplo 1.1.15** (Adição e multiplicação modulo  $n$ ). Dado um número natural  $n \geq 2$ ,<sup>3</sup> defina no conjunto  $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$  as duas operações

$$a +_n b := a + b \pmod{n}, \quad a \cdot_n b := ab \pmod{n}$$

<sup>3</sup> para  $n = 1$  obtemos o grupo aditivo trivial  $\mathbb{Z}_1 = \{0\}$  o qual nunca pode ser um corpo, porque contem 1 elemento só; veja Corolário 1.1.9

para todos os elementos  $a, b \in \mathbb{Z}_n$ .<sup>4</sup>

**Fato.**  $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$  é um corpo  $\iff n$  é um número primo.

Um primo  $p$  é a característica de  $\mathbb{Z}_p$ . Para valores pequenos de  $n$  pode-se checar de mão se  $\mathbb{Z}_n$  é um corpo ou não. Só precisa-se calcular as tabelas de adição e de multiplicação. Vamos ilustrar isso num exemplo.

**Exemplo 1.1.16** ( $\mathbb{Z}_4$  não é um corpo.). Para checar se  $(\mathbb{Z}_4, +_4)$  e  $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{e_{+4}\}, \cdot_4)$  são grupos abelianos é útil calcular as tabelas de adição e de multiplicação.

•  $(\mathbb{Z}_4, +_4)$  é um grupo abeliano? Para responder calculamos os valores na tabela

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

São 4 passos:

1. Determinar o elemento neutro de  $+_4$ : Checamos se a linha em cima da linha solida horizontal, ou seja a linha 0 1 2 3, tem uma cópia nas linhas embaixo. Sim, tem 0 1 2 3. Neste caso o elemento em frente da cópia é o elemento neutro de  $+_4$ , certo? No nosso caso  $e_{+4} = 0$ . Se não tem copia, não tem elemento neutro, e assim não seria um grupo.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 4) linhas de valores na tabela localiza o elemento neutro 0 (se existir). Então o elemento  $g$  em frente da linha de 0 e o elemento em cima da coluna de 0, notação  $\bar{g}$ , são inversos um do outro. Caso uma linha não contem 0, então este  $g$  não tem inverso, e assim não seria um grupo. No nosso caso todo elemento  $g$  tem um inverso:

$g$	$\bar{g}$ (denotado $-g$ )
0	0
1	3
2	2
3	1

3. Associatividade: Calculando caso por caso temos que checar se  $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$  para todas as possibilidades. No nosso caso vale.
4. Grupo abeliano (comutatividade): Vale se a tabela é simétrica em respeito à diagonal. No nosso caso vale.

Na verdade temos esquecido um passo: No início de tudo temos que checar se a operação é bem definida, ou seja os valores da operação (os valores na tabela) realmente são elementos do conjunto, ou não. Olhamos a tabela - sim.

Nosso resultado é que  $(\mathbb{Z}_4, +_4)$  é um grupo abeliano.

•  $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$  é um grupo abeliano? Para responder calculamos a tabela

<sup>4</sup> Dado  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $\ell \in \mathbb{Z}$  um número inteiro. Pela definição o elemento  $\ell \pmod{n} \in \mathbb{Z}_n$  é o resto  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  que falta depois você “enche”  $\ell$  com múltiplos de  $n$ . Em símbolos,  $\ell \pmod{n} := r$  onde  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  é o único elemento tal que  $\ell = kn + r$  para um  $k \in \mathbb{Z}$ .

$\cdot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Como o valor **0** não é elemento de  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$  a multiplicação  $\cdot_4$  não é uma operação em  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ , então não pode ser um grupo.

Ainda assim vamos repetir os 4 passos para  $\cdot_4$  (em vez de  $+_4$ ) para ver se tem outras falhas ainda. As respostas são:

1. Elemento neutro de  $\cdot_4$ : Tem, é o elemento  $e_{\cdot_4} = 1$ .
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 3) linhas de valores na tabela localizamos o elemento neutro 1 (se existir). No nosso caso

$g$	$\bar{g}$ (denotado $g^{-1}$ )
1	1
2	não tem!
3	3

o elemento 2 não tem um inverso e já por isso não temos um grupo.

3. Associatividade: Ainda que a fórmula  $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$  vale, os valores não são todos em  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ .
4. Grupo abeliano (comutatividade): A tabela é simétrica em respeito à diagonal, mas os valores não são todos em  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ .

Nosso resultado é que  $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$  não é um grupo abeliano.

**Exercício 1.1.17.** Seja  $n = 6$ :

1. Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso  $\mathbb{Z}_6$ .
2. Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em  $\mathbb{Z}_6$ . Eles sempre existem?
3. Para todo  $a \in \mathbb{Z}_6$  identifique o elemento inverso aditivo.
4. Para todo  $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$  identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.
5. Cheque que  $\mathbb{Z}_6$  não é um corpo. Quais dos axiomas não valem?

## Matéria avançada

Motivado pelas perguntas da Turma C na 1ª aula 2016-2 vamos dar um exemplo de um corpo onde a primeira operação não está relacionada à adição de números nem a segunda à multiplicação de números.

**Exercício 1.1.18** (Corpo  $(P, \cdot, \circ, \mathbb{R})$  onde  $\cdot$  não é adição e  $\circ$  não é multiplicação). Para  $\alpha \in \mathbb{R}$  considere a função  $p_\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto x^\alpha$ . Seja o conjunto

$$P := \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

composto de todas funções  $p_\alpha(x) = x^\alpha$  com  $\alpha \in \mathbb{R}$  e munido das operações

$$\begin{aligned} \cdot : P \times P &\rightarrow P & \circ : P \times P &\rightarrow P \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \cdot p_\beta & (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \circ p_\beta \end{aligned}$$

chamado de **multiplicação**<sup>5</sup> e **composição**<sup>6</sup> de funções, respectivamente. Mostre que:

1. As duas operações são bem definidas:  $p_\alpha \cdot p_\beta \in P$  e  $p_\alpha \circ p_\beta \in P$ , de fato

$$p_\alpha \cdot p_\beta = p_{\alpha+\beta}, \quad p_\alpha \circ p_\beta = p_{\alpha\beta}$$

2.  $(P, \cdot)$  é um grupo abeliano com elemento neutro  $p_0 \equiv 1$ .
3.  $(P \setminus \{p_0\}, \circ)$  é um grupo abeliano com elemento neutro  $p_1(x) = x$ .
4. Distributividade:  $(p_\alpha \cdot p_\beta) \circ p_\gamma = (p_\alpha \circ p_\gamma) \cdot (p_\beta \circ p_\gamma)$ ,  $\forall p_\alpha, p_\beta, p_\gamma \in P$ .

### 1.1.3 Espaço vetorial

O conceito de espaço vetorial reportar-se a um livro de 1844 do suíço Hermann Günther Grassmann (1809-1877), professor num ginásio, veja [Koe85, p.10-15]. A forma abstrata a qual introduzimos no seguinte só apareceu em torno de 1900.

**Definição 1.1.19.** Um **espaço vetorial  $E$  sobre um corpo** <sup>7</sup>  $\mathbb{K}$  é um quádruplo  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  composto de um conjunto  $E$ , um corpo  $\mathbb{K}$ , e duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E & \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (v, w) &\mapsto v + w & (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

chamadas de **adição** e **multiplicação escalar**, respectivamente, tal que vale

1.  $(E, +)$  é um grupo abeliano.  
(O elemento neutro é denotado  $\mathcal{O}$  e chamado o **vetor nulo**.)

$$2. \text{ Distributividade: } \begin{cases} (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \end{cases}$$

$$3. \text{ Compatibilidade: } \begin{cases} (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ 1v = v \end{cases}$$

<sup>5</sup>  $(p_\alpha \cdot p_\beta)(x) := p_\alpha(x) \cdot p_\beta(x)$

<sup>6</sup>  $(p_\alpha \circ p_\beta)(x) := p_\alpha(p_\beta(x))$

<sup>7</sup> fala-se abreviando “ $E$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ ” ou ainda “ $E$  é um espaço vetorial”.

Onde as identidades tem que ser válidas para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e todos  $v, w \in E$ . Chama-se **escalares** os elementos do corpo  $\mathbb{K}$  e **vetores** os elementos de  $E$ .

**Lema 1.1.20.** *Seja  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  um espaço vetorial e  $0 \in \mathbb{K}$  e  $\mathcal{O} \in E$ , então:*

- (i)  $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$  para todos os escalares  $\alpha \in \mathbb{K}$ .
- (ii)  $0v = \mathcal{O}$  para todos os vetores  $v \in E$ .
- (iii) Para todo o escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo o vetor  $w \in E$  são equivalentes:

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}. \quad (1.1.3)$$

*Demonstração.* Lema C.1.3. □

**Corolário 1.1.21** (Compatibilidade dos inversos aditivos com multiplicação). *Para todo o escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo o vetor  $w \in E$  vale:*

- a)  $(-\alpha)w = -(\alpha w)$
- b)  $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

*Demonstração.* Corolário C.1.4. □

**Corolário 1.1.22.** *Seja  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  no qual  $1 + 1 \neq 0$ . Neste caso para  $v \in E$  temos*

$$v + v = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad v = \mathcal{O}.$$

*Demonstração.* Como  $\mathcal{O} = v + v = 1v + 1v = (1 + 1)v$  segue de (1.1.3) que ou  $1 + 1 = 0$  no corpo  $\mathbb{K}$  ou  $v = \mathcal{O}$ . (Lembre-se que  $1 \in \mathbb{K}$ , assim 1 geralmente não é um número e  $1 + 1$  não tem nada ver com 2... Veja nota de rodapé no Lema 7.2.5.) □

## 1.2 Exemplos de espaços vetoriais

**Exemplo 1.2.1** (O espaço vetorial trivial  $\{\mathcal{O}\}$ ). Seja  $E$  um conjunto com 1 elemento só. Vamos já denotar aquele elemento com o símbolo  $\mathcal{O}$  (porque?). Então  $E = \{\mathcal{O}\}$ . Seja  $\mathbb{K}$  um corpo qualquer. Não tem escolha nenhuma para definir as duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E & \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\mathcal{O}, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} & (\alpha, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned}$$

Então  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  satisfaz os axiomas de um espaço vetorial, denotado simplesmente  $E = \{\mathcal{O}\}$  e chamado de **espaço vetorial trivial**.

**Exemplo 1.2.2** (Um corpo  $\mathbb{K}$  como um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ ). Usa-se as duas operações chegando com o corpo  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  como as duas operações necessárias para tornar um conjunto (escolhemos  $E := \mathbb{K}$ ) num espaço vetorial sobre um corpo (escolhemos  $\mathbb{K}$ ). Com efeito  $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K})$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .

### 1.2.1 Listas ordenadas

#### Números reais

**Exemplo 1.2.3** (O espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}$ ). Seja

$$\mathbb{R}^n := \{u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as listas ordenadas de  $n$  números reais. Chamamos  $\alpha_i$  o  $i$ -ésimo membro da lista. As duas operações

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

são definidas como adição membro-por-membro e multiplicação de todos membros com um escalar  $\beta \in \mathbb{R}$ . Checando todos axiomas vê-se que  $\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, notação  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$  ou  $\mathbb{R}^n$  só. O vetor nulo, também chamado de **origem**, é a lista

$$\mathcal{O} = (0, \dots, 0)$$

e o inverso de um elemento  $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é a lista  $(-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$  a qual denotamos com o símbolo  $-u$ .

O  **$i$ -ésimo vetor canônico** é a lista de  $n$  membros

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

cujo  $i$ -ésimo membro é o número 1 e todos outros são nulo 0. O conjunto

$$\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \tag{1.2.1}$$

de todos os vetores canônicos é chamado de **base canônica** de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 1.2.4** (O espaço vetorial  $\mathbb{R}^\infty$  sobre  $\mathbb{R}$ ). O conjunto

$$\mathbb{R}^\infty := \{u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \in \mathbb{R}\}$$

de todas as seqüências reais é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  sob adição e multiplicação membro-por-membro, notação  $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$ .

**Exemplo 1.2.5** (O espaço vetorial  $\mathbb{R}_0^\infty$  sobre  $\mathbb{R}$ ). O conjunto

$$\mathbb{R}_0^\infty := \{u \in \mathbb{R}^\infty \mid \text{só um número finito de membros são não-nulos}\}$$

é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  sob adição e multiplicação membro-por-membro como no exemplo prévio, notação  $(\mathbb{R}_0^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$ .

Dado  $i \in \mathbb{N}$ , a seqüência com todos membros nulos exceto o  $i$ -ésimo qual é 1 denotamos também de  $e_i$ . O conjunto de todos os  $e_i$ 's é denotado de

$$\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\} \tag{1.2.2}$$

e chamado de **base canônica** de  $\mathbb{R}_0^\infty$ .

### Corpos gerais

**Comentário 1.2.6** ( $\mathbb{K}^n$  e  $\mathbb{K}^\infty$ ). Os espaços vetoriais  $\mathbb{K}^n$  e  $\mathbb{K}^\infty$  sobre qualquer corpo  $\mathbb{K}$  são definidos analogamente Exemplos 1.2.3 e 1.2.4.

### 1.2.2 Matrizes

No Apêndice A.1 introduzimos o conjunto  $M(m \times n)$  das matrizes  $m \times n$  cujas entradas  $a_{ij}$  são números reais, munido de duas operações, adição e multiplicação escalar. O conteúdo do Apêndice A.1, de fato do Apêndice A inteiro, também vale para matrizes com entradas num corpo  $\mathbb{K}$ . Repetimos uns fatos.

**Exemplo 1.2.7** (Espaço vetorial das matrizes  $m \times n$ ). O **espaço vetorial das matrizes  $m \times n$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$**  é o conjunto

$$\begin{aligned} M(m \times n; \mathbb{K}) &:= \left\{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \right\} \\ M(n; \mathbb{K}) &:= M(n \times n; \mathbb{K}) \end{aligned}$$

onde a matriz  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  é o quadro de escalares com  $m$  linhas e  $n$  colunas <sup>8</sup>

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

munido da adição entrada por entrada e da multiplicação escalar com escalares  $\beta \in \mathbb{K}$  também entrada por entrada.

O vetor nulo é a matriz nula  $\mathbf{0}$  cujas entradas são todas o escalar nulo  $0 \in \mathbb{K}$ . Se na matriz nula  $n \times n$  colocamos o escalar  $1 \in \mathbb{K}$  ao longo da diagonal obtemos a **matriz identidade**  $\mathbf{1} = \mathbb{1}_n$ . O elemento inverso aditivo, notação  $-\mathbf{a}$ , de uma matriz  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  tem como entradas os inversos aditivos dos  $a_{ij}$ , notação  $-a_{ij}$ .

No caso do corpo dos números reais  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  abreviamos

$$M(m \times n) := M(m \times n; \mathbb{R}), \quad M(n) := M(n \times n; \mathbb{R}).$$

**Definição 1.2.8** (Linhas e colunas de matrizes). Seja  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$  uma matriz  $m \times n$ . Note-se que o primeiro índice  $i$  de uma entrada  $a_{ij}$  indica a linha e o segundo  $j$  a coluna dela. Tendo isso na vista vamos denotar a  **$k$ -ésima coluna**, respectivamente a  **$\ell$ -ésima linha**, de uma matriz  $\mathbf{a}$  com os símbolos

$$\mathbf{a}_{\bullet, k} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\ell, \bullet} = [a_{\ell 1} \quad \dots \quad a_{\ell n}]. \quad (1.2.3)$$

<sup>8</sup>Os escalares  $a_{ij}$  são chamadas as **entradas da matriz**. Por definição que a entrada  $a_{ij}$  está localizada na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna.

Temos escolhido o símbolo  $\bullet$  para sugerir “este índice é aberto” – ele corre e assim gera uma lista, ou vertical ou horizontal dependendo se  $\bullet$  fica no primeiro ou no segundo lugar. Assim podemos escrever a matriz  $\mathbf{a}$  nas formas seguintes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_{\bullet 1} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{\bullet n}].$$

**Definição 1.2.9** (Espaço-coluna e espaço-linha). Seja  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$  uma matriz  $m \times n$ . O **espaço-coluna** é o conjunto de todas as somas das colunas  $\mathbf{a}_{\bullet k}$  da matriz decorado com fatores escalares  $\alpha_k$ , em símbolos

$$\text{Esp-col}(\mathbf{a}) := \{\alpha_1 \mathbf{a}_{\bullet 1} + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_{\bullet n} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\} \subset M(m \times 1; \mathbb{K}).$$

Analogamente no **espaço-linha** usa-se as linhas da matriz  $\mathbf{a}$ , ou seja

$$\text{Esp-lin}(\mathbf{a}) := \{\alpha_1 \mathbf{a}_{1\bullet} + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_{n\bullet} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\} \subset M(1 \times n; \mathbb{K}).$$

### Produto matriz

O produto entre duas matrizes de tipos adequadas é definido no apêndice na fórmula (A.1.2) e umas propriedades do produto encontram-se no Lema A.1.5.

Para matrizes quadradas faz sentido investigar se admitem uma inversa ou não. Uma matriz quadrada  $\mathbf{a}$  é chamada de **invertível** se existe uma matriz quadrada  $\mathbf{b}$  tal que  $\mathbf{ab} = \mathbb{1}$ .

### 1.2.3 Funções e polinômios

**Exercício 1.2.10.** Dado um conjunto não-vazio  $X \neq \emptyset$  e um corpo  $\mathbb{K}$ , seja

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ função}\}$$

o conjunto de todas as funções  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ . Adição de funções e multiplicação com um escalar são definidas assim

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

para todos os  $x \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Mostre que  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . No caso especial  $X = \mathbb{K}$  vamos abreviar  $\mathcal{F}(\mathbb{K}) := \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ .

**Comentário 1.2.11.** A próxima observação ilustra o poder da matemática e um *ponto fundamental* dela - economizar através de abstração e *encontrar o certo ponto da vista*.

**Observação 1.2.12.**

- Se  $X = \{1, \dots, n\}$ , então  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ .
- Se  $X = \mathbb{N}$ , então  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$ .

c) Se  $X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ , então  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = M(m \times n)$ .

**Exercício 1.2.13** (Polinômios reais e complexos). Seja  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Dados escalares  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , então chama-se uma soma finita

$$p = p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$$

de **polinômio** na variável  $x \in \mathbb{K}$ , no caso  $\alpha_n \neq 0$  de **polinômio de grau  $n$** , e no caso  $\alpha_n = 1$  de **polinômio mônico**. Forneça o conjunto dos polinômios com uma estrutura de um espaço vetorial  $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$  ou  $(\mathcal{P}(\mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{C})$ .

## 1.3 Independência linear

### 1.3.1 Combinação linear

**Definição 1.3.1.** Uma soma *finita* da forma

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell}_{=:w} \quad \text{com } \alpha_j \in \mathbb{K}, v_j \in E \quad (1.3.1)$$

é chamada de **combinação linear (CL)**. Uma tal CL chama-se de **trivial** se todos os coeficientes  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  são nulos. Dizemos que

*“os vetores  $v_1, \dots, v_\ell$  representam o vetor  $w$ ”*

ou

*“o vetor  $w$  é CL dos vetores  $v_1, \dots, v_\ell$ ”.*

**Um problema central na teoria dos espaços vetoriais:** Dado vetores  $v_1, \dots, v_\ell$ , existe uma CL não-trivial deles representando o vetor nulo?

Nas outras palavras, existem escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  não todos nulos, tal que a CL correspondente dos vetores representa o vetor nulo? Em símbolos,

*“existem coeficientes  $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \neq (0, \dots, 0)$  tal que  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O}$ ?”*

**Exercício 1.3.2.** a) Caso possível escreva o vetor  $b = (1, -3, 10) \in \mathbb{R}^3$  como combinação linear dos vetores  $u = (2, -3, 5)$ ,  $v = (1, 1, 0)$ , e  $w = (1, 0, 0)$ .

b) Sejam  $u = (1, 1)$ ,  $v = (1, 2)$  e  $w = (2, 1)$ . Encontre números  $a, b, c$  e  $\alpha, \beta, \gamma$  todos não-nulos, tais que

$$au + bv + cw = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

com  $a \neq \alpha$ ,  $b \neq \beta$  e  $c \neq \gamma$ .

[Dica: a) Determinar os coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma$  na CL de  $u, v, w$  a qual representa  $b$  lida a um SL. Escalonamento.<sup>9</sup>

b) Defina  $x = a - \alpha$ ,  $y = b - \beta$ , e  $z = c - \gamma$  para obter um SLH. Resolve.]<sup>10</sup>

<sup>9</sup> encontre “o certo ponto da vista” (Comentário 1.2.11) e o SL vai chegar já escalonada..

<sup>10</sup> Respostas para seu controle: a)  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, -6)$ . b)  $(x, y, z) = z(-3, 1, 1)$ . Escolha um  $z \neq 0$ , por exemplo  $z = 1$ . Então  $(a, b, c) = (\alpha - 3, 1 + \beta, 1 + \gamma)$ . Toda escolha de reais  $\alpha \neq 0, 3$  e  $\beta, \gamma \neq 0, -1$  da uma solução. A escolha  $\alpha = 5$  e  $\beta = \gamma = 1$  resulta em  $a = b = c = 2$ .

### 1.3.2 Linearmente independente

**Definição 1.3.3** (Independência linear). **Vetores**  $v_1, \dots, v_\ell$  são chamados de

- **linearmente dependente (LD)** se representam o vetor nulo através de uma CL não-trivial;
- **linearmente independente (LI)** se não são linearmente dependente, em símbolos

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_\ell = 0 \quad (1.3.2)$$

ou em palavras

*“não existe nenhuma CL não-trivial dos vetores  $v_1, \dots, v_\ell$  representando o vetor nulo”.*

Um **subconjunto**  $X$  de um espaço vetorial  $E$  é dito de

- **linearmente independente (conjunto LI)** se cada uma escolha finita de elementos dois-a-dois diferentes<sup>11</sup> é linearmente independente;
- **linearmente dependente (conjunto LD)** se  $X$  não é linearmente independente, isto é se o vetor nulo é CL não -trivial de uma escolha finita de elementos dois-a-dois diferentes.

Ainda que se vetores  $v_1, \dots, v_\ell$  são elementos de um subconjunto  $X$  de  $E$ , uma CL deles não necessariamente encontra-se mais em  $X$ . Encontra-se sim, quando o subconjunto  $X$  de  $E$  é um chamado “subespaço” (Lema 2.1.2).

#### Comentário 1.3.4.

- O conjunto vazio  $\emptyset$  é LI: Com efeito, com os elementos de  $\emptyset$  não pode-se representar o vetor nulo nunca - simplesmente não tem elementos. Chama-se tal argumentação de **verdade vazia**.
- Um conjunto  $X = \{v\}$ , contendo só um vetor, é LI se e somente se  $v \neq \mathcal{O}$ .
- Se (1.3.2) vale para uma escolha  $v_1, \dots, v_\ell$ , então vale para qualquer sub-escolha destes vetores. [Use os coeficientes  $\alpha_i = 0$  nos restantes.]

Para provar a afirmação (ii), lembra (1.1.3).

**Lema 1.3.5.** *Sejam  $A, B, X$  subconjuntos de um espaço vetorial  $E$ .*

- $\mathcal{O} \in X \Rightarrow X$  LD. *(O vetor nulo rende conjuntos LD)*
- Todo conjunto  $A$  contido num conjunto LI  $X$  é LI.
- Todo conjunto  $B$  contendo um conjunto LD  $X$  é LD.

<sup>11</sup> Para que precisa-se a condição *dois-a-dois diferentes*?

*Demonstração.* a) O termo  $1\mathcal{O}$  é uma CL não-trivial em  $X$  representando o vetor nulo (segundo Lema 1.1.20). b) Os elementos de  $A$  são elementos de  $X$ , agora usa a definição da independência linear de  $X$ . c) Cada uma CL não-trivial em  $X$  representando o vetor nulo é também em  $B$ .  $\square$

**Exemplo 1.3.6.** Para saber se o subconjunto  $X := \{(1, 0), (2, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  é LI temos que checar (1.3.2) para cada uma escolha finita de elementos dois-a-dois diferentes de  $X$ . Como  $X$  é um conjunto finito, e tendo em vista Comentário 1.3.4 (iii), começamos com a escolha máxima, ou seja todos os (dois) elementos. Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Conforme (1.3.2) suponhamos que

$$(0, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(2, 1) = (\alpha + 2\beta, \beta)$$

onde o termo cinza resulta através das regras de multiplicação escalar e adição em  $\mathbb{R}^2$ . Comparando os segundos membros vemos que  $0 = \beta$  o qual usamos na comparação dos primeiros membros: recebemos  $0 = \alpha + 2 \cdot 0 = \alpha$ . Assim temos provado que ambos os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  são nulos. Então  $X$  é LI.

**Exercício 1.3.7.** Quais dos seguintes conjuntos  $X_i$  de vetores de  $\mathbb{R}^2$  são ou não são conjuntos linearmente independentes (LI)? Explique porque são ou não são.

1. Elementos de  $X_1$ : os vetores  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$ .
2.  $X_2 := \{(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)\}$ .
3. Escolha dois vetores diferentes  $u, v \in \mathbb{R}^2$  e defina  $X_3 := \{u, v\} \cup \{(1, 1)\}$ .

**Exercício 1.3.8.** Prove as afirmações seguintes.

1. A base canônica  $\mathcal{E}^n$  em (1.2.1) é um conjunto LI no  $\mathbb{R}^n$  para  $n \in \mathbb{N}$ .
2. A base canônica  $\mathcal{E}^\infty$  em (1.2.2) é um conjunto LI no  $\mathbb{R}_0^\infty$  e no  $\mathbb{R}^\infty$ .
3. Suponha  $u, v \in \mathbb{K}^2$  não são múltiplos um do outro. Prove que o conjunto  $\{u, v\}$  é LI.  
[Dica: Seja  $\alpha u + \beta v = \mathcal{O}$ . Considere  $\beta \neq 0$  e, lembrando (1.1.3),  $\beta = 0$ .]
4. Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ . Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, para todo  $i, j = 1, \dots, n$  temos  $x_i y_j = x_j y_i$ .
5. O subconjunto  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset M(2 \times 2)$  composto das matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

é um conjunto LI.

6. O conjunto  $X$  composto dos três polinômios

$$\begin{aligned} p &= p(x) = x^3 - 5x^2 + 1 \\ q &= q(x) = 2x^4 + 5x - 6 \\ r &= r(x) = x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

é um conjunto LI no espaço vetorial  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  dos polinômios reais.

7. Se o conjunto de vetores  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é LI, prove que o mesmo se dá com o conjunto  $\{v_1, v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$ . Vale a recíproca?

**Exercício 1.3.9** (Funções com valores complexos). Como introduzido em Exercício 1.2.10 seja  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  o espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{C}$  composto de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Considere os subconjuntos  $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$  e  $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$  de  $E$  composto das funções

$$f_1(t) = \cos t - i \sin t, \quad f_2(t) = \cos t + i \sin t, \quad f_3(t) = 1,$$

e

$$g_1(t) = \sin t, \quad g_2(t) = 1, \quad g_3(t) = \cos t.$$

- (a) Prove que cada um dos conjuntos  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  é LI.
- (b) Escreva cada  $g_i$  como combinação linear dos  $f_i$ 's.
- (c) Escreva cada  $f_i$  como combinação linear dos  $g_i$ 's.

Este exercício vai ter continuação em Exercício 5.4.10.



# Capítulo 2

## Subespaços

Um<sup>1</sup> subespaço de um espaço vetorial  $E$  é um subconjunto  $F$  qual é invariante sob as duas operações de  $E$ . Assim faz sentido restringir as duas operações a  $F$ . Munido das operações restritas  $F$  torna-se um espaço vetorial mesmo.

### 2.1 Definição e exemplos

**Definição 2.1.1.** Um subconjunto  $F \subset E$  de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  é chamado de **subespaço** se é **fechado sob as duas operações**, ou seja

(i)  $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$ . ( $F$  é fechado sob adição)

(ii)  $\alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$ . ( $F$  é fechado sob multiplicação escalar)

**Lema 2.1.2.** *Seja  $F$  um subespaço de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ . Então*

a)  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}, v_1, \dots, v_k \in F \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \in F$ . (*fechado sob CL*)

b)  $F$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  onde as duas operações são aquelas de  $E$  restrito ao subconjunto  $F \subset E$ . (*subespaços são espaços vetoriais*)

*Demonstração.* a) Indução. b) As restrições tomam valores em  $F$  segundo parte a) e as axiomas valem como os elementos de  $F$  são elementos de  $E$  para as quais os axiomas valem pela hipótese que  $E$  é um espaço vetorial. □

**Exercício 2.1.3** (Vetor nulo). O vetor nulo de um subespaço  $F$  é o vetor nulo  $\mathcal{O}$  do espaço vetorial ambiente. [Dica: Mostre  $\mathcal{O} \in F$ . O vetor nulo de  $F$  é único.]

Checar se um subconjunto  $F \subset E$  é um espaço vetorial é bastante trabalhoso dado os muitos axiomas. Isso mostra o valor alto da parte b) do lema dizendo que é suficiente checar “fechado sob as duas operações” – tarefa rapidinha.

**Exercício 2.1.4.** Mostre que o espaço vetorial  $\mathbb{R}$  só tem dois subespaços, isto é  $\{0\}$  e  $\mathbb{R}$ .

---

<sup>1</sup>Cap. 2 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

**Exercício 2.1.5.** Mostre que são subespaços de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ :

- a)  $F := \{\mathcal{O}\}$  (o subespaço mínimo / trivial)  
 a)  $F := E$  (o subespaço máximo)  
 b)  $\mathbb{K}v := \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$  (a reta passando  $v$  e a origem  $\mathcal{O}$ )  
 onde  $v$  é um vetor não-nulo de  $E$ . Observe que  $\mathbb{K}\mathcal{O} = \{\mathcal{O}\}$  é um ponto só.

**Exemplo 2.1.6** (O subespaço  $\mathbb{R}_0^\infty$  de  $\mathbb{R}^\infty$ ). O subconjunto  $\mathbb{R}_0^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$ , composto de todas sequências reais tal que só um número finito de membros são não-nulos, é um subespaço: Se a lista  $u$  tem  $k$  membros não-nulos e  $v$  tem  $\ell$ , então (i)  $u + v$  tem no máximo  $k + \ell$  e (ii)  $\alpha u$  tem no máximo  $k$ .

**Exercício 2.1.7** (Espaços vetoriais de funções). O conjunto  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  das funções reais é um espaço vetorial sob adição e multiplicação com constantes  $\alpha \in \mathbb{R}$ , veja Exercício 1.2.10. Para  $n \in \mathbb{N}_0$  seja

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto dos **polinômios reais do grau menor ou igual  $n$**  e  $\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  o conjunto de todos os **polinômios reais**. Seja

$$C^0(\mathbb{R}) := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$$

o conjunto das **funções contínuas**. Para  $k \in \mathbb{N}$  seja  $C^k(\mathbb{R}) := C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o conjunto das **funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis**. Chama-se

$$C^\infty(\mathbb{R}) := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{R})$$

o conjunto das **funções suaves**. Sejam  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Mostre que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

são subespaços do espaço vetorial  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  do Exercício 1.2.10. Segundo parte b) do Lema 2.1.2 todos estes conjuntos são espaços vetoriais sob adição de funções e multiplicação com constantes.

**Exemplo 2.1.8** (Hiperplanos no  $\mathbb{R}^n$ ). Dada uma lista  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , o subconjunto

$$H_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . O vetor nulo lida ao subespaço máximo  $H_{\mathcal{O}} = \mathbb{R}^n$ . No caso não-nulo  $\alpha \neq \mathcal{O}$  chama-se  $H_\alpha$  de **hiperplano** no  $\mathbb{R}^n$  passando a origem  $\mathcal{O}$ .

**Lema 2.1.9** (Conjunto de subespaços é fechado sob interseções). *Cada interseção  $F := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  de subespaços  $F_\lambda$  de um espaço vetorial  $E$  é um subespaço.*

*Demonstração.* Dado  $u, v \in F := \bigcap_{\lambda} F_\lambda$ , ou seja  $u, v \in F_\lambda \forall \lambda$ . Como subespaço cada um  $F_\lambda$  é fechado sob adição, ou seja  $u + v \in F_\lambda$  para todos os  $\lambda \in \Lambda$ . Em símbolos  $u + v \in \bigcap_{\lambda} F_\lambda =: F$ . Analogamente  $F$  é fechado sob mult. escalar.  $\square$

**Exemplo 2.1.10.** Dada uma matriz  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n)$ , então o conjunto

$$F_{\mathbf{a}} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}x = \mathcal{O}\}$$

é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Para ver isso lembramos de (A.3.1) que  $\mathbf{a}x = \mathcal{O}$  é o SLH

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

para  $n$  incógnitas  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , notação  $x := (x_1, \dots, x_n)$ . Note-se que as soluções  $x$  da primeira linha formam o hiperplano  $H_1 := H_{\mathbf{a}_1 \bullet}$  associado à primeira linha  $\mathbf{a}_1 \bullet$  da matriz  $\mathbf{a}$ . Isso é o certo ponto de vista, com efeito assim

$$F_{\mathbf{a}} = H_1 \cap \cdots \cap H_m$$

é uma interseção de subespaços e por isso é um subespaço segundo Lema 2.1.9.

**Exercício 2.1.11.**

- Quais dos seguintes subconjuntos  $X_j$  são subespaços de  $\mathbb{R}^n$ ? Em cada caso faça um desenho e explique porque é subespaço ou não é.
  - $X_1 := \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ;
  - $X_2 := \{(\alpha + 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ;
  - $X_3 := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \text{ reais não-negativos}\} \subset \mathbb{R}^2$ .
- (LI transfere-se a espaços vetoriais *ambientes*). Seja  $F$  um subespaço de um espaço vetorial  $E$ . Mostre que se um subconjunto de  $F$  é LI em respeito ao espaço vetorial  $F$  então o também é LI em respeito ao espaço vetorial ambiente  $E$ .

## 2.2 Subespaço gerado por um conjunto

**Definição 2.2.1** (Subespaço gerado por um subconjunto). Seja  $E$  um espaço vetorial e  $X$  um subconjunto. O **subespaço de  $E$  gerado por  $X$**  é o conjunto<sup>2</sup>

$$\langle X \rangle := \{\text{todas as combinações lineares em } X\} \cup \{\mathcal{O}\}.$$

Dizemos que **o conjunto  $X$  gera o subespaço  $\langle X \rangle$**  de  $E$ . Observa que o conjunto vazio gera o subespaço trivial, ou seja  $\langle \emptyset \rangle := \emptyset \cup \{\mathcal{O}\} = \{\mathcal{O}\}$ .

Se  $\langle X \rangle = E$  dizemos que **o conjunto  $X$  gera  $E$** . Neste caso cada um elemento de  $E$  é uma CL de elementos de  $X$ . Se  $v_1, \dots, v_\ell$  são vetores de  $E$  vamos usar a notação curta<sup>3</sup>

$$\langle v_1, \dots, v_\ell \rangle := \langle \{v_1\} \cup \cdots \cup \{v_\ell\} \rangle \subset E$$

para o subespaço gerado.

<sup>2</sup> Lembre-se da nossa convenção (1.1.1) para conjuntos, por exemplo  $\{1, 2\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ .

<sup>3</sup> O ponto sutil é que uns dos vetores podem ser iguais, veja Definição 1.1.2.

**Exercício 2.2.2.** Mostre que  $\langle X \rangle$  é um subespaço de  $E$  e que  $\mathbb{K}v = \langle v \rangle$ .

**Lema 2.2.3.** *Seja  $X$  um subconjunto de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ . Então*

- (i)  $X \subset \langle X \rangle$  (contido no subespaço gerado)
- (ii)  $Y \subset X \Rightarrow \langle Y \rangle \subset \langle X \rangle$  (naturalidade sob inclusão)
- (iii)  $F \subset E$  subespaço  $\Rightarrow \langle F \rangle = F$  (não muda subespaços)
- (iv) *Um subespaço  $F \subset E$  contendo  $X$  contém  $\langle X \rangle$ .* (respeita subespaços)

*Demonstração.* (i) Seja  $v \in X$ , então  $v \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1v \in \langle X \rangle$ . (ii) Como  $Y \subset X$ , CL's em  $Y$  são CL's em  $X$ . (iii) Igualdade é consequência das duas inclusões  $F \subset \langle F \rangle \subset F$ , onde a primeira é (i) e para a segunda usamos que os elementos de  $\langle F \rangle$  são CL's em  $F$ , mas um subespaço é fechado sob CL's segundo Lema 2.1.2 a). (iv) Com efeito  $F \stackrel{(\text{iii})}{=} \langle F \rangle \stackrel{(\text{ii})}{\supset} \langle X \rangle$ .  $\square$

**Lema 2.2.4.** *Todo subconjunto LI  $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$  de dois elementos já gera  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* Lema C.2.1.  $\square$

**Lema 2.2.5** (Os subespaços de  $\mathbb{R}^2$ ).  $\{\mathcal{O}\}$ ,  $\mathbb{R}^2$ , e as retas passando a origem.

*Demonstração.* 'D' Exercício 2.1.5. 'C' Seja  $F$  um subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . Caso  $F = \{\mathcal{O}\}$ , pronto. Caso contrario existe  $u \in F$  não-nulo. Se os demais  $f \in F$  são múltiplos de  $u$  temos  $F = \mathbb{R}u$ , pronto. Caso contrario existe um  $v \in F$ , não múltiplo de  $u$ . Então  $\{u, v\}$  é LI segundo Exercício 1.3.8 parte 2. Mas neste caso segundo Lema 2.2.4 e Lema 2.2.3 (iv) obtemos  $\mathbb{R}^2 = \langle u, v \rangle \subset F \subset \mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Exemplo 2.2.6** (Os espaços  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}_0^\infty$ ,  $\mathbb{R}^\infty$ ).

- a) A base canônica  $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$ , veja (1.2.1), gera  $\mathbb{R}^n$ . Com efeito

$$\mathbb{R}^n \ni v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A base canônica  $\mathcal{E}^0 := \emptyset$  gera o subespaço vetorial trivial  $\{0\} =: \mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}$ .

- b) Dado  $i \in \mathbb{N}$ , a sequência com todos membros nulos exceto o  $i$ -ésimo qual é 1 denotamos também de  $e_i$ . A **base canônica**  $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$  gera  $\mathbb{R}_0^\infty$ .
- c) A base canônica  $\mathcal{E}^\infty$  não gera  $\mathbb{R}^\infty$ : Uma CL deve ser uma soma *finita*, tente escrever a sequência cujos membros são todos 1 como uma CL.

**Exemplo 2.2.7** (Polinômios). O conjunto de **monômios**  $\{x^0, x, x^2, \dots, x^n\}$  onde  $x^0 := 1$  gera  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ . Todos os monômios  $\{1, x, x^2, \dots\}$  geram  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

**Exemplo 2.2.8** (Sistemas lineares). Dado um sistema linear  $[\mathbf{a} : b]$  onde  $\mathbf{a}$  é uma matriz  $m \times n$ . Sabemos de (A.3.2) que existe uma solução  $x$  se e somente se a lista  $b$  é CL das colunas da matriz  $\mathbf{a}$ . Consequentemente se as colunas de  $\mathbf{a}$  formam um conjunto de geradores de  $\mathbb{R}^m$ , então para cada uma inhomogeneidade  $b \in \mathbb{R}^m$  o SL admite uma solução.

## 2.3 Soma direta

**Definição 2.3.1** (Soma de subconjuntos). A soma de subconjuntos  $X$  e  $Y$  de um espaço vetorial  $E$  é o conjunto de todas as somas

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} \subset E.$$

Em vez de  $\{x\} + Y$  escreve-se  $x + Y$  e chama-se **a translação de  $Y$  por  $x$** .

**Lema 2.3.2.** A soma de dois subespaços é gerado da união deles, em símbolos

$$F, G \subset E \text{ subespaços} \Rightarrow F + G = \langle F \cup G \rangle.$$

Particularmente, a soma de dois subespaços é um subespaço mesmo.

*Demonstração.* Para provar igualdade de dois conjuntos prova-se as duas inclusões. '⊂' Os elementos de  $F + G$  são CL's da forma especial  $f + g$  enquanto  $\langle F \cup G \rangle$  contem todas as CL's em  $F \cup G$ .

'⊃' Pegue um elemento  $h$  de  $\langle F \cup G \rangle$  e use comutatividade para re-escrever a soma finita com os somandos em  $F$  no frente e depois aqueles em  $G$ . Assim recebemos um elemento, igual  $h$ , em  $F + G$ .  $\square$

**Definição 2.3.3** (Soma direta de subespaços). Sejam  $F_1, F_2 \subset E$  subespaços de um espaço vetorial  $E$ . No caso da interseção trivial  $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$  escreve-se  $F_1 \oplus F_2$  em vez de  $F_1 + F_2$  e chama-se **soma direta dos subespaços  $F_1$  e  $F_2$** .

O símbolo  $F \oplus G$  é simplesmente uma abreviação para duas informações, com efeito

$$F \oplus G = H \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{\mathcal{O}\} \\ F + G = H \end{cases}.$$

Use-se a soma direta para decompor um vetor unicamente em componentes.

**Teorema 2.3.4.** Sejam  $F_1, F_2 \subset F$  três subespaços de um espaço vetorial  $E$ :

$$F = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \forall f \in F, \exists! f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \text{ tal que } f = f_1 + f_2.$$

*Demonstração.* Teorema C.2.2.  $\square$

**Exercício 2.3.5.** No espaço vetorial  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  das funções  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sejam

$$F_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [0,1]\}$$

$$F_2 = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [2,3]\}.$$

Mostre que  $F_1$  e  $F_2$  são subespaços de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 + F_2$ , mas não se tem  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2$ .

**Exercício 2.3.6.** Verdadeiro ou falso? Para todos subconjuntos  $X, Y \subset E$  vale

$$(i) \quad \langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$$

$$(ii) \quad \langle X \cap Y \rangle = \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$$

**Exercício 2.3.7.** Uma matriz quadrada  $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  chama-se

**simétrica** se  $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$       **anti-simétrica** se  $a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j$ .

Então as matrizes simétricas são aquelas iguais às suas transpostas  $\mathbf{a}^t = \mathbf{a}$  e as anti-simétricas aquelas com  $\mathbf{a}^t = -\mathbf{a}$ .

Prove a) que o conjunto  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(n)$  das matrizes simétricas  $n \times n$  e o conjunto  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$  das anti-simétricas são subespaços de  $M(n; \mathbb{K})$  e b) que

$$M(n; \mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

[Dica: b) Considere as duas matrizes  $\mathbf{a}^\pm := \frac{1}{2}(\mathbf{a} \pm \mathbf{a}^t)$ .]

# Capítulo 3

## Bases

Durante<sup>1</sup> o Capítulo 3 denotamos de  $E$  um espaço vetorial

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre um corpo  $\mathbb{K}$ .

Bases de um espaço vetorial  $E$  são subconjuntos LI as quais geram  $E$  no sentido que todo vetor de  $E$  pode ser escrito como combinação linear (CL) de elementos da base. Os coeficientes escalares na CL são únicos (propriedade LI) e chamados de coordenadas de um vetor em respeito à base. Quando  $E$  admite uma base finita de  $n$  elementos chama-se  $n$  a dimensão de  $E$ . Se escolhermos uma outra base, recebemos uma outra dimensão? Veremos na Seção 3.1.2 que não: Se  $E$  admite uma base finita todas as bases tem o mesmo número de elementos.

Então bases são LI, contem suficientemente muitos elementos para que todo vetor pode ser escrito como CL deles, e na dimensão finita bases ainda são conjuntos máximos no sentido que adicionando mais um outro vetor só já recebe-se um conjunto LD.

**Definição 3.0.8** (Base). Para um subconjunto  $\mathcal{B}$  de  $E$  definimos

$$\mathcal{B} \text{ base de } E \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{B} \text{ gera } E \\ \mathcal{B} \text{ é LI} \end{cases} .$$

O número de elementos de  $\mathcal{B}$  pode ser finito ou infinito. Uma **base ordenada** é uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  cujos elementos são enumerados. Equivalentemente podemos escrever uma base ordenada na forma de uma lista ordenada  $\mathcal{B} = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ , finita ou infinita.

A observação chave é essa: Se uma base  $\mathcal{B}$  de um espaço vetorial contem exatamente  $m$  elementos, então todas as bases contêm exatamente  $m$  elementos. Isso será o conteúdo da Proposição 3.1.12. Vamos aproveitar do resultado já:

---

<sup>1</sup>Cap. 3 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

**Definição 3.0.9** (Dimensão). Se um espaço vetorial  $E$  admite uma base finita, dizemos  $\mathcal{B}$ , então o número dos elementos é dito a **dimensão de  $E$** , em símbolos

$$\dim E := |\mathcal{B}|.$$

Se  $E$  não admite uma base finita, então dizemos que  $E$  é de **dimensão infinita** e escrevemos  $\dim E = \infty$ .

**Comentário 3.0.10** (Dimensão do espaço vetorial trivial). O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial trivial  $E = \{\mathcal{O}\}$ , Exemplo 1.3.4, assim  $\dim\{\mathcal{O}\} = 0$ .

**Exemplo 3.0.11.** Sejam  $u = (1, 1)$  e  $v = (2, 0)$ . Os conjuntos  $\{e_1, u\}$  e  $\{u, v\}$  são bases de  $\mathbb{R}^2$ . Ambos conjuntos são LI segundo Exercício 1.3.8 3. (os elementos não são múltiplos um do outro, veja Teorema 3.1.1) e por isso geram  $\mathbb{R}^2$  (Lema C.2.1). Um exemplo para LD é o conjunto  $\{e_1, v\}$ , no qual um elemento é múltiplo do outro.

**Exercício 3.0.12** (Para soma direta a união de bases é base). Seja  $E = F_1 \oplus F_2$ . a) Mostre que uma união  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  de bases de  $F_1$  e  $F_2$  é uma base de  $E$ .

[Dica: a) União LI – ideia de (C.2.1).]

**Exemplo 3.0.13** (Bases canônicas e dimensões). Análogo para corpos gerais  $\mathbb{K}$ .

a) **Listas.** A base canônica  $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\}$  é base de  $\mathbb{R}^n$  e assim

$$\dim \mathbb{R}^n := |\mathcal{E}^n| = n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Caso  $n \geq 1$ : Exercício 1.3.8 confirma LI, Exercício 2.2.6 diz que gera  $\mathbb{R}^n$ .

Caso  $n = 0$ : Note que  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$  é o espaço vetorial trivial. O conjunto vazio  $\mathcal{E}^0 = \emptyset$  é LI (Comentário 1.3.4) e gera o espaço trivial (Definição 2.2.1).

b) **Sequências.** A base canônica  $\mathcal{E}^\infty := \bigcup_{j=1}^\infty \{e_j\}$  é base de  $\mathbb{R}_0^\infty$  e assim

$$\dim \mathbb{R}_0^\infty := |\mathcal{E}^\infty| = \infty.$$

Base de  $\mathbb{R}_0^\infty$ , não de  $\mathbb{R}^\infty$ : O conjunto  $\mathcal{E}^\infty$  é LI em  $\mathbb{R}_0^\infty$  e em  $\mathbb{R}^\infty$  (Exercício 1.3.8). Mas enquanto  $\mathcal{E}^\infty$  gera  $\mathbb{R}_0^\infty$ , não gera  $\mathbb{R}^\infty$ , veja Exemplo 2.2.6.

Ainda que não temos na mão uma base de  $\mathbb{R}^\infty$  no Lema 3.1.16 mostramos

$$\dim \mathbb{R}^\infty = \infty.$$

Isso é baseado no fato que  $\mathbb{R}^\infty$  possui um subespaço de dimensão infinita.

c) **Matrizes.** Seja  $\mathbf{e}^{ij} \in M(m \times n)$  a matriz com todas entradas nulas exceto a  $ij$ -ésima entrada a qual é  $(\mathbf{e}^{ij})_{ij} = 1$ . A base canônica de  $M(m \times n)$  é

$$\mathcal{E}^{m \times n} := \{\mathbf{e}^{ij} \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\} \subset M(m \times n).$$

Como a base canônica tem  $|\mathcal{E}^{m \times n}| = mn$  elementos obtemos

$$\dim M(m \times n) = mn.$$

d) **Polinômios reais.** Base canônica de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  – os monômios  $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ .

Gerando: Por definição de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ . LI: **Versão 1.** Para uma prova elementar baseada no determinante só veja Teorema B.1.2. **Versão 2.** Vamos usar que um polinômio sobre um corpo infinito, por exemplo  $\mathbb{R}$ , e de grau  $n$  tem no máximo  $n$  raízes. Uma CL  $p$  de monômios representando a função nula é um polinômio com um número infinito de raízes. Assim todos coeficientes devem se anular.

Analogamente  $\{1, x, \dots, x^n\}$  é uma base de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ . Consequentemente

$$\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty, \quad \dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (3.0.1)$$

e) **Hiperplanos.** Dado uma lista  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  com  $\alpha_n \neq 0$ , o hiperplano

$$H_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

tem como base o conjunto  $\mathcal{B}_\alpha := \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$  no qual a lista

$$\xi_i := \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}\right) \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n-1$$

tem todos membros nulos exceto o  $i$ -ésimo e o último. É óbvio que  $\mathcal{B}_\alpha$  é LI, que gera  $\mathbb{R}^n$  podemos ver assim: Para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  vale

$$\begin{aligned} x \in H_\alpha & \\ \Leftrightarrow 0 &= \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \\ \Leftrightarrow x_n &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1} \\ \Leftrightarrow x &= \left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1}\right) \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow x &= x_1 \xi_1 + \dots + x_{n-1} \xi_{n-1}. \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\dim H_\alpha = n - 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}^n, \alpha \neq \mathcal{O}$$

Note que  $\dim H_\mathcal{O} = n$ .

A parte **hiper** em hiperplano refere-se ao fato do que na dimensão falta 1 para a dimensão do espaço vetorial ambiente, no caso presente  $H_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ .

**Comentário 3.0.14** (Corpo geral  $\mathbb{K}$ ). Todas afirmações no Exemplo 3.0.13 ficam verdadeiro se em vez do corpo  $\mathbb{R}$  usa-se um corpo geral  $\mathbb{K}$  – exceto a parte d) sobre polinômios a qual fica válida para *corpos infinitos*; veja Apêndice B.

**Exercício 3.0.15** (Produto cartesiano). Seja  $n \in \mathbb{N}_0$  e seja  $F$  um espaço vetorial de dimensão  $m$ . Mostre que o produto cartesiano  $F^{\times n}$ , veja (1.1.2), é um espaço vetorial sob as operações de adição e multiplicação escalar, ambas componente-por-componente, e que  $\dim F^{\times n} = mn$ .

[Dica: Dimensão – escolha uma base de  $F$  e use para definir uma base de  $F^{\times n}$ .]

## 3.1 Aplicações

### 3.1.1 Coordenadas de um vetor

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $X \subset E$  um subconjunto tal que  $|X| \geq 2$ . Então*

- a)  $X$  é LI  $\Leftrightarrow$  nenhum elemento de  $X$  é CL de outros elementos de  $X$ .
- b)  $X$  é LD  $\Leftrightarrow$  existe um elemento de  $X$  que é CL de outros elementos de  $X$ .

*Demonstração.* a) ' $\Rightarrow$ ' Seja  $X$  LI, suponha por absurdo que um elemento  $u \in X$  fosse CL  $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$  de outros elementos  $v_j$  (tem outros como  $|X| \geq 2$ ). Adicionando  $-u$  em ambos lados obtemos  $\mathcal{O} = (-1)u + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ . Como  $-1 \neq 0$  trata-se de uma CL não-trivial em  $X$  representando o vetor nulo. Assim  $X$  é LD. Contradição.

' $\Leftarrow$ ' Suponha por absurdo  $X$  fosse LD. Então existe uma CL não-trivial em  $X$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$$

representando o vetor nulo. Pelo menos um dos  $\alpha_i$  é não-nulo. Renomeando podemos supor  $\alpha_1 \neq 0$ . Caso  $k = 1$ . Então  $\alpha_1 v_1 = \mathcal{O}$  e assim  $v_1 = \alpha_1^{-1} \mathcal{O} = \mathcal{O}$ . Contradição. Caso  $k \geq 2$ . Então  $v_1 = -\alpha_1^{-1} \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_1^{-1} \alpha_k v_k$  é CL de outros elementos de  $X$ . Contradição. b) é equivalente à parte a).  $\square$

**Corolário 3.1.2** (Unicidade dos coeficientes de CL's em conjuntos LI). *Seja  $\{v_1, \dots, v_k\}$  um subconjunto LI de  $E$ , então*

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k.$$

*Em palavras, se duas CL's num conjunto LI representam o mesmo vetor, então os coeficientes escalares coincidem.*

*Demonstração.*  $\alpha_1 - \beta_1 = 0$ : Suponha por absurdo  $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$ . Então o vetor

$$v_1 = (\alpha_1 - \beta_1)^{-1} ((\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k)$$

é CL de outros elementos. Contradição (Teorema 3.1.1 a)). Análogo para os outros  $\alpha_j - \beta_j$ . Outro argumento (usando LI): Suponha  $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = \mathcal{O}$ . LI diz que todos coeficientes são nulos.  $\square$

#### Lema 3.1.3.

- a) Um subconjunto  $Y$  de um conjunto LI  $X$  é LI. (Subconjuntos herdam LI)
- b) Um conjunto  $X$  contendo um  $Y$  LD é LD. (Superconjuntos herdam LD)
- c) Um subconjunto LI  $X$  num subespaço  $F \subset E$ , também é LI em  $E$ .  
(LI transfere-se para superespaços)

*Demonstração.* a) Como  $X$  é LI, toda CL em  $X$  representando  $\mathcal{O}$  tem todos coeficientes nulos. Como  $Y \subset X$ , toda tal CL em  $Y$  é uma em  $X$  e assim tem todos coeficientes nulos. b) Como  $Y \subset X$ , uma CL não-trivial em  $Y$  representando  $\mathcal{O}$  é uma tal em  $X$ . c) Isso resta no fato que o vetor nulo de um subespaço é o vetor nulo do espaço vetorial ambiente, veja Exercício 2.1.3.  $\square$

**Comentário 3.1.4** (Consequências das duas propriedades de ser base  $\mathcal{B}$  de  $E$ ).  $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ : Assim todo  $v \in E$  pode ser escrito como CL em  $\mathcal{B}$ , com efeito

$$v = \alpha_1 \xi_1 + \cdots + \alpha_k \xi_k \quad (3.1.1)$$

para escalares  $\alpha_i \in \mathbb{K}$  e vetores  $\xi_j \in \mathcal{B}$  da base.

$\mathcal{B}$  é LI: Assim os coeficientes  $\alpha_j$  em cima são únicos (Corolário 3.1.2).

*Todo vetor  $v \in E$  admite coordenadas únicas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$  em respeito a uma base ordenada  $\mathcal{B}$  de  $E$ .*

**Definição 3.1.5** (Coordenadas). Suponha  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  é uma base ordenada de um espaço vetorial  $E$ . As **coordenadas** de um vetor  $v \in E$  em respeito à base  $\mathcal{B}$  são os coeficientes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  em (3.1.1). A matriz coluna  $n \times 1$  das coordenadas

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \quad (3.1.2)$$

é chamado de **vetor coordenada** de  $v$  em respeito à base  $\mathcal{B}$ . Abreviamos  $[v] := [v]_{\mathcal{E}^m}$  no caso de  $E = \mathbb{K}^m$  munido da base canônica  $\mathcal{E}^m$ .

**Lema 3.1.6.** *Duas bases ordenadas  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  e  $\tilde{\mathcal{B}}$  de  $E$  são iguais se e somente se cada um elemento de  $E$  tem o mesmo vetor coordenada em respeito a  $\mathcal{B}$  e a  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Em símbolos*

$$[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\tilde{\mathcal{B}}} \quad \forall v \in E \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}.$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” A hipótese para  $v := \xi_1$  diz que  $[\xi_1]_{\mathcal{B}} = [\xi_1]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ . Note-se que  $[\xi_1]_{\mathcal{B}} = (1, 0, \dots, 0)$ . E assim  $[\xi_1]_{\tilde{\mathcal{B}}} = (1, 0, \dots, 0)$ . Mas isso significa que  $\xi_1 = 1 \cdot \tilde{\xi}_1 + 0 \cdot \tilde{\xi}_2 + \cdots + 0 \cdot \tilde{\xi}_n = \tilde{\xi}_1$ . Repita para  $v = \xi_2, \dots, \xi_n$ . “ $\Leftarrow$ ” óbvio.  $\square$

**Exercício 3.1.7.** Seja  $E = \mathbb{R}^2$  munido da base canônica  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$  e da base ordenada  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2\}$  onde  $\xi_1 = (1, 1)$  e  $\xi_2 = (-1, 1)$ . Determine  $[e_1]_{\mathcal{B}}, [e_2]_{\mathcal{B}}, [e_1], [e_2]$  e também  $[\xi_1]_{\mathcal{B}}, [\xi_2]_{\mathcal{B}}, [\xi_1], [\xi_2]$ .

**Exercício 3.1.8.** Mostre que os polinômios  $1, x - 1, e x^2 - 3x + 1$  formam uma base de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Exprima o polinômio  $2x^2 - 5x + 6$  como CL nessa base.

### 3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial

**Teorema 3.1.9.** *Se um conjunto finito gera  $E$ , então qualquer conjunto  $Y \subset E$  com mais elementos é LD.*

**Corolário 3.1.10.** *Suponha um conjunto finito  $X$  gera  $E$ , então*

$$Y \subset E \text{ LI} \quad \Rightarrow \quad |Y| \leq |X|.$$

Para provar Teorema 3.1.9 vamos usar o seguinte resultado sobre SLH's.

**Teorema 3.1.11** (Existência de soluções não-triviais de um SLH). *Dado uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$ . Se a matriz tem menos linhas como colunas ( $m < n$ ), então o SLH  $\mathbf{a}\mathbf{x} = \mathcal{O}$ , compare (A.3.1), admite soluções não-triviais  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ .*

*Demonstração.* Indução sobre o número  $m$  de linhas. Veja Teorema C.3.1.  $\square$

*Demonstração de Teorema 3.1.9.* Suponha que o conjunto  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  gera o espaço vetorial  $E$  e seja  $Y \subset E$  um outro subconjunto com mais elementos, ou seja  $|Y| > m$ . Para mostrar que  $Y$  é LD, basta mostrar segundo Lema 3.1.3 b) que um subconjunto  $U = \{u_1, \dots, u_{m+1}\} \subset Y$  de  $m+1$  elementos é LD. Como  $X$  gera  $E$  e cada um  $u_j$  pertence a  $E$  existem escalares  $a_{ij}$  tal que

$$u_j = a_{1j}v_1 + \dots + a_{mj}v_m \quad (*_j)$$

para  $j = 1, \dots, m+1$ .

Para  $U$  é LD resta mostrar: existem escalares não-nulos  $x_1, \dots, x_{m+1}$  tal que

$$x_1u_1 + \dots + x_{m+1}u_{m+1} = \mathcal{O}. \quad (3.1.3)$$

Para este fim considere o SLH de  $m$  equações de  $n = m+1$  incógnitas  $x_j$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1,m+1}x_{m+1} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m,m+1}x_{m+1} = 0 \end{cases} \quad (\text{SLH})$$

o qual tem uma solução não-trivial  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{m+1}) \neq (0, \dots, 0)$  segundo Teorema 3.1.11 como  $m < n$ . Obtemos (3.1.3) assim: usando  $(*_1 - *_{m+1})$  temos

$$\begin{aligned} & x_1u_1 + \dots + x_{m+1}u_{m+1} \\ &= x_1(a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m) \\ & \quad + x_2(a_{12}v_1 + \dots + a_{m2}v_m) \\ & \quad \vdots \\ & \quad + x_{m+1}(a_{1,m+1}v_1 + \dots + a_{m,m+1}v_m) \\ &= v_1 \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{1j}x_j}_{= 0 \text{ (SLH)}_1} + \dots + v_m \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{mj}x_j}_{= 0 \text{ (SLH)}_m} \\ &= \mathcal{O}. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposição 3.1.12.** *Se uma base  $\mathcal{B}$  de um espaço vetorial contém exatamente  $m$  elementos, então todas bases contêm exatamente  $m$  elementos.*

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$  e  $\tilde{\mathcal{B}}$  bases de  $E$ .

- 1)  $\langle \mathcal{B} \rangle = E$  e  $Y := \tilde{\mathcal{B}}$  LI implicam (Corolário 3.1.10)  $\ell := |\tilde{\mathcal{B}}| \leq |\mathcal{B}| = m < \infty$ .
- 2) Analogamente como  $\langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle = E$  e  $Y := \mathcal{B}$  é LI, temos que  $m = |\mathcal{B}| \leq |\tilde{\mathcal{B}}| = \ell$ .  $\square$

A noção de dimensão é baseada nessa proposição: Se um espaço vetorial  $E$  admite uma base finita, dizemos  $\mathcal{B}$ , então o número dos elementos é dito a **dimensão de  $E$** , em símbolos

$$\dim E := |\mathcal{B}|.$$

Caso  $E$  não admite nenhuma base finita dizemos que  $E$  é de **dimensão infinita** e escrevemos  $\dim E = \infty$ .

**Lema 3.1.13** (Aumentando conjuntos LI). *Seja  $X = \{v_1, \dots, v_k\}$  um subconjunto LI e seja  $u \in E \setminus \langle X \rangle$  um vetor de  $E$  mas não em  $\langle X \rangle$ . Então o conjunto estendido  $\{v_1, \dots, v_k, u\}$  também é LI.*

*Demonstração.* Se  $X = \emptyset$ , então  $u \notin \langle \emptyset \rangle = \{\mathcal{O}\}$ , assim  $u \neq \mathcal{O}$  e  $\{u\}$  é LI segundo Corolário 1.3.4. Se  $X \neq \emptyset$ , suponha por absurdo que  $\{v_1, \dots, v_k, u\}$  fosse LD. Assim existe uma CL não-trivial  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta u = \mathcal{O}$ . Caso  $\beta = 0$ , então  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$  e  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$ . Assim  $\{v_1, \dots, v_k\}$  é LD. Contradição. Caso  $\beta \neq 0$ , então  $u = -\beta^{-1}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) \in \langle X \rangle$ . Contradição.  $\square$

**Exercício 3.1.14.** Sejam  $X_1, X_2, \dots$  subconjuntos LI de um espaço vetorial  $E$ .

1. Caso são encaixados  $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ , prove que  $X = \bigcup X_n$  é LI.
2. Se cada  $X_n$  tem  $n$  elementos, prove que existe um conjunto LI  $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$  com  $x_j \in X_j$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ .
3. Supondo  $E = \mathbb{R}^\infty$  e as hipóteses em 1. e 2., é verdadeiro que  $X = \bigcup X_n$  seja uma base de  $E$ ?

### Corolários do Teorema 3.1.9

Nos corolários seguintes  $n \in N_0$ , particularmente é um número, assim finito.

**Corolário 3.1.15.**  $Y \subset E, |Y| > n := \dim E \Rightarrow Y$  LD.

*Demonstração.* Como  $\dim E = n$  existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $E$  com  $n$  elementos.  $\square$

**Lema 3.1.16.** *A dimensão de  $\mathbb{R}^\infty$  é infinito.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que é finita a dimensão  $k := \dim \mathbb{R}^\infty$ . Segundo Corolário 3.1.15 para  $Y = \mathcal{E}^\infty$  e  $E = \mathbb{R}^\infty$ , como  $|Y| = |\mathcal{E}^\infty| = \infty > k = \dim \mathbb{R}^\infty$ , segue que  $\mathcal{E}^\infty$  é LD em  $\mathbb{R}^\infty$ . Mas  $\mathcal{E}^\infty$  é LI em  $\mathbb{R}^\infty$  segundo Exercício 1.3.8. (Alternativamente, como  $\mathcal{E}^\infty$  é LI em  $\mathbb{R}_0^\infty$ ,  $\mathcal{E}^\infty$  deve ser LI em  $\mathbb{R}^\infty$  segundo parte c) do Lema 3.1.3.) Contradição.  $\square$

**Corolário 3.1.17.** *Se um conjunto  $Y$  é LI em  $E$ , então  $|Y| \leq \dim E$ .*

*Demonstração.* Caso  $\dim E = \infty$ : verdadeiro trivialmente. Caso  $\dim E < \infty$ : escolha para  $X$  em Corolário 3.1.10 uma base de  $E$  para obter  $|Y| \leq \dim E$ .  $\square$

**Corolário 3.1.18.** *Suponha  $X \subset E$  tem  $n := \dim E$  elementos, então*

$$X \text{ gera } E \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ é LI.}$$

*Demonstração.*  $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ . Assim  $X = \emptyset$ , ambos lados valem automaticamente.

$\mathbf{n} = \mathbf{1}$ . Assim  $X = \{v\}$  onde  $v \in E$ , ambos lados são equivalentes a  $v \neq \mathcal{O}$ .

$\mathbf{n} = \mathbf{2}$ . ' $\Rightarrow$ ' Suponha que  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  gera  $E$ . Por absurdo suponha que  $X$  é LD. Segundo Teorema 3.1.1 b) um elemento de  $X$ , dizemos  $v_n$ , é CL de outros elementos de  $X$ . Então  $E = \langle X \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ . Qualquer base  $\mathcal{B}$  de  $E$  tem  $n$  elementos pela hipótese  $n = \dim E$  – mais elementos como o conjunto  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  gerando  $E$ . Então  $\mathcal{B}$  é LD segundo Teorema 3.1.9. Contradição. ' $\Leftarrow$ ' Suponha que  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  é LI. Por absurdo suponha que  $X$  não gera  $E$ . Então existe  $u \in E$  não elemento de  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ . Assim o conjunto aumentado  $\{v_1, \dots, v_n, u\}$  é LI segundo Lema 3.1.13. Mas um subconjunto com mais elementos ( $n + 1$ ) como a dimensão ( $n$ ) é LD segundo Corolário 3.1.15. Contradição.  $\square$

**Corolário 3.1.19.** *Um subconjunto LI com  $n = \dim E$  elementos é uma base.*

*Demonstração.* Tal subconjunto LI gera  $E$  segundo Corolário 3.1.18 ' $\Leftarrow$ '.  $\square$

**Lema 3.1.20.** *Se um conjunto finito  $X$  gera  $E$ , então  $|X| \geq \dim E$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  gera  $E$ .

CASO  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  é LI: Então  $X$  é base e assim  $|X| = \dim E$ .

CASO  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  é LD: Assim  $X \neq \emptyset$ .

Subcaso  $m = 1$ : Então  $v_1 = \mathcal{O}$  e  $E = \langle v_1 \rangle = \{\mathcal{O}\}$ . Assim  $|X| = 1 > 0 = \dim E$ .

Subcaso  $m \geq 2$ : Como  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é LD, pelo menos um elemento, dizemos  $v_m$ , deve ser CL de outros. Iterando até chegamos num conjunto LI obtemos que

$$E = \langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_{m-1} \rangle = \dots = \langle v_1, \dots, v_\ell \rangle$$

onde  $\{v_1, \dots, v_\ell\}$  é LI e  $\ell \geq 1$ . Então  $\{v_1, \dots, v_\ell\} =: \mathcal{B}$  é base de  $E$  e assim  $|X| > \ell = |\mathcal{B}| =: \dim E$ .  $\square$

### 3.1.3 Escalonamento: Dimensão de um subespaço gerado

Aplicamos o processo de escalonar uma matriz  $\mathbf{a}$  – conteúdo do curso MA141 e revisado no Apêndice A.2 – para calcular a dimensão do subespaço gerado por  $m$  vetores.

Consideramos  $m$  vetores  $v_1, \dots, v_m$  do espaço vetorial  $\mathbb{K}^n$ . (No caso geral de um espaço vetorial  $E$  de dimensão  $n$  use uma base para chegar em  $\mathbb{K}^n \simeq E$ .) Escreve as  $m$  listas  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$  como linhas de uma matriz  $m \times n$ , ou seja

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \vdots \\ \leftarrow v_m \end{array}$$

Escalonamento da matriz  $\mathbf{a}$ , veja Seção A.2, lida à matriz escalonada  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ . Enumere as linhas não-nulas de  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  de cima para baixo, dizemos  $\ell_1, \dots, \ell_d$ .

$$a_{\text{esc}} = \begin{bmatrix} *1 & & & * & \\ & *2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & *d & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_d \end{matrix}$$

Figura 3.1: Linhas não-nulas  $\ell_1, \dots, \ell_d$  da matriz escalonada  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$

É fácil checar que estas linhas formam um conjunto LI, com efeito

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \dots + \alpha_d \ell_d = \begin{bmatrix} \alpha_1 *1 \\ \alpha_1 *1 + \alpha_2 *2 \\ \vdots \\ \dots \alpha_{d-1} *_{d-1} + \alpha_d *d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_d = 0 \end{matrix}$$

Então  $\{\ell_1, \dots, \ell_d\}$  é uma base do  $\text{Esp-lin}(\mathbf{a}_{\text{esc}})$ , qual ígual a  $\text{Esp-lin}(\mathbf{a})$  porque operações elementares não mudam o espaço linha, veja Teorema A.2.2. Então

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}) = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}_{\text{esc}}) \subset \mathbb{K}^n$$

é um subespaço com base as linhas não-nulas  $\{\ell_1, \dots, \ell_d\}$  da matriz  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ .

**Exercício 3.1.21.** Obtenha uma base para o subespaço  $F$  de  $\mathbb{R}^4$  gerado por

$$v_1 = (1, 2, 3, 4), \quad v_2 = (3, 4, 7, 10), \quad v_3 = (2, 1, 3, 5).$$

Determine a dimensão de  $F$ .

## 3.2 Existência e extensão

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $E$  da dimensão finita  $n \in \mathbb{N}_0$ .*

- (a) *Todo conjunto gerando  $E$  contém uma base de  $E$ . (Existência de bases)*
- (b) *Todo subconjunto LI é contido numa base de  $E$ . (Extensão de bases)*
- (c) *A dimensão de qualquer subespaço de  $E$  é  $\leq n$ . (Dimensão)*
- (d) *Um subespaço  $F$  de  $E$  da mesma dimensão  $n$  é igual a  $E$ .*

*Demonstração.* LI refere-se a  $E$  se não especificado diferente. **(a)** Suponha  $X$  gera  $E$ . Seja  $B \subset X$  qualquer subconjunto LI (existe como  $B = \emptyset$  mostra), então  $|B| \leq \dim E =: n$  segundo Corolário 3.1.17. Para  $k \in \mathbb{N}_0$  seja

$$\mathcal{C}_k := \{B \subset X \mid B \text{ é LI e } |B| = k\}$$

a família de todos os subconjuntos  $B \subset X$  os quais são LI e composto de  $k$  elementos. Seja  $B_* \subset X$  um subconjunto LI com o número máximo de elementos. Então  $B_* \in \mathcal{C}_\ell$  para um  $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Seja  $B_* = \{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$ . Considere as quatro inclusões (dois deles sendo igualdades)

$$E = \langle X \rangle \subset \langle \langle B_* \rangle \rangle = \langle B_* \rangle \subset E.$$

Consequentemente o conjunto LI  $B_*$  gera  $E$ , ou seja  $B_*$  é uma base. Resta justificar as quatro inclusões. INCLUSÃO 1. Pela hipótese  $X$  gera  $E$ .

INCLUSÃO 2. Parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica como  $X \subset \langle B_* \rangle$ : Suponha por absurdo que existe um vetor  $v \in X$  o qual não é CL em  $B_*$ , ou seja  $v \notin \langle B_* \rangle$ . Segundo Lema 3.1.13 o subconjunto aumentado  $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell, v\}$  de  $X$  ainda é LI, mas contem  $\ell + 1$  elementos, então mais como  $B_*$ . Contradição.

INCLUSÃO 3. Como  $\langle B_* \rangle$  é um subespaço parte (iii) de Lema 2.2.3 aplica.

INCLUSÃO 4. Como  $B_* \subset X \subset E$  parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica.

(b) Suponha  $X \subset E$  é um subconjunto LI. Como  $k := |X| \in \{0, \dots, n\}$ , veja Corolário 3.1.17, trata-se de um conjunto finito, ou seja  $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ . Subconjuntos  $B \subset E$  LI e contendo  $X$  (existem como  $B := X$  mostra) são compostos de  $\ell$  elementos para um  $\ell \in \{k, \dots, n\}$ . Seja  $B_*$  um tal subconjunto com o número máximo  $\ell_*$  de elementos. Então  $B_*$  é LI e contem  $X \subset B_*$ . Para  $B_*$  é uma base de  $E$ , resta mostrar que gera  $E$ , ou seja  $\langle B_* \rangle = E$ :

' $\subset$ ' trivial como  $B_* \subset E$ . ' $\supset$ ' Suponha por absurdo que existe um vetor  $u \in E$  o qual não pertence a  $\langle B_* \rangle$ , então o conjunto aumentado  $B_* \cup \{u\}$  é LI segundo Lema 3.1.13, contem  $X$  porque  $B_*$  contem  $X$  – mas tem mais elementos como  $B_*$ . Contradição.

(c) Suponha  $F$  é um subespaço de  $E$ . Seja  $B \subset F$  qualquer subconjunto LI em respeito a  $F$  (existe como  $B = \emptyset$  mostra). Note que  $B$  é LI em respeito a  $E$  segundo Lema 3.1.3 c). Assim  $|B| \leq n := \dim E$  segundo Corolário 3.1.17. Agora escolha um subconjunto  $B_* \subset F$  LI em respeito a  $F$  com o número máximo de elementos. Como temos visto  $k := |B_*| \leq \dim E =: n$ . Resta mostrar que  $B_*$  é uma base de  $F$  (neste caso  $\dim F = |B_*|$ ). Pela escolha  $B_*$  é LI em  $F$ , então basta mostrar  $\langle B_* \rangle = F$ :

' $\subset$ ' trivial como  $B_* \subset F$ . ' $\supset$ ' Suponha por absurdo que existe um vetor  $u \in F$  o qual não pertence a  $\langle B_* \rangle$ , então o conjunto aumentado  $B_* \cup \{u\}$  é LI em  $F$  segundo Lema 3.1.13 – mas tem mais elementos como  $B_*$ . Contradição.

(d) Seja  $F \subset E$  um subespaço de dimensão  $n := \dim E$ . Pela definição de dimensão existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $F$  com  $n$  elementos. Como  $\mathcal{B}$  é LI em respeito a  $F$ , é LI em respeito a  $E$  segundo Lema 3.1.3 c). Como além disso  $|\mathcal{B}| = n := \dim E$  o Corolário 3.1.18 diz que  $\mathcal{B}$  gera  $E$ . Então  $E = \langle \mathcal{B} \rangle = F$ , onde a segunda igualdade segue porque  $\mathcal{B}$  é base de  $F$ , então gera  $F$ .  $\square$

**Proposição 3.2.2.** *Seja  $F$  um espaço vetorial e  $F_1, F_2$  subespaços de dimensões finitas  $k, \ell$ . Então existe uma base finita  $\mathcal{B}$  do subespaço  $F_1 + F_2$  de  $F$  que contem uma base  $\mathcal{B}_1$  de  $F_1$ , uma base  $\mathcal{B}_2$  de  $F_2$ , e uma base  $\mathcal{B}_{12}$  de  $F_1 \cap F_2$ . Vale que*

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2). \quad (3.2.1)$$

*Demonstração.* Vamos denotar de (b),(c) as partes correspondentes do Teorema 3.2.1. O subespaço  $F_1 \cap F_2 \subset F_1$  tem dimensão finita  $m$  (segundo (c) para  $E = F_1$ ) e assim admite uma base finita  $\mathcal{B}_{12} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$  (segundo a definição de dimensão). Segundo (b) para  $E = F_1$  o conjunto  $\mathcal{B}_{12}$  – LI em  $F_1 \cap F_2$  e segundo Lema 3.1.3 LI no superespaço  $F_1$  – é contido numa base  $\mathcal{B}_1$  de  $F_1$ . Analogamente  $\mathcal{B}_{12}$  é contido numa base  $\mathcal{B}_2$  de  $F_2$ . Uma base de  $F_1 + F_2$  contendo as bases desejadas é

$$\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_{12}) \dot{\cup} \overbrace{\mathcal{B}_{12} \dot{\cup} (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12})}^{\mathcal{B}_2} = \mathcal{B}_1 \dot{\cup} (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12}) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2.$$

Contando elementos obtemos

$$\dim(F_1 + F_2) := |\mathcal{B}| = (k - m) + m + (\ell - m) = k + \ell - m.$$

Resta checar as duas propriedades de uma base.  $\mathcal{B}$  gera  $F_1 + F_2$ : Os elementos de  $F_1 + F_2$  são da forma  $f_1 + f_2$  onde  $f_1 \in F_1$  (assim é CL em  $\mathcal{B}_1$ ) e  $f_2 \in F_2$  (assim é CL em  $\mathcal{B}_2$ ). Consequentemente  $f_1 + f_2$  é CL em  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$ .  $\mathcal{B}$  é LI em  $F$ : Seja  $\mathcal{B}_1 = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  e  $\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12} = \{\eta_1, \dots, \eta_{\ell-m}\}$ . Suponha por absurdo que  $\mathcal{B}$  é LD, ou seja existem escalares  $\alpha_i, \beta_i$  não todos nulos tal que

$$\underbrace{\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k}_{=: -v_1} + \underbrace{\beta_1 \eta_1 + \dots + \beta_{\ell-m} \eta_{\ell-m}}_{=: v_1} = \mathcal{O}.$$

Não todos  $\beta_i$ 's são nulos (caso contrário  $\mathcal{B}_1$  é LD, contradição). Assim  $v_1 \in F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)$ . De outro lado  $-v_1$ , então  $v_1$ , é elemento do subespaço  $F_1$ . Assim  $v_1 \in (F_1 \cap F_2)$  e  $v_1 \notin (F_1 \cap F_2)$ . Contradição.  $\square$

**Corolário 3.2.3.** *Sejam  $F, G \subset E$  subespaços de dimensões finitas, então:*

$$F \oplus G = E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\mathcal{O}\} \end{cases}.$$

*Demonstração.* ' $\Rightarrow$ ' Fórmula (3.2.1) usando que a interseção tem dimensão zero. ' $\Leftarrow$ ' Suponha que  $F \cap G = \{\mathcal{O}\}$  e que as dimensões de  $F$  e  $G$  adicionam à dimensão de  $E$ . Segundo Lema 2.3.2 a soma  $F + G$  é um subespaço de  $E$ . Então  $F + G = E$  segundo Teorema 3.2.1 (d).  $\square$

**Exercício 3.2.4** (Subespaços do espaço  $M(n \times n)$  das matrizes quadradas). <sup>2</sup>

1. Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{S} \subset M(n \times n)$  os subespaços das matrizes anti-/simétricas.

- (a) Para cada par  $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$  seja  $\mathbf{e}_+^{ij}$  a matriz  $n \times n$  cujos elementos nas posições  $ij$  e  $ji$  são iguais a 1 e os demais são zero. Prove que estas matrizes constituem uma base  $\{\mathbf{e}_+^{ij}\}$  para  $\mathcal{S}$ .

<sup>2</sup> As dimensões para seu controle: 2.  $\dim \mathcal{T} = n(n+1)/2$

3. (a)  $2 \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = n^2 - 1$  (b)  $n(n-2) + n = n(n-1)$  (c)  $(n-1)^2 + n = n^2 - (n-1)$

- (b) De modo análogo, obtenha uma base  $\{\mathbf{e}_-^{ij}\}$  para  $\mathcal{A}$ .  
 (c) Conclua que

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (3.2.2)$$

Calcule  $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A}$  e lembre-se que  $\dim M(n \times n) = n^2$ . Conclua que

$$M(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

Antes, no Exercício 2.3.7, tenhamos obtido uma prova alternativa desse.

2. As matrizes quadradas  $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in M(n \times n)$  tal que  $t_{ij} = 0$  quando  $i < j$  chama-se **triangular inferior**. Prove que elas constituem um subespaço  $\mathcal{T} \subset M(n \times n)$ . Obtenha uma base para  $\mathcal{T}$  e determine a sua dimensão.
3. Obtenha uma base e consequentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de  $M(n \times n)$  as quais são composto de
  - (a) as matrizes  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  de **traço** (a soma dos elementos da diagonal)

$$\text{tr} : M(n \times n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \mapsto \text{tr } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

nulo, ou seja  $\text{tr } \mathbf{a} = 0$ ;

- (b) as matrizes cuja primeira e última linha são iguais;
- (c) as matrizes cuja primeira linha e primeira coluna são iguais.

Parte II

Teoria das transformações  
lineares 1



# Capítulo 4

## Transformações lineares

No<sup>1</sup> Capítulo 4 denotamos de  $E, F$  espaços vetoriais

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \quad F = (F, +, \cdot, \mathbb{K})$$

ambos sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ . Na primeira leitura pense em  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . As letras  $m, n$  denotam números naturais ou zero.

### 4.1 Exemplos e construção

**Definição 4.1.1.** Uma **transformação linear (TL)**, também chamado de **homomorfismo de espaços vetoriais** ou **operador linear**, é uma aplicação

$$A : E \rightarrow F, \quad v \mapsto A(v) =: Av$$

a qual preserva as operações em  $E$  e  $F$ , ou seja

$$\text{(Linearidade)} \quad \begin{cases} A(\alpha v) = \alpha Av \\ A(v + w) = Av + Aw \end{cases} \quad (4.1.1)$$

para todos os escalares  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todos os vetores  $v, w \in E$ . Note-se que nos lados esquerdos aparecem as operações em  $E$  e nos lados direitos aquelas em  $F$ .

Como indicado acima vamos escrever no caso de aplicações lineares geralmente  $Av$  em vez de  $A(v)$ . Assim  $Av$  já sinaliza que  $A$  é linear. Note-se que

$$\text{(Linearidade)} \quad \Leftrightarrow \quad A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E.$$

**Lema 4.1.2.** *Seja  $A : E \rightarrow F$  uma TL. Então*

- (i)  $A\mathcal{O} = \mathcal{O}$  *(leva o vetor nulo de  $E$  no vetor nulo de  $F$ )*
- (ii)  $A(-v) = -(Av)$  *(leva inversos em inversos)*

---

<sup>1</sup>Cap. 4 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

- (iii)  $A(u - v) = Au - Av$   
 (iv)  $A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 Av_1 + \cdots + \alpha_k Av_k$  (leva CLs em CLs)

para todos os vetores  $u, v, v_i \in E$  e escalares  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ .

*Demonstração.*

- (i)  $A\mathcal{O} = A(\mathcal{O} + \mathcal{O}) \stackrel{\text{linear}}{=} A\mathcal{O} + A\mathcal{O}$ , então  $A\mathcal{O} = \mathcal{O}$  segundo Lema 1.1.5 3b).  
 (ii)  $A(-v) + Av \stackrel{\text{linear}}{=} A(-v + v) = A\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}$ .  
 (iii)  $A(u - v) \stackrel{\text{linear}}{=} Au + A(-v) \stackrel{(ii)}{=} Au - Av$ .  
 (iv) Indução sobre  $k$  baseado na linearidade.  $\square$

**Exercício 4.1.3.** Considere os elementos de  $\mathbb{R}^2$  dados por

$$u_1 = (2, -1), \quad u_2 = (1, 1), \quad u_3 = (-1, -4),$$

e

$$v_1 = (1, 3), \quad v_2 = (2, 3), \quad v_3 = (5, 6).$$

Decida se existe ou não uma transformação linear  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$Au_1 = v_1, \quad Au_2 = v_2, \quad Au_3 = v_3.$$

**Solução.** Suponha que  $A$  é linear. Então escrevendo  $u_3$  como CL de  $u_1$  e  $u_2$ , ou seja  $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$ , o elemento  $v_3 = Au_3$  deve ser CL de  $v_1 = Au_1$  e  $v_2 = Au_2$  com os mesmos coeficientes. Com efeito

$$v_3 = Au_3 = A(\alpha u_1 + \beta u_2) \stackrel{\text{lin.}}{=} \alpha Au_1 + \beta Au_2 = \alpha v_1 + \beta v_2.$$

Então vamos checar se é verdadeiro isso: Determinamos  $\alpha$  e  $\beta$  primeiro

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \end{bmatrix}.$$

Comparando os primeiros membros obtemos  $\beta = -1 - 2\alpha$ . Use isso na comparação dos segundos membros para obter  $\alpha = \beta + 4 = -1 - 2\alpha + 4 = 3 - 2\alpha$ . Assim  $\alpha = 1$  e  $\beta = -3$ . Basta calcular

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = v_3.$$

Então não existe uma tal transformação linear  $A$ .

**Exercício 4.1.4.** Mesma pergunta como no Exercício 4.1.3 mas a) com  $v_3 = (-5, -6)$  e b) com  $v_3 = (5, -6)$ .

**Exemplo 4.1.5** (Derivação e convolução).

**(Derivação)** Seja  $k \in \mathbb{N}$  ou  $k = \infty$ , então é linear o operador derivada

$$D: C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f' := \frac{d}{dx} f.$$

**(Convolução)** Dada uma função contínua  $k: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , Seja  $k \in \mathbb{N}$  ou  $k = \infty$ , então é linear o operador definido por

$$K: C^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R}), \quad f \mapsto \int_a^b k(\cdot, y)f(y) dy.$$

No caso particular  $k(x, y) = g(x - y)$  onde  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma dada função contínua o operador  $K_g$  definido por

$$(K_g f)(x) := \int_a^b g(x - y)f(y) dy$$

é chamado de **convolução** das funções  $f$  e  $g$ , notação  $f * g := K_g f$ .

#### 4.1.1 O espaço vetorial das transformações lineares

**Definição 4.1.6** (O espaço vetorial  $\mathcal{L}(E, F)$ ). O conjunto

$$\mathcal{L}(E, F) := \{A \mid A: E \rightarrow F \text{ transformação linear}\}$$

de todas as transformações lineares entre  $E$  e  $F$  seja munido das operações

$$\begin{aligned} + : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) & \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ (A, B) &\mapsto A + B & (\alpha, A) &\mapsto \alpha A \end{aligned}$$

definidas assim  $(A + B)v := Av + Bv$  e  $(\alpha A)v := \alpha(Av)$ .

Note que  $A + B, \alpha A: E \rightarrow F$  realmente são lineares. Por exemplo, vale

$$(\alpha A)(v + w) \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha(A(v + w)) \stackrel{\text{lin.}}{=} \alpha(Av + Aw) \stackrel{\text{distr.}}{=} \alpha(Av) + \alpha(Aw)$$

e o lado direito é  $(\alpha A)v + (\alpha A)w$  pela definição de  $\alpha A$ .

**Lema 4.1.7.** *O conjunto  $\mathcal{L}(E, F)$  das transformações lineares de  $E$  para  $F$  munido das operações '+' e '\cdot' forma um espaço vetorial*

$$\mathcal{L}(E, F) = (\mathcal{L}(E, F), +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . O vetor nulo de  $\mathcal{L}(E, F)$  é a TL nula  $\mathcal{O}: E \rightarrow F, v \mapsto \mathcal{O}$ .<sup>2</sup>

*Demonstração.* Deixamos ao leitor verificar os axiomas na Definição 1.1.19.  $\square$

**Definição 4.1.8** (Operadores lineares em  $E$ ). No caso  $F = E$  os elementos de  $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$  são chamados de **operadores lineares em  $E$**  e o operador

$$I = I_E: E \rightarrow E, \quad v \mapsto v \tag{4.1.2}$$

é chamado de **operador identidade** em  $E$ .

<sup>2</sup> o primeiro  $\mathcal{O}$  é  $\mathcal{O}_{\mathcal{L}(E, F)}$  e o outro  $\mathcal{O}_F$ ; para legibilidade não escrevemos demais subscritos

### 4.1.2 Isomorfismos

Isomorfismo e inversa serão tratados com mais detalhes na Seção 6.4.

**Definição 4.1.9** (Isomorfismo). Um **isomorfismo** entre espaços vetoriais  $E$  e  $F$  é uma transformação linear (homomorfismo)  $T : E \rightarrow F$  tal que a aplicação

$$T : E \rightarrow F \text{ é bijetiva} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{injetiva} & :\Leftrightarrow Tu = Tv \Rightarrow u = v \\ \text{e} \\ \text{sobrejetiva} & :\Leftrightarrow \forall v \in F \exists u \in E : Tu = v \end{cases}$$

Se existe um isomorfismo entre  $E$  e  $F$  dizemos “ $E$  e  $F$  são **isomorfos**” e escrevemos  $E \simeq F$ , ou ainda  $E \stackrel{T}{\simeq} F$  para destacar quem é o isomorfismo.

**Definição 4.1.10** (Inversa). Uma transformação linear  $A : E \rightarrow F$  é chamado de **invertível** caso existe uma transformação linear  $B : F \rightarrow E$  tal que valem as duas condições  $AB = I_F$  e  $BA = I_E$ . Neste caso  $B$  é único e chamado **a inversa** de  $A$ , símbolo  $A^{-1} := B$ .

**Comentário 4.1.11.** Dado um isomorfismo  $T : E \rightarrow F$ , definimos a aplicação

$$S : F \rightarrow E, \quad f \mapsto v$$

onde  $v \in E$  é o único vetor tal que  $Tv = f$ ; encontraremos em (6.4.1). Pode checar que  $S$  é linear e bijetiva, ou seja um isomorfismo, e que  $S$  é a inversa de  $T$ .

A composição  $BA$  de dois isomorfismos é um isomorfismo e sua inversa é a composição das inversas – mas na ordem oposta

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}. \quad (4.1.3)$$

### 4.1.3 Construção de transformações lineares

Uma base **ordenada** é uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  cujos elementos são enumerados, alternativamente escreve-se na forma de uma lista ordenada  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

**Proposição 4.1.12.** *A fim de definir um homomorfismo  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  basta escolher as imagens de uma base (ordenada)  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$ :*

EXISTÊNCIA. *Escolha uma lista  $f := (f_1, \dots, f_n)$  de  $n := \dim E$  elementos  $f_j$  do contra-domínio  $F$ , repetições não excluídas, e defina*

$$A_f \xi_j := f_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (*_f)$$

*Então estende  $A_f$  ao  $E$  inteiro usando (Linearidade): Dado  $u \in E$ , exprime  $u$  em respeito à base  $\mathcal{B}$  na forma  $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j$  onde os escalares  $\alpha_j$  são únicas – são as chamadas coordenadas do vetor  $u$ , veja (3.1.1). Defina*

$$A_f u := \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \stackrel{(*_f)}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j A_f \xi_j. \quad (4.1.4)$$

UNICIDADE. *Se  $B \in \mathcal{L}(E, F)$  satisfaz  $(*_f)$ , levando os  $\xi_j$  nos  $f_j$ , então  $B = A_f$ .*

*Demonstração.* Deixamos ao leitor a tarefa simples de checar que  $A_f$  definido acima é linear, ou seja  $A_f \in \mathcal{L}(E, F)$ , e é unicamente determinado por  $(*_f)$ .  $\square$

Note-se que  $A_f$  não só depende da escolha dos elementos  $f_j$  de  $F$ , mas também da escolha da base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Por isso às vezes escrevemos

$$A_f^{\mathcal{B}} = A_f.$$

**Exercício 4.1.13.** Mostre: os membros da lista  $f = (f_1, \dots, f_n) \in F^{\times n}$

- a) são vetores LI  $\Leftrightarrow A_f$  é injetivo ;
- b) geram o espaço vetorial  $F$   $\Leftrightarrow A_f$  é sobrejetivo;
- c) formam uma base de  $F$   $\Leftrightarrow A_f$  é um isomorfismo (e  $\dim E = \dim F$ ).

**Teorema 4.1.14.** *Seja  $\dim F$  finita e  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base de  $E$ , então*

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_{\mathcal{B}} : F^{\times n} &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ f &\mapsto A_f \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

*é um isomorfismo. Lembre-se de  $(*_f)$  que  $A_f$  é determinado por  $A_f \xi_j := f_j$ .*

*Demonstração.* Segundo Proposição 4.1.12 é suficiente avaliar TLs numa base. LINEAR. Segue de  $A_{\alpha f + \beta g} \xi_j := (\alpha f + \beta g)_j = \alpha f_j + \beta g_j =: \alpha A_f \xi_j + \beta A_g \xi_j$ . INJETIVO. Suponha  $A_f = A_g$ . Então  $f_j := A_f \xi_j = A_g \xi_j := g_j$  para todos os  $j$ . SOBREJETIVO. Dado  $B \in \mathcal{L}(E, F)$ , defina  $f_j := B \xi_j, \forall j$ . Assim  $A_f = B$ .  $\square$

Lembre-se do Exercício 3.0.15 que  $\dim F^{\times n} = n \dim F$ . Vamos ver no futuro, em Corolário 6.4.9, que isomorfismos preservam dimensões – o que implica

**Corolário 4.1.15.**  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^{\times n} = \dim E \cdot \dim F$ .

**Exercício 4.1.16.** Mostre que  $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \dim M(m \times n)$ . Dado um corpo  $\mathbb{K}$ , então vale analogamente que  $\dim \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \dim M(m \times n; \mathbb{K})$ .

**Comentário 4.1.17** (Extensão de TLs). Suponha que em vez de uma base de  $E$  só temos um subconjunto LI  $\mathcal{U} \subset E$  de  $k$  elementos  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ , em particular  $k = |\mathcal{U}| \leq \dim E =: n$ . Note-se que  $\mathcal{U}$  é uma base do subespaço  $\langle \mathcal{U} \rangle$  gerado por  $\mathcal{U}$ . Seja  $f = (f_1, \dots, f_k) \in F^{\times k}$  uma lista com  $k := \dim \langle \mathcal{U} \rangle = |\mathcal{U}|$  membros. Proposição 4.1.12 diz que isso determina unicamente uma TL injetiva

$$A_f^{\mathcal{U}} : E \supset \langle \mathcal{U} \rangle \rightarrow F, \quad A_f^{\mathcal{U}} \xi_j := f_j \quad (j = 1, \dots, k).$$

Então existe uma transformação linear

$$A_f^{\tilde{\mathcal{U}}} : E \rightarrow F$$

extendendo  $A_f^{\mathcal{U}}$ , ou seja  $A_f^{\tilde{\mathcal{U}}}$  restrito a  $\langle \mathcal{U} \rangle$  é  $A_f^{\mathcal{U}}$ . Para construir a extensão

- 1) estende-se o conjunto LI  $\mathcal{U}$  a uma base  $\mathcal{B}$  de  $E$  usando o Teorema 3.2.1 (b) e
- 2) apensa-se à lista  $f$  mais  $n - k$  membros.

#### 4.1.4 O espaço dual

**Definição 4.1.18** (O espaço dual  $E^*$ ). No caso  $F = \mathbb{K}$  o espaço  $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  é chamado de **espaço dual** de  $E$ . Chama-se os elementos  $\phi \in E^*$  de **funcionais  $\mathbb{K}$ -lineares** em  $E$  ou, no caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , **funcionais lineares**.

**Definição 4.1.19** (A base dual  $\mathcal{B}^*$ ). Na dimensão finita uma base ordenada  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$  induz uma base de  $E^*$ ,<sup>3</sup> a chamada **base dual**  $\mathcal{B}^* := \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ . Como transformação linear, cada um membro  $\phi_i : E \rightarrow \mathbb{K}$  é determinado pelos valores numa base (Proposição 4.1.12) e a escolha seja essa

$$\phi_i(\xi_j) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad (4.1.6)$$

onde chama-se  $\delta_{ij}$  o **símbolo de Kronecker**. Equivalentemente

$$\phi_i(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n) := \alpha_i \quad (4.1.7)$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Note-se que  $\dim E = n = \dim E^*$ .

**Lema 4.1.20.** A base dual  $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  é base de  $E^*$  e  $\dim E^* = \dim E$ .

*Demonstração.* Bem definida: Deixamos ao leitor verificar que os membros  $\phi_i : E \rightarrow \mathbb{R}$  definidos por (4.1.7) são lineares. Gera: Dado  $\psi \in E^*$ , denotamos as imagens dos membros  $\xi_i$  da base  $\mathcal{B}$  de  $\beta_i := \psi \xi_i$ , então  $\beta_1 \phi_1 + \dots + \beta_n \phi_n = \psi$ . Com efeito, escrevendo  $E \ni v = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$  como CL na base  $\mathcal{B}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \psi(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n) \\ &= \alpha_1 \psi(\xi_1) + \dots + \alpha_n \psi(\xi_n) \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n \\ &= \phi_1(v) \beta_1 + \dots + \phi_n(v) \beta_n \\ &= (\beta_1 \phi_1 + \dots + \beta_n \phi_n) v. \end{aligned}$$

LI: Suponha que  $\beta_1 \phi_1 + \dots + \beta_n \phi_n = \mathcal{O}$ . Segundo (4.1.6), avaliando no vetor  $\xi_1$  obtemos  $\beta_1 = 0$ , avaliando em  $\xi_2, \dots, \xi_n$  obtemos  $\beta_2 = 0, \dots, \beta_n = 0$ .  $\square$

**Exercício 4.1.21.** A expressão geral de um funcional linear  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é

$$\phi(x, y, z) = ax + by + cz$$

onde  $a, b, c$  são números reais determinando  $\phi$ . Dados os elementos

$$u = (1, 2, 3), \quad v = (-1, 2, 3), \quad w = (1, -2, 3),$$

de  $\mathbb{R}^3$  determine  $a, b, c$  de tal modo que se tenha  $\phi u = 1$ ,  $\phi v = 0$  e  $\phi w = 0$ .<sup>4</sup>

<sup>3</sup> Errado na dimensão infinita. Porque? Relembre-se que CL's são somas *finitas*.

<sup>4</sup> A resposta para seu controle:  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{4}$ ,  $c = 0$ .

**Exemplo 4.1.22** (Funcionais lineares  $\varphi, \psi \in E^*$ ). Seja  $E = C^0([a, b])$  o espaço vetorial real<sup>5</sup> das funções contínuas  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neste intervalo.

**(Integração)** A função  $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x) dx$$

é linear e assim  $\varphi \in E^*$ .

**(Avaliação)** Dado um ponto  $x_0 \in [a, b]$ , a função  $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\psi(f) := f(x_0)$$

é linear e assim  $\psi \in E^*$ .

## 4.2 Matrizes

### Matrizes são transformações lineares

Para ver isso escolhemos uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$  e consideramos a aplicação

$$\mathbf{a}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad x \mapsto \mathbf{a}x$$

a qual leva uma lista  $x \in \mathbb{K}^n$  para a lista definida pelo produto matriz

$$\mathbf{a}x = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Lembrando a notação  $\mathbf{a}_{\bullet j}$  para colunas introduzido em (1.2.3), continuamos

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\bullet 1}} x_1 + \cdots + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\bullet n}} x_n =: (\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (4.2.1)$$

No último passo definimos uma nova notação a qual vai ser bem útil. O símbolo que usamos quer lembrar o produto matriz, para não precisamos memorizar mais uma fórmula. Na nova notação é fácil ver que  $\mathbf{a}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathbf{a}x + \beta \mathbf{a}y$  mostrando que  $\mathbf{a}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  é linear, então  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ .

<sup>5</sup> 'real' indica que o corpo são os números reais  $\mathbb{R}$

**Comentário 4.2.1** (Espaço-coluna e -linha). A imagem de uma matriz

$$\text{Im}(\mathbf{a}) := \{\mathbf{a}x \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \text{Esp-col}(\mathbf{a}) \subset \mathbb{K}^m, \quad \mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K}) \quad (4.2.2)$$

é igual ao espaço-coluna como (4.2.1) mostra. Como  $\text{Esp-col}(\mathbf{a})$  e  $\text{Esp-lin}(\mathbf{a})$  são fechados sob adição e multiplicação, são subespaços de  $\mathbb{K}^m$  e  $\mathbb{K}^n$ . As dimensões

$$\text{pc}(\mathbf{a}) := \dim \text{Esp-col}(\mathbf{a}) = \dim \text{Im}(\mathbf{a}), \quad \text{pl}(\mathbf{a}) := \dim \text{Esp-lin}(\mathbf{a}), \quad (4.2.3)$$

são chamadas de **posto-coluna** e **posto-linha** da matriz  $\mathbf{a}$ .

**Teorema 4.2.2** (Postos linha e coluna são iguais).  $\text{pl}(\mathbf{a}) = \text{pc}(\mathbf{a}) = \dim \text{Im}(\mathbf{a})$

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{a}$  uma matriz  $m \times n$ . '≤' Seja  $p := \text{pc}(\mathbf{a})$  a dimensão do espaço coluna e  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_p\}$  uma base ordenada dele. Usamos a notação

$$\xi_\ell = \begin{bmatrix} b_{1\ell} \\ \vdots \\ b_{m\ell} \end{bmatrix}$$

Assim cada uma coluna  $\mathbf{a}_{\bullet j}$  é CL em  $\mathcal{X}$  com coeficientes únicos  $c_{ij} \in \mathbb{K}$ , ou seja

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} =: \mathbf{a}_{\bullet j} = \xi_1 c_{1j} + \dots + \xi_p c_{pj} = \sum_{\ell=1}^p \xi_\ell c_{\ell j} = \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^p b_{1\ell} c_{\ell j} \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^p b_{m\ell} c_{\ell j} \end{bmatrix}$$

Isso mostra que a  $ij$ -ésima entrada da matriz  $\mathbf{a}$  é dada por

$$a_{ij} = \sum_{\ell=1}^p b_{i\ell} c_{\ell j}$$

Usamos esta fórmula para ver que a  $i$ -ésima linha

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i\bullet} &= [a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}] = \left[ \sum_{\ell=1}^p b_{i\ell} c_{\ell 1} \quad \dots \quad \sum_{\ell=1}^p b_{i\ell} c_{\ell n} \right] \\ &= \sum_{\ell=1}^p b_{i\ell} \underbrace{[c_{\ell 1} \quad \dots \quad c_{\ell n}]}_{=: \eta_\ell \in \text{Esp-lin}(\mathbf{a})} \end{aligned}$$

é CL das listas  $\eta_1, \dots, \eta_p$  de  $n$  escalares cada uma. Assim  $\text{Esp-lin}(\mathbf{a})$  é contido no subespaço  $Y$  gerado pelo conjunto  $\mathcal{Y} := \{\eta_k \mid k = 1, \dots, p\}$ . Note que  $\mathcal{Y}$  contém no máximo  $p$  elementos ( $< p$  no caso de dobros). Assim

$$\text{pl}(\mathbf{a}) := \dim \text{Esp-lin}(\mathbf{a}) \leq \dim Y \leq |\mathcal{Y}| \leq p =: \text{pc}(\mathbf{a})$$

A primeira desigualdade segue de Teorema 3.2.1 (c) e a segunda de Lema 3.1.20. '≥' Usando '≤' para a transposta obtemos  $\text{pc}(\mathbf{a}) = \text{pl}(\mathbf{a}^t) \leq \text{pc}(\mathbf{a}^t) = \text{pl}(\mathbf{a})$ .  $\square$

Acima temos verificado que cada uma matriz  $m \times n$  é uma transformação linear  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ . E vice versa?

Escreve as colunas de uma matriz  $\mathbf{a}$  como lista, ou seja  $f_{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n})$ . Agora considere o operador linear  $A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n}$  definido em (4.1.4) e defina a aplicação

$$M(m \times n; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad \mathbf{a} \mapsto A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n} \quad (4.2.4)$$

onde  $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$  é a base canônica de  $\mathbb{K}^n$ . Note que  $A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n} = \mathbf{a}$ , com efeito

$$A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n} e_i \stackrel{(*f_{\mathbf{a}})}{=} \mathbf{a}_{\bullet i} = \mathbf{a} e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

e então lembre-se de UNICIDADE em Proposição 4.1.12.

Como a aplicação  $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}$  é obviamente linear e injetivo, só falta sobrejetivo para ser um isomorfismo. Dado  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ , coloque as listas  $Ae_1, \dots, Ae_n \in \mathbb{K}^m$  como colunas de uma matriz, notação  $[A]$ .<sup>6</sup> O leitor pode verificar que esta matriz  $[A]$  é levado ao operador  $A$ , em símbolos  $A_{f_{[A]}}^{\mathcal{E}^n} = A$ . Isso prova sobrejetividade.<sup>7</sup> Deixa nos formalizar esta ideia no seguinte.

## Transformações lineares representadas como matrizes

Como temos visto acima uma transformação linear  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  corresponde naturalmente, utilizando as bases canônicas<sup>8</sup>

$$\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}, \quad \mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\},$$

a uma matriz  $[A] \in M(m \times n; \mathbb{K})$ . Com efeito, seja  $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m} \in M(m \times 1; \mathbb{K})$  o vetor coordenada do elemento  $Ae_i \in \mathbb{K}^m$ , veja (3.1.2). Usando estes vetores coordenadas como colunas de uma matriz obtém-se

$$[A] = [A]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m} := [[Ae_1]_{\mathcal{E}^m} \dots [Ae_n]_{\mathcal{E}^m}] \in M(m \times n; \mathbb{K})$$

chamado de **matriz da transformação linear  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  em respeito às bases canônicas**.

O caso geral de associar uma matriz  $\mathbf{a}$  a uma transformação linear  $A : E \rightarrow F$  entre espaços vetoriais munidos de bases ordenadas  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  e  $\mathcal{V} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$  vai ser investigado em grande detalhe na Seção 5. Sim, as colunas de esta matriz serão os vetores coordenadas (3.1.2), com efeito vamos definir

$$\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} := [[A\xi_1]_{\mathcal{V}} \dots [A\xi_n]_{\mathcal{V}}] \in M(m \times n; \mathbb{K}).$$

**Proposição 4.2.3.** *A aplicação entre espaços vetoriais definido por*

$$\begin{aligned} [\cdot] = [\cdot]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m} : \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) &\rightarrow M(m \times n; \mathbb{K}) \\ A &\mapsto [[Ae_1]_{\mathcal{E}^m} \dots [Ae_n]_{\mathcal{E}^m}] \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

*é um isomorfismo entre espaços vetoriais.*

<sup>6</sup> Verifique que os membros da lista  $Ae_i$  são as entradas do vetor coordenada  $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m}$ .

<sup>7</sup> Alternativamente, vamos ver em mais em frente que, como as dimensões são iguais e finito, injetividade de uma TL é equivalente a sobrejetividade (Corolário 6.5.2).

<sup>8</sup> Para evitar confusão usamos letras maiúsculas para os elementos de  $\mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\}$ .

*Demonstração.* Checar linearidade é rotina. *Injetivo.* Se as matrizes  $[A] = [B]$  são iguais, os vetores coordenadas  $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m} = [Be_i]_{\mathcal{E}^m}$  são iguais, e assim as imagens  $Ae_i = Be_i$  dos elementos da base são iguais. Assim  $A = B$  segundo unicidade em Proposição 4.1.12. *Sobrejetivo.* Dado uma matriz  $\mathbf{a}$ , então a matriz do operador  $A_{\mathbf{a}}^{\mathcal{E}^n}$ , veja (4.2.4), é  $\mathbf{a}$ .  $\square$

**Exercício 4.2.4.** Mostre que as entradas  $a_{ij}$  da matriz  $\mathbf{a} := [A]$  satisfazem

$$Ae_i = E_1 a_{1i} + \cdots + E_m a_{mi} =: \mathcal{E}^m \mathbf{a}_{\bullet i}$$

para cada um elemento  $e_i$  da base  $\mathcal{E}^n$  e onde  $\mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\}$ .

**Exemplo 4.2.5.** Seja  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  determinado por

$$A(1, 1) = (1, 2, 3) \quad \text{e} \quad A(-1, 1) = (1, 1, 1).$$

Pede-se a matriz  $\mathbf{a}$  de  $A$  relativamente às bases canônicas.

**Uma solução.** Denotamos de  $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$  e  $\mathcal{E}^3 = \{E_1, E_2, E_3\}$  as bases canônicas. Precisamos escrever  $Ae_1$  e  $Ae_2$  como CL's dos vetores  $E_1, E_2, E_3$  e colocar os coeficientes como colunas da matriz desejada. Sabemos que

$$A(1, 1) = (1, 2, 3) = (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3) = E_1 + 2E_2 + 3E_3$$

$$A(1, 1) = A((1, 0) + (0, 1)) = A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2$$

e

$$A(-1, 1) = (1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = E_1 + E_2 + E_3$$

$$A(-1, 1) = A((-1, 0) + (0, 1)) = A(-e_1 + e_2) = -Ae_1 + Ae_2.$$

Assim temos 2 equações lineares inhomogêneas para as 2 incógnitas  $x := Ae_1$  e  $y := Ae_2$ , com efeito

$$\begin{cases} x + y = E_1 + 2E_2 + 3E_3 \\ -x + y = E_1 + E_2 + E_3 \end{cases}.$$

Aplicamos escalonamento, adicionando a primeira equação para a segunda obtemos  $2y = 2E_1 + 3E_2 + 4E_3$  e assim a CL

$$y = E_1 + \frac{3}{2}E_2 + 2E_3$$

cujas coeficientes formam a **segunda** ( $y := Ae_2$ ) coluna da matriz  $\mathbf{a} := [A]$ . Use na primeira equação para receber os coeficientes da primeira coluna, ou seja

$$x = -y + (E_1 + 2E_2 + 4E_3) = 0E_1 + \frac{1}{2}E_2 + 1E_3.$$

Então a matriz é a seguinte

$$\mathbf{a} = [A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Com certeza, vai ter outros caminhos como resolver. Acima vemos um.

**Exercício 4.2.6.** Tem-se uma transformação linear  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que

$$A(1, 2) = (1, 1, 1, -1) \quad \text{e} \quad A(3, 4) = (1, 1, 1, 1).$$

Pede-se a matriz  $\mathbf{a}$  de  $A$  relativamente às bases canônicas.

**Exercício 4.2.7** (Vetores linha e coluna). a) Mostre que a matriz de um funcional linear  $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  é **uma linha** (matriz  $1 \times n$ ) da forma

$$[\varphi] = [\varphi e_1 \quad \dots \quad \varphi e_n].$$

b) Mostre que a matriz de uma reta no  $\mathbb{R}^n$  passando a origem, ou seja  $R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , é **uma coluna** (matriz  $n \times 1$ ) da forma

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

onde de  $R_1, \dots, R_n$  denotamos os  $n$  membros da lista  $R e_1 \in \mathbb{R}^n$  onde  $e_1 = (1)$ .

**Lema 4.2.8** (Na dimensão 1 operadores correspondem a escalares). *Seja  $\dim E = 1$  e  $A \in \mathcal{L}(E)$ , então existe um único escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  tal que o operador corresponde a multiplicação com  $\alpha$ , em símbolos  $A = \alpha I_E$ .*

*Demonstração.* Pegue um elemento não-nulo  $\xi \in E$ . Então  $\mathcal{B} := \{\xi\}$  é uma base de  $E$ : Com efeito é LI como  $\xi \neq \mathcal{O}$ , segundo Comentário 1.3.4 (ii), mas LI é equivalente a gera segundo Corolário 3.1.18. Como  $\mathcal{B}$  é base com um elemento só, todo elemento de  $E$  é uma CL em  $\{\xi\}$ , assim um múltiplo escalar de  $\xi$  com coeficiente único. Então  $E \ni A\xi = \alpha\xi$  para um único  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

Analogamente todo  $w \in E$  é da forma  $w = \lambda\xi$  para um único  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Segue que

$$Aw = A(\lambda\xi) = \lambda A\xi = \lambda(\alpha\xi) = (\lambda\alpha)\xi = (\alpha\lambda)\xi = \alpha(\lambda\xi) = \alpha w = \alpha I_E w$$

onde usamos vários axiomas do espaço vetorial. Isso prova que  $A = \alpha I_E$ .  $\square$

## 4.3 Dimensão dois – o plano

No plano  $\Pi$  queremos estudar três tipos elementares de transformações lineares, nomeadamente

- rotação  $R_\theta$  por um ângulo  $\theta$  em torno de um centro  $O$  no plano;
- projeção ortogonal  $P_L$  sobre uma reta  $L$  no plano;
- reflexão  $S_L$  em torno de uma reta  $L$  no plano.

Mas o plano  $\Pi$  é composto de pontos... Como pode-se dar  $\Pi$  a estrutura de um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$ ? Como pode-se adicionar pontos ou multiplicar por números? Não da.

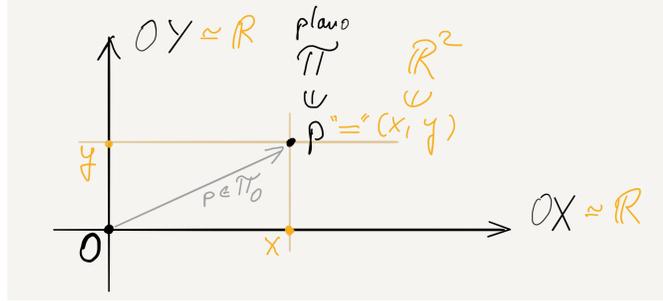


Figura 4.1: Sistema ortogonal de coordenadas  $OXY$  no plano  $\Pi$

Mas pode-se adicionar flechas  $v$  no plano se consideramos iguais todas as flechas do mesmo comprimento e direção, veja Exemplo 0.0.1. Mais detalhado duas flechas são consideradas iguais se formam os lados opostos de um paralelogramo no qual os outros dois lados conectam, respectivamente, os dois pontos iniciais e os dois pontos terminais. Multiplicação de uma flecha  $v$  com um número real  $\alpha$  muda o comprimento pelo fator  $\alpha$ , trocando a direção caso  $\alpha < 0$  é negativo. Adicionamos duas flechas pondo no ponto termino da primeira flecha o ponto inicial da segunda, veja Figura 1 na introdução do manuscrito.

**Definição 4.3.1** (O espaço vetorial  $\Pi_O$  das flechas no plano de ponto início  $O$ ). Para eliminar a complicação que, dado uma flecha  $v$ , todo ponto  $p \in \Pi$  nos dá uma flecha equivalente (escolhendo  $p$  como ponto início), vamos fixar um ponto do plano, notação  $O \in \Pi$ . Neste caso todo ponto  $p \in \Pi$  representa uma flecha só: por definição a flecha correndo de  $O$  a  $p$ . Vice versa, cada uma flecha em  $\Pi$  é equivalente a uma iniciando no ponto  $O$ . Seja

$$\Pi_O := (\Pi, O)$$

o conjunto das flechas no plano  $\Pi$  com ponto início  $O$ . Identificamos tal flecha com seu ponto termino  $p \in \Pi$ . Escrevendo  $p \in \Pi$  significa que  $p$  é um ponto do plano, escrevendo  $p \in \Pi_O$  significa que  $p$  é a flecha correndo de  $O$  a  $p$ . Para  $\Pi_O$  pode-se verificar os axiomas de um espaço vetorial real sob multiplicação escalar  $\alpha p$  definida como mudando o comprimento da flecha com ponto termino  $p$  pelo fator  $\alpha \in \mathbb{R}$  e adição  $p + q$  definida pelo paralelogramo gerado, veja Figura 4.3.

**Comentário 4.3.2.** Note-se que são em bijeção o conjunto  $\Pi_O$  das flechas no plano  $\Pi$  iniciando no ponto  $O$  e o conjunto  $F$  no Exemplo 0.0.1 cujos elementos são flechas  $v$  no plano junto com todas flechas equivalentes a  $v$ . Adição e multiplicação escalar coincidem. Assim os espaços vetoriais  $F$  e  $\Pi_O$  são isomorfos.

**Comentário 4.3.3** (Sistema de coordenadas Cartesianas  $OXY$ ). Escolhendo no plano  $\Pi$  dois eixos  $OX$  e  $OY$  ortogonal um ao outro, notação  $OXY$ , recebemos uma bijeção linear

$$\Pi_O \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto (x, y)$$

como definida em (0.0.1) e ilustrada na Figura 4.1. Tal escolha  $OXY$  é chamado de **sistema de coordenadas Cartesianas** ou **ortogonais**.

### 4.3.1 Rotações

Seja  $\Pi_O$  o plano  $\Pi$  junto com um ponto  $O \in \Pi$  fixado. Suponha que podemos medir distância no plano, assim ângulos – através de comprimento de arco – entre semi-retas do mesmo ponto inicial. Para os elementos  $p \in \Pi_O$  (pontos do plano interpretado simultaneamente como flecha de  $O$  ao ponto), denotamos de

- $C_p$  o círculo com centro  $O$  e passando  $p$ , veja Figura 4.2;
- $\ell_p$  a semi-reta iniciando em  $O$  e passando  $p$  (se  $p = O$  seja  $\ell_O := \{O\}$ );
- $\ell_p(\theta)$  a semi-reta obtida pela rotação de  $\ell_p$  em torno  $O$  pelo ângulo  $\theta$  no sentido contra-horário.

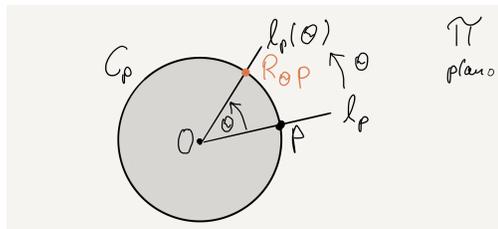


Figura 4.2: Rotação  $R_\theta$  no plano  $\Pi$  em torno do ponto  $O$  por um ângulo  $\theta$

**Definição 4.3.4** (Rotação). A aplicação definida por

$$R_\theta : \Pi_O \rightarrow \Pi_O, \quad p \mapsto \ell_p(\theta) \cap C_p$$

é chamado de **rotação** no plano  $\Pi$  em torno de  $O$  por o ângulo  $\theta$ .

**Comentário 4.3.5** (Preservação de comprimento e ângulos). Como o resultado da rotação é localizado no mesmo círculo a distância de  $O$  fica constante. O ângulo  $\varphi$  entre duas flechas  $p, q \in \Pi_O$  fica constante se aplicamos a rotação  $R_\theta$  pelo *mesmo* ângulo  $\theta$  em ambas flechas, veja Figura 4.3.

**Lema 4.3.6.** *Dado um ângulo  $\theta$ , a rotação  $R_\theta : \Pi_O \rightarrow \Pi_O$  é linear.*

*Demonstração.* Lembre que os elementos  $p \in \Pi_O$  são pontos do plano visto como flechas de  $O$  a  $p$ . O comprimento da flecha é a distância dos pontos  $p$  e  $O$ . Dado  $p$ , denotamos ambos, **comprimento da flecha** e **distância de  $O$** , com o símbolo  $|p|$ .

PRESERVAÇÃO DE COMPRIMENTO  $\Rightarrow$  MULTIPLICATIVO. Dado um ponto  $p$  e um

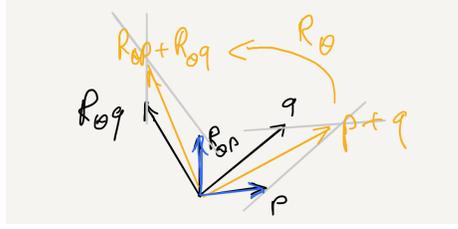


Figura 4.3: Preservação de ângulos

escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se  $p = O$  ou  $\alpha = 0$  temos  $R_\theta(\alpha p) = R_\theta(O) = O = \alpha R_\theta(p)$ . Seja então  $p \neq O$  e  $\alpha \neq 0$ . Segundo preservação de comprimento obtemos

$$\frac{|R_\theta(\alpha p)|}{|R_\theta(p)|} = \frac{|\alpha p|}{|p|} = \pm \alpha \quad \text{então} \quad |R_\theta(\alpha p)| = \pm \alpha |R_\theta(p)|$$

onde o sinal em  $+/- \alpha$  depende se  $\alpha$  é positivo/negativo.

Resta eliminar os absolutos. No caso  $\alpha > 0$  os pontos  $\alpha p$  e  $p$  estão na mesma semi-reta, mas rotação preserva esta propriedade, assim  $R_\theta(\alpha p) = \alpha R_\theta(p)$ . No caso  $\alpha < 0$  os pontos  $\alpha p$  e  $p$  estão em semi-retas opostas. Rotação também preserva esta propriedade, assim  $R_\theta(\alpha p)$  e  $R_\theta(p)$  são múltiplos negativos um do outro. Como  $|R_\theta(\alpha p)| = -\alpha |R_\theta(p)|$  segue que  $R_\theta(\alpha p) = \alpha R_\theta(p)$ .

**PRESERVAÇÃO DE ÂNGULOS  $\Rightarrow$  ADITIVO.** Dado pontos  $p, q$ , considere o paralelogramo definindo a soma  $p + q$ . Aplicando a rotação sabemos que  $R_\theta p$  e  $R_\theta q$  formam o mesmo ângulo como  $p$  e  $q$ . Então o paralelogramo gerado por  $R_\theta p$  e  $R_\theta q$  resulta daquele gerado por  $p$  e  $q$  através de aplicar  $R_\theta$ . Mas assim a diagonal  $R_\theta p + R_\theta q$  resulta de aplicar  $R_\theta$  à diagonal  $p + q$  do paralelogramo original, em símbolos  $R_\theta p + R_\theta q = R_\theta(p + q)$ .  $\square$

### A matriz da rotação num sistema ortogonal de coordenadas

Conforme a definição de eixo, veja Comentário 0.0.3, o vetor unitário no eixo  $OX$  é a flecha correndo de  $O$  ao ponto  $X$ , notação  $E_1$ . Analogamente denotamos de  $E_2$  o vetor unitário no eixo  $OY$ .

Por definição a matriz  $\mathbf{r}_\theta$  da rotação  $R_\theta$  em respeito à base  $\mathcal{E} := \{E_1, E_2\}$  contem como colunas os coeficientes (veja Figura 4.4) de

$$R_\theta E_1 = E_1 \cos \theta + E_2 \sin \theta, \quad R_\theta E_2 = -E_1 \sin \theta + E_2 \cos \theta.$$

**Lema 4.3.7.** *A matriz da rotação pelo ângulo  $\theta$  é a matriz real*

$$\mathbf{r}_\theta := [R_\theta]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (4.3.1)$$

Lembramos que o sistema ortogonal de coordenadas disponibiliza uma correspondência  $\Pi_O \simeq \mathbb{R}^2$  na qual a base  $\{E_1, E_2\}$  corresponde à base canônica  $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$ . Obviamente é mais confortável trabalhar com as listas de  $\mathbb{R}^2$  como com as flechas de  $\Pi_O$ . Assim vamos trabalhar no futuro com  $\mathbb{R}^2$ .

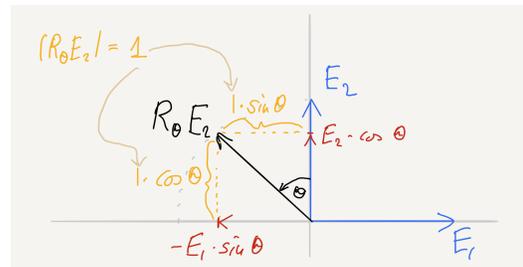


Figura 4.4: Rotação do vetor unitário – coeficientes formam coluna 2 da matriz

### 4.3.2 Projeção ortogonal sobre uma reta

Trabalhamos no plano identificado com  $\mathbb{R}^2$  mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

**Definição 4.3.8** (Projeção ortogonal). Seja  $a \in \mathbb{R}$  uma constante e seja  $L_a := \mathbb{R}(1, a)$  a reta no  $\mathbb{R}^2$  passando a origem  $\mathcal{O} = (0, 0)$  e o ponto  $(1, a)$  como ilustrado na Figura 4.5. Para um elemento  $v \in \mathbb{R}^2$  seja  $(L_a)_v^\perp$  a reta ortogonal a  $L_a$  e passando o ponto  $v$ . Então a aplicação que leva  $v$  à interseção das duas retas

$$P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto L_a \cap (L_a)_v^\perp \quad (4.3.2)$$

é chamado de **projeção ortogonal** sobre a reta  $L_a$ .

**Lema 4.3.9.** A projeção ortogonal  $P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é linear.

*Demonstração.* MULTIPLICATIVO. Similarmente como na prova de Lema 4.3.4 discrimina-se três casos  $\alpha < 0$ , ( $\alpha = 0$  ou  $v = \mathcal{O}$ ), e  $\alpha > 0$ . Vamos tratar o caso  $\alpha > 0$  e deixar os outros ao leitor. Para  $\alpha > 0$  e  $v \neq \mathcal{O}$  obtemos

$$\frac{|v|}{|Pv|} = \frac{|\alpha v|}{|P\alpha v|} = \frac{\alpha|v|}{|P\alpha v|}$$

onde temos usado o Teorema do Raio na primeira igualdade. Como  $|v| \neq 0$  segue, cortando  $|v|$ , que  $|P\alpha v| = \alpha|Pv|$ . Como  $P\alpha v$  e  $Pv$  são elementos da

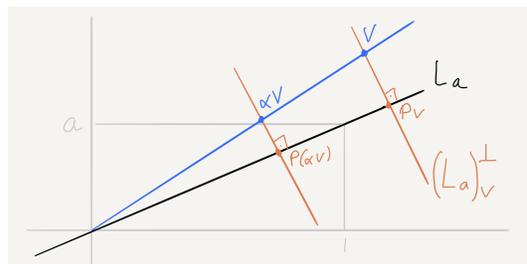


Figura 4.5: Projeção ortogonal  $P$  sobre a reta  $L_a$

mesma ( $\alpha > 0$ ) semi-reta de  $L_a$ , obtém-se  $P\alpha v = \alpha Pv$ .

ADITIVO. A identidade  $P(v + w) = Pv + Pw$  resulta da Figura 4.6.  $\square$

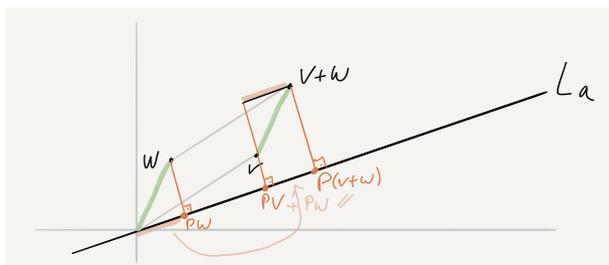


Figura 4.6: A identidade  $P(v + w) = Pv + Pw$

### A matriz da projeção ortogonal

Trabalhamos no plano identificado com  $\mathbb{R}^2$  mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

**Lema 4.3.10.** A matriz da projeção ortogonal sobre a reta  $L_a$  é dada por

$$\mathbf{p}_a := [P_{L_a}] = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix}.$$

*Demonstração.* Lema C.4.1  $\square$

### 4.3.3 Reflexão ortogonal em torno de uma reta

Trabalhamos no plano identificado com  $\mathbb{R}^2$  mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

**Definição 4.3.11** (Reflexão ortogonal). Dado  $a \in \mathbb{R}$ , a aplicação definida assim

$$\begin{aligned} S = S_{L_a} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto v + 2(P_{L_a}v - v) = (2P_{L_a} - I)v \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

é chamado de **reflexão** em torno da reta  $L_a$ . Note que  $S = 2P - I$  é linear.

Use Proposição 4.2.3 e a matriz de  $P$  para obter a **matriz da reflexão** em torno da reta  $L_a$ , com efeito

$$\mathbf{s}_a := [S_{L_a}] = [2P_{L_a} - I] = 2\mathbf{p}_a - \mathbf{1} = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -(1-a^2) \end{bmatrix}. \quad (4.3.4)$$

**Exercício 4.3.12** (Rotação, projeção, reflexão).

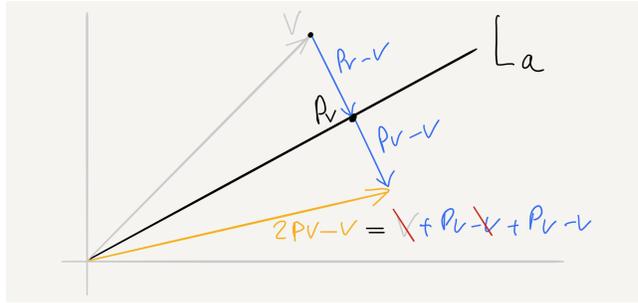


Figura 4.7: Reflexão  $S = 2P - I$  em torno da reta  $L_a$

- Sejam  $R, P, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  respectivamente a rotação de  $30^\circ$  em torno da origem, a projeção ortogonal sobre a reta  $y = \frac{1}{3}x$  (notação  $L_{\frac{1}{3}}$ ) e a reflexão em torno da mesma reta.  
 Dado o vetor  $v = (2, 5)$ , determine suas imagens  $Rv, Pv, Sv$ .
- Considere os operadores lineares  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$R = R_{30^\circ}, \quad S = S_{L_2}, \quad P = P_{L_2}.$$

- Mostre que se tem  $PS = SP = P$ .
  - Verifique a igualdade  $RSR = S$ .
  - Mostre que  $R$  não comuta com  $S$  nem com  $P$ .
  - Determine todos os vetores  $v$  tais que  $RPv = 0$  e também todos  $v$  tais que  $RPv \neq 0$ .
- Encontre  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que o operador

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$$

tenha como núcleo a reta  $y = 3x$ .

## 4.4 Ap.: Produto de transformações lineares

Sejam  $E, F, G, H$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ .

**Definição 4.4.1.** A composição de transformações lineares da forma

$$\circ : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \rightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ (A, B) \mapsto BA$$

onde  $BA := B \circ A$  é definido como  $v \mapsto B(Av)$ , é chamado de **produto de transformações lineares compatíveis**.

**Exercício 4.4.2** (Bem definido). Mostre que  $BA: E \rightarrow G$  é linear.

**Comentário 4.4.3** (Propriedades do produto “composição”). Para transformações lineares compatíveis  $A, B, C$  e escalares  $\alpha \in \mathbb{K}$  vale o seguinte.

(Associatividade)	$(CB)A = C(BA)$
(Distributividade à esquerda)	$(B + C)A = BA + CA$
(Distributividade à direita)	$C(A + B) = CA + CB$
(Elemento neutro da esq./dir.)	$I_F A = A = A I_E$
(Homogeneidade)	$B(\alpha A) = \alpha BA$

O produto de transformações lineares em  $E$ , ou seja

$$\circ: \mathcal{L}(E, E) \times \mathcal{L}(E, E) \rightarrow \mathcal{L}(E, E), \quad (A, B) \mapsto BA$$

generaliza o **produto de números**

observe que  $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (a, b) \mapsto ba = ab.$$

Enquanto umas propriedades úteis são perdidas, umas novas são ganhadas.

**Comentário 4.4.4** (Diferenças ao produto entre números).

(Comutatividade) <sup>9</sup>	$P_{L_1} R_{\pi/2} \neq R_{\pi/2} P_{L_1}$
(Lei da corte)	$P_{L_a} P_{L_a} = P_{L_a} = P_{L_a} I \not\neq P_{L_a} = I$
(Inverso multiplicativo) <sup>10</sup>	$\nexists Q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2): Q P_{L_a} = I$
(Nilpotentes)	$\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{0}$ mas $\mathbf{a}^2 = \mathbf{0}$
(Mais raízes)	$S := S_{L_a} \neq \pm I$ mas $S^2 := SS = I$

<sup>9</sup> Com  $v = (x, y)$  obtemos  $P_{L_1} R_{\pi/2} v = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - y \\ x - y \end{bmatrix} \neq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(x + y) \\ x + y \end{bmatrix} = R_{\pi/2} P_{L_1} v$ .

<sup>10</sup> Suponha por absurdo  $Q P_{L_a} = I$ . Então  $P_{L_a} = Q P_{L_a} P_{L_a} = Q P_{L_a} = I$ . Contradição.

## Capítulo 5

# Matrizes de transformações lineares

Na<sup>1</sup> dimensão *finita* consideramos uma transformação linear

$$A : E \rightarrow F$$

entre espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Denotamos o operador identidade de

$$I_E : E \rightarrow E, \quad v \mapsto v$$

e o em  $F$  de  $I_F$ , veja (4.1.2). Agora será muito útil escrever uma base ordenada na forma de uma lista ordenada. Sejam  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  e  $\tilde{\mathcal{U}}$  bases ordenadas de  $E$  e  $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  e  $\tilde{\mathcal{V}}$  de  $F$ . *Nas seguintes seções* vamos estabelecer e provar os detalhes da seguinte diagrama comutativo<sup>2</sup>

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}} & \mathbb{K}^m \\
 & & \downarrow \mathcal{U} & & \downarrow \mathcal{V} \\
 [v]_{\mathcal{U}} & & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\quad \mathcal{U} \quad} & E & \xrightarrow{\quad A \quad} & F & \xrightarrow{\quad \mathcal{V} \quad} & \mathbb{K}^m \\
 & & \downarrow \mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}} & & \downarrow \tilde{\mathcal{U}} & & \downarrow \tilde{\mathcal{V}} & & \downarrow \mathbf{q} := [I_F]_{\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}} \\
 \mathbf{p} [v]_{\mathcal{U}} = [v]_{\tilde{\mathcal{U}}} & & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\quad \tilde{\mathcal{U}} \quad} & E & \xrightarrow{\quad A \quad} & F & \xrightarrow{\quad \tilde{\mathcal{V}} \quad} & \mathbb{K}^m \\
 & & \downarrow \tilde{\mathcal{U}} & & \downarrow \tilde{\mathcal{V}} & & \downarrow \tilde{\mathcal{V}} & & \downarrow \tilde{\mathcal{V}} \\
 & & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\mathbf{\tilde{a}} := [A]_{\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{V}}}} & \mathbb{K}^m & & & & 
 \end{array} \quad (5.0.1)$$

No diagrama  $\mathbf{p}$  é a chamada **matriz de passagem** da base  $\mathcal{U}$  de  $E$  para  $\tilde{\mathcal{U}}$ . Ela leva, dado  $v \in E$ , o vetor coordenada  $[v]_{\mathcal{U}}$  em respeito à base  $\mathcal{U}$  ao vetor coordenada  $[v]_{\tilde{\mathcal{U}}}$  em respeito à base  $\tilde{\mathcal{U}}$ . Além disso  $\mathbf{a}$  é a **matriz da transformação linear**  $A : E \rightarrow F$  em respeito às bases  $\mathcal{U}$  do domínio e  $\mathcal{V}$  do contra-domínio.

<sup>1</sup>Cap. 5 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

<sup>2</sup>**Comutatividade** significa que caso entre dois espaços vetoriais no diagrama tem dois caminhos de flechas, então não importa o qual usamos. Note que a flecha de um isomorfismo ' $\simeq$ ' também existe na direção reversa (no diagrama só mostramos uma flecha para simplicidade).

**Comentário 5.0.5** (Interpretação da parte triangular esquerda do diagrama). Sejam  $\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}$ , e  $\mathcal{W}$  bases do espaço vetorial  $E$  da dimensão  $n$ . Sejam

- p**: a matriz de passagem de  $\mathcal{U}$  para  $\tilde{\mathcal{U}}$   
**r**: a matriz de passagem de  $\tilde{\mathcal{U}}$  para  $\mathcal{W}$

Vamos entender nesta seção que sob estas hipóteses vale o seguinte

- rp** é a matriz de passagem de  $\mathcal{U}$  para  $\mathcal{W}$   
**p**<sup>-1</sup> é a matriz de passagem de  $\tilde{\mathcal{U}}$  para  $\mathcal{U}$

## 5.1 Bases induzem isomorfismos

**Definição 5.1.1** (Um símbolo com duas significados). Usamos *o mesmo símbolo* para a base ordenada e para o isomorfismo determinado pela: Escrevemos

$$\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \rightarrow E, \quad x \mapsto \mathcal{U}x$$

para a transformação linear determinada pela base  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , ou seja

$$\mathcal{U}x := (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \underbrace{\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n}_{=v} \in E. \quad (5.1.1)$$

Obviamente a aplicação  $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \rightarrow E$  é linear. Ela é injetiva como a base  $\mathcal{U}$  é LI (Corolário 3.1.2) e sobrejetiva como  $\mathcal{B}$  gera  $E$ .

Portanto  $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \rightarrow E$  é um isomorfismo (símbolo  $\simeq$ ).

No caso  $E = \mathbb{K}^n$  a base canônica  $\mathcal{E}^n$  produz o operador identidade  $\mathcal{E}^n = I_{\mathbb{K}^n}$ .

Seja  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  uma base ordenada de  $E$ . Dado  $v \in E$ , então  $x := \mathcal{U}^{-1}v \in \mathbb{K}^n$  é o vetor coordenada  $[v]_{\mathcal{U}}$  de  $v$  em respeito à base  $\mathcal{U}$  introduzido em (3.1.2): Com efeito como  $\mathcal{B}$  é base exprime-se  $v$  como CL dos elementos de  $\mathcal{B}$  com coeficientes únicos  $x_i$ , ou seja  $v = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n =: \mathcal{U}x$ . Assim

$$\mathcal{U}^{-1}v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [v]_{\mathcal{U}} \in \mathbb{K}^n. \quad (5.1.2)$$

O isomorfismo  $\mathcal{U}^{-1} : E \rightarrow \mathbb{K}^n$  é chamado de **sistema de coordenadas** em  $E$ . No caso de  $E = \mathbb{K}^n$  com base canônica  $\mathcal{U} = \mathcal{E}$  abreviamos  $[v] := [v]_{\mathcal{E}}$ .

## 5.2 A matriz em respeito a uma base

Dado uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e bases  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  de  $E$  e  $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  de  $F$ , então podemos representar os elementos  $A\xi_j \in F$  como combinação linear na base  $\mathcal{V}$  com coeficientes  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  únicos. Com efeito

$$\boxed{A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj}.} \quad (5.2.1)$$

Note como pela nossa definição o índice do vetor  $\eta_i$  coincide com o primeiro (mais perto) índice do escalar  $a_{ij}$  o qual escrevemos *atrás* do vetor.

**Definição 5.2.1.** Os escalares  $a_{ij}$  definidos por (5.2.1) formam uma matriz  $m \times n$  chamada de **matriz de  $A$**  em respeito às bases  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ , símbolo

$$[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} := \mathbf{a} = [a_{ij}] := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (5.2.2)$$

No caso  $E = F$  e  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$  abreviamos  $[A]_{\mathcal{U}} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{U}}$ .

No caso  $E = F = \mathbb{K}^n$  e  $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{E}$  abreviamos  $[A] := [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$ .

**Comentário 5.2.2** (Colunas são os vetores coordenadas das imagens da base). Note-se que a matriz  $\mathbf{a}$  tem como colunas

$$\mathbf{a}_{\bullet, j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = [A\xi_j]_{\mathcal{V}}$$

os vetores coordenadas das imagens  $A\xi_j$ , ou seja

$$[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} = [[A\xi_1]_{\mathcal{V}} \dots [A\xi_n]_{\mathcal{V}}] = [\mathbf{a}_{\bullet, 1} \dots \mathbf{a}_{\bullet, n}] = \mathbf{a}.$$

**Exercício 5.2.3.** Seja  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$  a base canônica e  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  determinado por

$$\begin{aligned} Ae_1 &= 2e_1 - e_2 - e_3 \\ Ae_2 &= -e_1 + e_2 \\ Ae_3 &= -e_1 \quad + e_3. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Considere a base ordenada  $\mathcal{V} := (e_1, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$  e determine a matriz  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{V}}$ . (Vamos reencontrar  $A$  nos Exercícios 5.4.8 e 6.6.3.)

**Exercício 5.2.4** (Identidade  $I = I_E$ ). Mostre que a matriz da identidade

$$[I]_{\mathcal{U}} := [I]_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} = \mathbb{1} \quad (5.2.4)$$

sempre é a matriz identidade se usamos a mesma base  $\mathcal{U}$  para o domínio e o contra-domínio de  $I: E \rightarrow E$ .

**Exercício 5.2.5** (Homotetias  $\alpha I$ ). Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão  $n < \infty$ . Suponha que  $A \in \mathcal{L}(E)$  não seja um múltiplo do operador identidade:  $A \neq \alpha I$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Mostre que existem bases de  $E$  do tipo  $\mathcal{U} = (u, Au, \dots)$  e  $\mathcal{V} = (v, 2Av, \dots)$  tais que as matrizes  $[A]_{\mathcal{U}}$  e  $[A]_{\mathcal{V}}$  de  $A$  são diferentes.
2. Conclua que as **homotetias** (múltiplos  $\alpha I$  do operador identidade) são os únicos operadores cuja matriz não depende da base escolhida.
3. Conclua que as matrizes do tipo  $\alpha \mathbb{1}_n$  são os únicos que comutam (**ab = ba**) com todas matrizes invertíveis  $n \times n$ .

[ad 1.: Conclua  $n \geq 2$ . Mostre que existe conjunto LI da forma  $X = \{v, Av\}$ . Depois estenda  $X$  para receber uma base  $(\xi_1 = v, \xi_2 = Av, \dots, \xi_n)$  de  $E$ .]

**Exercício 5.2.6.** Suponha que  $E = F \oplus G$  e  $n = \dim E$  é finita. Mostre que existe uma base ordenada  $\mathcal{X}$  de  $E$  tal que veja (7.1.1) e (7.2.1)

$$[P_{F,G}]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathcal{O}_{k,\ell} \\ \mathcal{O}_{\ell,k} & \mathcal{O}_{\ell} \end{bmatrix}, \quad [S_{F,G}]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & -\mathbb{1}_{\ell} \end{bmatrix}.$$

**Teorema 5.2.7.** Levando transformações lineares às suas matrizes (5.2.2)

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_{\mathcal{U},\mathcal{V}} : \mathcal{L}(E, F) &\xrightarrow{\cong} M(m \times n; \mathbb{K}) \\ A &\mapsto [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

é um isomorfismo.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  base de  $E$  e  $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  de  $F$ .

LINEAR. Escreva (5.2.2) para  $A$ , para  $B$ , e depois adiciona as duas equações e use  $(A + B)\xi_j = A\xi_j + B\xi_j$ .

INJETIVO. Suponha  $(a_{ij}) := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = [B]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} =: (b_{ij})$ . Então  $A$  e  $B$  coincidem

$$A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj} = \eta_1 b_{1j} + \dots + \eta_m b_{mj} = B\xi_j$$

nos elementos de uma base e linearidade implica que coincidem em todo  $v \in E$ .

SOBREJETIVO. Dado  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$ , para cada um  $j$  defina

$$A\xi_j := \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj}.$$

Isso determina  $A$  unicamente (Prop. 4.1.12). Então  $\Psi(A) := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = \mathbf{a}$ .  $\square$

Lembre-se de Exemplo 3.0.13 (c) e de Comentário 3.0.14 que  $\dim M(m \times n; \mathbb{K}) = mn$ . Segundo Corolário 6.4.9 isomorfismos preservam dimensões, assim obtemos  $\dim \mathcal{L}(E, F)$ .

**Corolário 5.2.8.**  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim M(m \times n; \mathbb{K}) = mn = \dim E \cdot \dim F$ .

**Teorema 5.2.9.** *Considere duas transformações lineares entre espaços vetoriais*

$$E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G$$

com bases respectivas  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ , e  $\mathcal{W} = (\nu_1, \dots, \nu_p)$ . Então a matriz da composição

$$[BA]_{\mathcal{U}, \mathcal{W}} = [B]_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \quad (5.2.6)$$

é o produto das matrizes.

*Demonstração.* Sejam  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  as matrizes de  $A$  e  $B$ , seja  $\mathbf{c}$  aquela de  $BA$ . Assim

$$A\xi_j = \sum_{k=1}^m \eta_k a_{kj}, \quad B\eta_k = \sum_{i=1}^p \nu_i b_{ik}, \quad BA\xi_j = \sum_{i=1}^p \nu_i c_{ij},$$

para  $j = 1, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, m$ . Use estas identidades para obter

$$\sum_{i=1}^p \nu_i c_{ij} = B(A\xi_j) = \sum_{k=1}^m (B\eta_k) a_{kj} = \sum_{i=1}^p \nu_i \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}$$

onde no último passo temos permutado a ordem das somas *finitas*. Mas como a base  $\mathcal{W}$  é LI os coeficientes dos  $\nu_i$  devem ser iguais (Corolário 3.1.2).  $\square$

## 5.3 Mudança de base – diagrama comuta

Nesta seção no diagrama (5.0.1) estudamos o que acontece

5.3.1 com um vetor coordenada  $[v]_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1}v$  se trocamos a base  $\mathcal{U}$  de  $E$  para uma outra base  $\tilde{\mathcal{U}}$ ;

5.3.2 com a matriz de uma transformação linear onde adicionalmente permitimos trocar a base de  $F$ .

### 5.3.1 Vetor coordenada – parte triangular

A matriz  $\mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$  do operador identidade, por definição (5.2.1), satisfaz

$$\xi_j = I_E \xi_j \stackrel{(5.2.1)}{=} \tilde{\xi}_1 p_{1j} + \dots + \tilde{\xi}_n p_{nj} \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.3.1)$$

Nas outras palavras  $\mathbf{p}$  exprime os elementos da *base velha*  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  de  $E$  como combinação linear dos elementos da *base nova*  $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)$  de  $E$ . Por isso  $\mathbf{p}$  é chamado de **matriz de passagem de  $\mathcal{U}$  para  $\tilde{\mathcal{U}}$** . A matriz de passagem participa do diagrama (5.0.1) fazendo as partes triangulares comutativo (5.0.1).

**Lema 5.3.1.** *A parte triangular do diagrama (5.0.1) comuta, ou seja*

$$\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p} = \mathcal{U} \quad \text{ou equivalentemente} \quad [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}} = \tilde{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{U}.$$

*Demonstração.* Para  $x \in \mathbb{K}^n$  vale

$$\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p}x = \left( \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n \right) \begin{bmatrix} \sum_k p_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_k p_{nk}x_k \end{bmatrix} = \sum_{\ell} \tilde{\xi}_{\ell} \sum_k p_{\ell k}x_k = \sum_k \underbrace{\left( \sum_{\ell} \tilde{\xi}_{\ell} p_{\ell k} \right)}_{\stackrel{(5.3.1)}{=} \xi_k} x_k = \mathcal{U}x$$

□

**Corolário 5.3.2.** Matrizes de passagem  $[I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$  são isomorfismos com inversa

$$[I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}^{-1} = [I_E]_{\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}.$$

*Demonstração.* Aplicando  $\tilde{\mathcal{U}}^{-1}$  em ambos os lados de  $\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p} = \mathcal{U}$  obtém-se  $\tilde{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{U} = \mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$ . Como  $\mathcal{U}$  e  $\tilde{\mathcal{U}}$  são isomorfismos  $\mathbf{p}$  é (Coment. 4.1.11). Forma inversa em ambos lados, use (4.1.3), para obter  $[I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}^{-1} = \mathbf{p}^{-1} = \mathcal{U}^{-1}\tilde{\mathcal{U}} = [I_E]_{\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U}}$ . □

**Comentário 5.3.3** (Trocando a base (o sistema de coordenadas)). Seja  $v \in E$ . Dado o vetor coordenada  $[v]_{\mathcal{U}}$  em respeito a uma base  $\mathcal{U}$  de  $E$ . Para calcular as coordenadas em respeito a uma outra base  $\tilde{\mathcal{U}}$  simplesmente aplique a matriz de passagem  $\mathbf{p} = [I]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$ , ou seja

$$[I]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}[v]_{\mathcal{U}} = [v]_{\tilde{\mathcal{U}}}.$$

**Exercício 5.3.4.** Considere as bases  $\mathcal{U} = (\xi, \eta)$  e  $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$  de  $\mathbb{R}^2$  onde

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\eta} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Seja  $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ . Determine os vetores coordenadas  $[v]_{\mathcal{U}}$  e  $[v]_{\tilde{\mathcal{U}}}$ .<sup>3</sup>

### 5.3.2 Matriz de uma TL – parte trapézio

**Lema 5.3.5.** A parte trapézio do diagrama (5.0.1) comuta, ou seja

$$A\mathcal{U} = \mathcal{V}\mathbf{a}.$$

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathbb{K}^n$ , então

$$\begin{aligned} A\mathcal{U}x &= A(\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n) \\ &= \underbrace{(A\xi_1)}_{\eta_1 a_{11} + \dots + \eta_m a_{m1}} x_1 + \dots + \underbrace{(A\xi_n)}_{\eta_1 a_{1n} + \dots + \eta_m a_{mn}} x_n \\ &= \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{j1}) x_1 + \dots + \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{jm}) x_n \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Controle:  $[v]_{\tilde{\mathcal{U}}} = [I]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}[v]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{\tilde{\mathcal{U}}}$ ,  $\tilde{\mathcal{U}} = [I]_{\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U}}\mathcal{U}$

e assim

$$\begin{aligned}
 A\mathcal{U}x &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{jk}) x_k = \sum_{j=1}^m \eta_j \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k}_{\mathbf{a}_{j\bullet}x} \\
 &= \eta_1 \mathbf{a}_{1\bullet}x + \cdots + \eta_m \mathbf{a}_{m\bullet}x = (\eta_1, \dots, \eta_m) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet}x \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet}x \end{bmatrix} = \mathcal{V}\mathbf{a}x.
 \end{aligned}$$

□

Segundo às Lemas 5.3.5 e 5.3.1 o diagrama (5.0.1) é comutativo, e assim recebemos a relação

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{q}\mathbf{a}\mathbf{p}^{-1}$$

entre as matrizes de  $A$  em respeito às bases novas e velhas.

No caso  $F = E$  munido das bases  $\mathcal{V} = \mathcal{U}$  e  $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{U}}$  recebemos

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{p}\mathbf{a}\mathbf{p}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{a}} = [A]_{\tilde{\mathcal{U}}}, \quad \mathbf{a} = [A]_{\mathcal{U}}. \quad (5.3.2)$$

**Definição 5.3.6.** Chama-se **semelhante** duas matrizes quadradas  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  se existe uma matriz invertível  $\mathbf{p}$  tal que  $\mathbf{a} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{p}$ .

**Exercício 5.3.7.** Mostre que se  $\mathbf{a}$  e  $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p}$  são matrizes  $n \times n$  semelhantes, então existe  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\mathbf{a}$  e  $\tilde{\mathbf{a}}$  são matrizes de  $A$  relativamente a duas bases de  $\mathbb{R}^n$ .

**Caso especial  $E = F = \mathbb{K}^n$ : base canônica  $\mathcal{E}$  e base  $\mathcal{U}$**

Considere o caso de um operador linear  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  onde  $\mathbb{K}^n$  é munido originalmente da base canônica  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  e depois de uma base nova  $\mathcal{U}$ . Neste caso o diagrama (5.0.1) torna-se no diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\mathbf{a} := [A]} & \mathbb{K}^n \\
 \begin{array}{c} \downarrow \mathcal{E} = I_{\mathbb{K}^n} \\ \simeq \\ \downarrow \mathbf{p} := [I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{E}, \mathcal{U}} \\ \mathbb{K}^n \end{array} & \begin{array}{c} \searrow \mathcal{E} = I_{\mathbb{K}^n} \\ \mathbb{K}^n \xrightarrow{A} \mathbb{K}^n \\ \swarrow \mathcal{U} \\ \mathbb{K}^n \end{array} & \begin{array}{c} \mathbb{K}^n \\ \downarrow \mathcal{E} = I_{\mathbb{K}^n} \\ \mathbb{K}^n \\ \downarrow \mathbf{p} \\ \mathbb{K}^n \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \simeq \\ \mathcal{U} \\ \simeq \end{array} & \begin{array}{c} \simeq \\ \mathcal{U} \\ \simeq \end{array} \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{a}} := [A]_{\mathcal{U}}} & \mathbb{K}^n
 \end{array} \quad (5.3.3)$$

o qual disponibiliza a relação  $[A]_{\mathcal{U}} = \mathbf{p}[A]\mathbf{p}^{-1}$  entre as matrizes de  $A$  quando trocar a base canônica por qualquer outra base.

**Exercício 5.3.8.** Suponha que  $E = \mathbb{K}^n$  munido da base canônica  $\mathcal{E}$  como base velha, veja diagrama (5.3.3). Então os membros da base nova  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  formam as colunas da matriz inversa  $\mathbf{p}^{-1}$ . Veja Exercício 5.4.9.

Nas outras palavras, como a inversa de  $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{E}, \mathcal{U}}$  é  $[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{U}, \mathcal{E}}$ , vale a seguinte fórmula

$$\boxed{[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{U}, \mathcal{E}} = [\mathcal{U}]}$$

onde  $[\mathcal{U}]$  denota a matriz cujas colunas são os elementos da base  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{K}^n$ .

**Exemplo 5.3.9.** Dada em  $\mathbb{R}^3$  a base canônica  $\mathcal{E}$  e a base  $\mathcal{V} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$

$$\xi_1 = (1, 1, 0), \quad \xi_2 = (-1, 0, 0), \quad \xi_3 = (0, 0, 1).$$

Determine a matriz de passagem  $\mathbf{p}$  de  $\mathcal{V}$  para  $\mathcal{E}$ , e aquela vice versa.

**Uma solução.** As colunas da matriz  $\mathbf{p} := [I]_{\mathcal{V}, \mathcal{E}} = [\mathcal{V}]$  são os  $\xi_i$ 's. A outra matriz desejada  $\mathbf{q} := [I]_{\mathcal{E}, \mathcal{V}} = \mathbf{p}^{-1}$  é a matriz inversa de  $\mathbf{p}$ . Pode-se calcular com o processo de Gauss-Jordan (MA141), veja § A.4, ou seja

$$[\mathbf{p} : \mathbb{1}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{oe})} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbb{1} : \mathbf{p}^{-1}].$$

### 5.3.3 Determinante

Determinantes tem sua origem nos trabalhos de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716); veja [Koe85, Kap. 3 §7]. Em 1826 Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) apresentou determinantes ao público matemático geral no seu trabalho “De formatione et proprietatibus determinantium”. No Apêndice A.4.1 repetimos umas propriedades. Estende-se a definição do caso de matrizes quadradas

$$\det: M(n; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \mathbf{a} \mapsto \det \mathbf{a}$$

a transformações lineares simplesmente escolhe-se uma base ordenada qualquer.

**Definição 5.3.10** (Determinante). Para transformações lineares  $A$  define-se

$$\det: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}, \quad A \mapsto \det [A]_{\mathcal{B}} \quad (5.3.4)$$

onde  $\mathcal{B}$  é qualquer matriz ordenada de  $E$ .

**Exercício 5.3.11.** Mostre que para o determinante  $\det: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$  vale

- (i) bem definido (independente da escolha da base);
- (ii)  $\det AB = (\det A)(\det B) = \det BA$ ; multiplicativo
- (iii)  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ , onde  $n := \dim E$ .  $n$ -homogêneo

[Dica: Fórmula (5.3.2) e (A.4.2).]

### 5.3.4 Traço

**Definição 5.3.12** (Traço – matriz). O **traço** de uma matriz quadrada  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(n; \mathbb{K})$  é a soma dos elementos da diagonal. O **traço** como aplicação

$$\text{tr} = \text{tr}_n : M(n; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \mathbf{a} \mapsto \text{tr } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

é uma transformação linear entre espaços vetoriais.

**Lema 5.3.13** (Propriedades). Para o traço  $\text{tr} : M(n; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  vale

- a) linearidade; aditivo  
 b)  $\text{tr } \mathbf{c} = \text{tr } \mathbf{c}^t$ ;  $\Rightarrow$  axioma (SIM) do produto interno (10.3.1)

e para todas as matrizes  $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$  e  $\mathbf{b} \in M(n \times m; \mathbb{K})$  vale

- c)  $\text{tr}_m \mathbf{ab} = \text{tr}_n \mathbf{ba}$ ;  
 d)  $\text{tr}_n \mathbf{a}^t \mathbf{a} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (a_{ji})^2$ .  $\Rightarrow$  axioma (POS) do produto interno (10.3.1)

*Demonstração.* a) b) Óbvio. c) Pode-se trocar a ordem de somas finitas, assim

$$\text{tr } \mathbf{ab} := \sum_{i=1}^m (\mathbf{ab})_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{ij} b_{ji}}_{=b_{ji} a_{ij}} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ji} a_{ij} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{ba})_{jj} =: \text{tr } \mathbf{ba}.$$

- d)  $\text{tr } \mathbf{a}^t \mathbf{a} := \sum_i (\mathbf{a}^t \mathbf{a})_{ii} = \sum_i \sum_j (a^t)_{ij} a_{ji} = \sum_{i,j} (a_{ji})^2$  usando  $(a^t)_{ij} = a_{ji}$ .  $\square$

**Exercício 5.3.14.** Dada matrizes  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M(m \times n; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ . Seja  $\ell_{\mathbf{a}} \in \mathbb{K}^{mn}$  a lista ordenada cujos membros são as entradas das linhas da matriz.<sup>4</sup> Mostre

$$\text{tr } \mathbf{a}^t \mathbf{b} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ji} b_{ji} = \sum_{k=1}^{n^2} (\ell_{\mathbf{a}})_k (\ell_{\mathbf{b}})_k =: \langle \ell_{\mathbf{a}}, \ell_{\mathbf{b}} \rangle_{\mathbb{K}^{n^2}}. \quad (5.3.5)$$

**Definição 5.3.15** (Traço). O **traço** como aplicação

$$\text{tr} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}, \quad A \mapsto \text{tr } [A]_{\mathcal{B}} \quad (5.3.6)$$

é uma transformação linear entre espaços vetoriais onde  $\mathcal{B}$  é qualquer base ordenada de  $E$ .

**Exercício 5.3.16.** Mostre que para o traço  $\text{tr} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$  vale

- (i) bem definido (independente da escolha da base);  
 (ii) linearidade; aditivo  
 (iii)  $\text{tr } AB = \text{tr } BA$ .

[Dica: Fórmula (5.3.2) e Lema 5.3.13 c).]

<sup>4</sup>  $\ell_{\mathbf{a}} = (\underbrace{a_{11}, \dots, a_{1n}}_{\mathbf{a}_{1\bullet}}, \underbrace{a_{21}, \dots, a_{2n}}_{\mathbf{a}_{2\bullet}}, \dots, \underbrace{a_{m1}, \dots, a_{mn}}_{\mathbf{a}_{m\bullet}})$

## 5.4 Exercícios e umas soluções

### Matriz de uma transformação linear

**Exercício 5.4.1.** Considere a base ordenada  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  de  $\mathbb{R}^3$ , onde

$$u = (1, 1, 1), \quad v = (1, -1, 1), \quad w = (1, 1, -1).$$

Seja  $\mathcal{B}^* = (\phi, \psi, \chi)$  a base (de  $\mathbb{R}^{3*}$ ) dual de  $\mathcal{B}$ ; veja Definição 4.1.19. Calcule as matrizes  $[\phi], [\psi], [\chi]$  das transformações lineares  $\phi, \psi, \chi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Uma solução.** Sejam  $\mathcal{E}^3 = (e_1, e_2, e_3)$  e  $\mathcal{E}^1 = (E_1)$  as bases canônicas onde o vetor unitário em  $\mathbb{R}^1$  é a lista  $E_1 = (1)$  de um membro com 1 no 1-ésimo lugar (e nulos nos outros lugares – as quais não têm). Seja  $x_i := \phi e_i$ , então usando a propriedade da base dual e linearidade obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \phi u = \phi(1, 1, 1) = \phi e_1 + \phi e_2 + \phi e_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 &= \phi v = \phi(1, -1, 1) = \phi e_1 - \phi e_2 + \phi e_3 = x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 &= \phi w = \phi(1, 1, -1) = \phi e_1 + \phi e_2 - \phi e_3 = x_1 + x_2 - x_3. \end{aligned}$$

Usamos escalonamento para resolver o SL de 3 equações nas 3 incógnitas  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$  as quais são listas de um membro só. O resultado é

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Observamos que

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 = \phi e_1 = E_1 \phi_{11} = 1 \cdot \phi_{11} = \phi_{11} \\ 0 &= x_2 = \phi e_2 = E_1 \phi_{12} = 1 \cdot \phi_{12} = \phi_{12} \\ 0 &= x_3 = \phi e_3 = E_1 \phi_{13} = 1 \cdot \phi_{13} = \phi_{13} \end{aligned}$$

e assim

$$[\phi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analogamente obtemos

$$[\psi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\chi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Olha só, no caso  $E = \mathbb{R}^n$  a matriz da base dual de qualquer base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  tem em respeito às bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^1$  a forma da base canônica.

**Exercício 5.4.2.** Considere as transformações lineares

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, x + y)$$

e  $B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido assim

$$B(x, y, z) = (ax + (a - 1)y + (1 - a)z, -bx + (1 - b)y + bz)$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  são constantes. Determine o operador  $BA \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ .

[Dica: Use as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  que correspondem a  $A$  e  $B$  respectivamente.]

**Uma solução.** Denotamos de  $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$  e  $\mathcal{E}^3 = \{E_1, E_2, E_3\}$  as bases canônicas. As duas colunas da matriz  $[A] \in M(3 \times 2)$  são formadas das coeficientes seguintes

$$\begin{aligned} Ae_1 &= A(1, 0) = (1, 0, 1) = 1E_1 + 0E_2 + 1E_3 \\ Ae_2 &= A(0, 1) = (0, 1, 1) = 0E_1 + 1E_2 + 1E_3. \end{aligned}$$

As três colunas da matriz  $[B] \in M(2 \times 3)$  são formadas das coeficientes seguintes

$$\begin{aligned} BE_1 &= B(1, 0, 0) = (a, -b) = ae_1 - be_2 \\ BE_2 &= B(0, 1, 0) = (a-1, 1-b) = (a-1)e_1 + (1-b)e_2 \\ BE_3 &= B(0, 0, 1) = (1-a, b) = (1-a)e_1 + be_2. \end{aligned}$$

Assim recebemos

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} a & a-1 & 1-a \\ -b & 1-b & b \end{bmatrix}.$$

Use (5.2.6) no primeiro passo e no segundo calcule produto matriz para obter

$$[BA] = [B][A] = \begin{bmatrix} a+1-a & a-1+1-a \\ -b+b & 1-b+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2.$$

Use a relação (5.2.1) entre matriz e operador para concluir que  $BA = I_{\mathbb{R}^2}$ .

**Exercício 5.4.3.** Qual é a matriz  $[A]$  do operador  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$A(2, 3) = (2, 3) \quad \text{e} \quad A(-3, 2) = (0, 0) ?$$

**Exercício 5.4.4.** Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \quad (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n,$$

e

$$B : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad p \mapsto (p(0), p(1), \dots, p(n)).$$

Determina a matriz  $[BA]$  da composição  $BA : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Uma solução.** Seja  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{n+1})$  a base canônica e seja

$$\mathcal{M} = (x^0, x, x^2, \dots, x^n) =: (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}), \quad x^0 := 1$$

a base de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  composto de monômios. Segundo a definição de  $A$  recebemos

$$Ae_i = A(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 0x^0 + \dots + 0x^{i-1} + 1x^i + 0x^{i+1} + \dots + 0x^n$$

para  $i = 1, \dots, n+1$ . Segundo (5.2.1) obtemos  $[A]_{\mathcal{E}, \mathcal{M}} = \mathbb{I}_{n+1}$ . Analogamente

$$B\eta_i = (\eta_i(0), \eta_i(1), \dots, \eta_i(n)) = (0^{i-1}, 1^{i-1}, \dots, n^{i-1}) = \sum_{j=1}^{n+1} e_j \underbrace{(j-1)^{i-1}}_{b_{ji}}$$

para cada  $i = 1, \dots, n+1$  o que nos dá a  $i$ -ésima coluna da matriz

$$[B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0^0 & 0^1 & \dots & 0^n \\ 1^0 & 1^1 & \dots & 1^n \\ 2^0 & 2^1 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n^0 & n^1 & \dots & n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & n & \dots & n^n \end{bmatrix}.$$

Assim  $[B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} = [B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} \mathbb{1}_{n+1} = [B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{M}} = [BA]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$  segundo (5.2.6).

**Exercício 5.4.5.** Dado  $w = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ , determine a matriz  $[A]$  do operador<sup>5</sup>

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto v \times w.$$

Descreva geometricamente o núcleo desse operador e determina sua imagem.

### Mudança de base – vetor

**Exercício 5.4.6.** Considere as duas bases ordenadas de  $\mathbb{R}^2$  da forma

$$\mathcal{U} := ((1, 1), (-1, 1)), \quad \tilde{\mathcal{U}} := ((1, 0), (1, 1)).$$

Dado o vetor  $v = (1, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$ , calcule seus vetores coordenadas  $[v]_{\mathcal{U}}$  e  $[v]_{\tilde{\mathcal{U}}}$ . Calcule a matriz de passagem  $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$  e verifique que  $\mathbf{p}[v]_{\mathcal{U}}$  iguale  $[v]_{\tilde{\mathcal{U}}}$ .

**Exercício 5.4.7.** No  $\mathbb{R}^2$  considere a base  $\mathcal{U} := ((1, 1), (1, 0))$ .

a) Calcule o vetor coordenada  $[v]_{\mathcal{U}}$ .

b) Determine a matriz  $\mathbf{p}$  de passagem de  $\mathcal{U}$  à base canônica  $\mathcal{E}$ , e vice versa.

### Mudança de base – matriz

**Exercício 5.4.8.** Seja  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$  a base canônica e seja  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  determinado por (5.2.3). Dada a base ordenada  $\mathcal{V} := (e_1, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$ , determine a matriz

$$\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{V}} = [I]_{\mathcal{E}, \mathcal{V}} [A]_{\mathcal{V}, \mathcal{E}} [I]_{\mathcal{E}, \mathcal{V}} = \mathbf{p} \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{p}$$

calculando  $\mathbf{p}$  e  $\tilde{\mathbf{a}}$ , veja (5.0.1).<sup>6</sup>

Reencontramos  $A$  nos Excs. 5.2.3 e 6.6.3.

**Exercício 5.4.9.** Seja  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Suponha vetores  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$  e escalares  $p_{ij} \in \mathbb{R}$  satisfazem

$$e_j = \xi_1 p_{1j} + \xi_2 p_{2j} + \dots + \xi_n p_{nj}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Mostre que

<sup>5</sup> O **produto vetorial** de dois vetores  $v$  e  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  é o vetor  $v \times w$  de  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$v \times w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} y\gamma - z\beta \\ -(x\gamma - z\alpha) \\ x\beta - y\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\gamma - z\beta \\ z\alpha - x\gamma \\ x\beta - y\alpha \end{bmatrix}.$$

<sup>6</sup> controle: inverta  $\mathbf{q} = [I]_{\mathcal{V}, \mathcal{E}}$  (Gauss-Jordan):  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. a lista ordenada  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$ ;
2. a matriz  $\mathbf{p} = [p_{ij}]$  é a inversa da matriz  $\mathbf{q}$  cujas colunas são por definição  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , em símbolos  $\mathbf{q}\mathbf{p} = \mathbb{1}_n$ . Veja Exercício 5.3.8.

Em palavras, obtém-se a matriz  $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E}, \mathcal{U}}$  de mudança da base canônica  $\mathcal{E}$  para uma base nova  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  como a matriz inversa da matriz

$$\mathbf{q} := [\xi_1 \dots \xi_n]$$

cujas colunas são os  $\xi_i$ 's, em símbolos

$$\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E}, (\xi_1, \dots, \xi_n)} = \mathbf{q}^{-1} = [\xi_1 \dots \xi_n]^{-1}.$$

**Exercício 5.4.10** (Continuação de Exercício 1.3.9). Seja  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  o espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{C}$  composto de todas as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Em Exercício 1.3.9 temos definido dois subconjuntos  $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$  e  $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$  e temos mostrado, primeiro, que cada um é LI e, segundo, que cada um elemento de um dos dois subconjuntos pode ser escrito como CL dos elementos do outro.

- (a) Mostre que os subespaços gerados  $F := \langle \mathcal{F} \rangle$  e  $G := \langle \mathcal{G} \rangle$  são iguais.
- (b) Conclua que  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  são bases do subespaço  $F$  de  $E$ .
- (c) Determine a matriz de passagem  $\mathbf{p} := [I_F]_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$  da base  $\mathcal{F}$  para a base  $\mathcal{G}$ . (Outros autores usam a notação  $\mathbf{p} = I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$ .)

**Exercício 5.4.11.**

Seja  $\mathbf{c} \in M(n \times n; \mathbb{K})$  uma matriz quadrada de posto 1.

- (a) Prove que:  $\mathbf{c}^2 = (\text{tr } \mathbf{c})\mathbf{c}$ . (\*)
- (b) Dado  $n \geq 2$ , generalize:  $\mathbf{c}^n = (\text{tr } \mathbf{c})^{n-1}\mathbf{c}$ .

[ad (a): O traço é invariante sob mudar a base (Lema 5.3.13 c) implica isso). Assim para provar (\*) pode-se mudar a base de  $\mathbb{K}^n$  e provar (\*) para a nova matriz  $\tilde{\mathbf{c}}$ . Lembre-se:  $\text{posto}(\mathbf{c}) = 1$ .]

**Exercício 5.4.12.** Sejam  $A : E \rightarrow F$  e  $B : F \rightarrow G$  transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita.

1. Prove que:  $B$  injetiva  $\Rightarrow \text{posto}(BA) = \text{posto}(A)$ .
2. Encontre uma condição sobre  $A$  a qual implica  $\text{posto}(BA) = \text{posto}(B)$ .



## Capítulo 6

# Núcleo e imagem

No<sup>1</sup> Capítulo 6 denotamos de  $E, F$  espaços vetoriais

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \quad F = (F, +, \cdot, \mathbb{K})$$

ambos sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ , e denotamos de  $A: E \rightarrow F$  uma transformação linear. Na primeira leitura pense em  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . As letras  $m, n$  denotam números naturais ou zero.

O primeiro objetivo no Capítulo 6 é associar a uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  dois subespaços

$$N(A) \subset E \xrightarrow{A} F \supset \text{Im}(A)$$

e relacionar seu tamanho mínimo/máximo a injetividade/sobrejetividade de  $A$ .

Outros resultados fundamentais são os seguintes: Uma transformação linear  $A$  é injetiva se e somente se leva conjuntos LI em conjuntos LI. Sobrejetividade é equivalente à existência de uma inversa à direita e injetividade à existência de uma inversa à esquerda.

**Definição 6.0.13.** Dado uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  chamamos

$$N(A) := \{v \in E \mid Av = \mathcal{O}\} \text{ o } \mathbf{núcleo} \text{ de } A \text{ e}$$

$$\text{Im}(A) := \{Av \mid v \in E\} \text{ a } \mathbf{imagem} \text{ de } A.$$

Dado um subconjunto  $X \subset E$ , seja  $AX := \{Ax \mid x \in X\}$  a imagem de  $X$  sob  $A$ .

**Lema 6.0.14.** *Os subconjuntos  $N(A) \subset E$  e  $\text{Im}(A) \subset F$  são subespaços.*

*Demonstração.* “ $\text{Im}(A)$  fechado sob  $+$ ”: Dado dois elementos da imagem, ou seja  $Av$  e  $Aw$  onde  $v, w \in E$ , então de linearidade  $Av + Aw = A(v + w) \in \text{Im}(A)$ . “ $\text{Im}(A)$  fechado sob  $\cdot$ ”: Se  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $Av \in \text{Im}(A)$ , então  $\alpha Av = A(\alpha v) \in \text{Im}(A)$ . Deixamos ao leitor provar que  $N(A)$  é fechado sob  $\cdot$  e  $+$ .  $\square$

<sup>1</sup>Cap. 6 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

**Definição 6.0.15** (Posto). A dimensão da imagem é chamado de **posto de uma transformação linear**  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , em símbolos

$$\text{posto}(A) := \dim \text{Im}(A).$$

**Lema 6.0.16** (Os dois subespaços naturais – mínimo e máximo). *Para uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  injetividade e sobrejetividade correspondem a*

- (i)  $N(A) = \{\mathcal{O}\} \Leftrightarrow A$  é injetivo.
- (ii)  $\text{Im}(A) = F \Leftrightarrow A$  é sobrejetivo.

*Demonstração.* (i) “ $\Leftarrow$ ” ‘ $\subset$ ’ Seja  $v \in N(A)$ , então  $Av = \mathcal{O} = A\mathcal{O}$  onde temos usado linearidade no segundo passo. Então segundo injetividade como as imagens são iguais, os elementos  $v = \mathcal{O}$  devem ser iguais. ‘ $\supset$ ’ Todo subespaço, assim  $N(A)$ , contem o vetor nulo. “ $\Rightarrow$ ” Suponha que são iguais as imagens  $Av = Aw$  de dois elementos  $v, w \in E$ . Então  $\mathcal{O} = Av - Aw = A(v - w)$ , e assim  $v - w \in N(A) = \{\mathcal{O}\}$ . Então  $v = w$ .

(ii) “ $\Leftarrow$ ” ‘ $\subset$ ’ trivial. ‘ $\supset$ ’ Dado  $f \in F$ , como  $A$  é sobrejetivo existe um  $v \in E$  tal que  $f = Av$ . Assim  $f \in \text{Im}(A)$ . “ $\Rightarrow$ ” Seja  $f \in F = \text{Im}(A)$ , ou seja  $f = Av$  para um  $v \in E$ , mostrando que  $A$  é sobrejetivo.  $\square$

**Lema 6.0.17.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $X \subset E$ , então*

$$\langle X \rangle = E \Rightarrow \langle AX \rangle = \text{Im}(A).$$

*Demonstração.* ‘ $\subset$ ’ Sem usar  $\langle X \rangle = E$ , um elemento  $f \in \langle AX \rangle$  é da forma de uma soma finita  $f = \sum \alpha_i Ax_i = A \sum \alpha_i x_i \in \text{Im}(A)$  onde  $x_i \in X$  e  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ . ‘ $\supset$ ’ Um elemento  $f \in \text{Im}(A) = AE = A\langle X \rangle$  é da forma de uma soma finita  $f = A \sum \alpha_i x_i = \sum \alpha_i Ax_i \in \langle AX \rangle$  onde  $x_i \in X$  e  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ .  $\square$

Como  $\text{Im}(A) \subset F$  é um subespaço já sabemos de Teorema 3.2.1 que sua dimensão não é maior daquela de  $F$ . É uma surpresa que isso vale para  $\dim E$  também. Este fato será utilizado no famoso Teorema 6.5.1 de núcleo e imagem.

**Corolário 6.0.18.**  $\forall A \in \mathcal{L}(E, F)$  vale  $\dim \text{Im}(A) \leq \dim E$ .

*Demonstração.* Se  $\dim E = \infty$  não tem nada a provar. No caso  $n = \dim E \in \mathbb{N}_0$  seja  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base de  $E$ . Como  $\langle \mathcal{B} \rangle = E$  temos  $\langle A\mathcal{B} \rangle = \text{Im}(A)$  segundo Lema 6.0.17. Nas outras palavras, o conjunto finito  $A\mathcal{B} = \{A\xi_i \mid i = 1, \dots, n\}$  de  $m := |A\mathcal{B}| \leq n$  elementos (possivelmente uns  $A\xi_i$ ’s são iguais) gera o espaço  $\text{Im}(A)$ . Então  $\dim \text{Im}(A) \leq m \leq n = \dim E$  segundo Lema 3.1.20.  $\square$

**Exercício 6.0.19.** Defina operadores lineares  $A, B : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  assim

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots) \\ B(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_2 - 2x_1, x_3 - 2x_2, x_4 - 2x_3, \dots). \end{aligned}$$

Determine o núcleo e a imagem de  $A$  e de  $B$ .



*Demonstração.* Temos que

$$\text{posto}(A) := \dim \text{Im}(A) = \dim \text{Im}([A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}) = \dim \text{Im}(\mathbf{a}) =: \text{posto}(\mathbf{a})$$

onde a primeira identidade segue do isomorfismo entre as imagens das transformações lineares  $A$  e  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$ , veja o diagrama comutativa (5.0.1).  $\square$

**Exemplo 6.1.2.** Dado  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , determine  $\text{posto}(A)$  e uma base de  $\text{Im}(A)$ .

**Uma solução.** Escolhe bases e considere a matriz  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$  de  $A$ . Aplique escalonamento para a transposta  $\mathbf{a}^t$ , então as linhas não-nulas de  $(\mathbf{a}^t)_{\text{esc}}$ , dizemos  $\ell_1, \dots, \ell_d$ , formam uma base de

$$\text{Esp-lin}((\mathbf{a}^t)_{\text{esc}}) \stackrel{\text{Teor. A.2.2}}{=} \text{Esp-lin}(\mathbf{a}^t) = \text{Esp-col}(\mathbf{a}) \stackrel{(4.2.3)}{=} \text{Im}(\mathbf{a})$$

e o  $\text{posto}(A) \stackrel{\text{Le.6.1.1}}{=} \text{posto}(\mathbf{a}) := \dim \text{Im}(\mathbf{a}) = d$  é dado pelo número  $d$  das linhas não-nulas do escalonamento da transposta  $\mathbf{a}^t$ . Resta traduzir a base  $\{\ell_1, \dots, \ell_d\}$  de  $\text{Im}(\mathbf{a}) \subset \mathbb{K}^m$  numa base de  $\text{Im}(A) \subset F$ . Usamos o isomorfismo  $\mathcal{V} : \mathbb{K}^m \rightarrow F$  gerado pela base ordenada  $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  de  $F$ . Definimos

$$\zeta_i := \mathcal{V}\ell_i \stackrel{\text{def.}}{=} (\eta_1, \dots, \eta_m) \begin{bmatrix} (\ell_i)_1 \\ \vdots \\ (\ell_i)_m \end{bmatrix} \stackrel{\text{def.}}{=} \eta_1(\ell_i)_1 + \dots + \eta_m(\ell_i)_m \in F$$

para obter uma base  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$  de  $\text{Im}(A)$ .

**Exercício 6.1.3.** Encontre o posto de  $\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  e uma base da imagem.<sup>2</sup>

**Exercício 6.1.4.** Determine o posto da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

[Dicas: Calcule o posto-linha da matriz transposta. Escalonamento (modificando linhas) não muda o espaço-linha.]

## 6.2 Sobrejetividade – inversa à direita

**Definição 6.2.1.** Dado  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , uma transformação linear  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  é chamado de *uma inversa à direita de A* se a composição satisfaz  $AB = I_F$ .

<sup>2</sup> Obtém-se posto 2 e uma base é  $\{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$ . Com efeito, um escalonamento é

$$(\mathbf{a}^t)_{\text{esc}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 6.2.2** (Geralmente inversas à direita não são únicas). Seja  $a \in \mathbb{R}$  e

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y), \quad B_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, ax).$$

Então  $AB_a = I_{\mathbb{R}^2}$  para cada um  $a \in \mathbb{R}$ , mas  $B_a \neq B_b$  caso  $a \neq b$ .

**Teorema 6.2.3.** *Suponha  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  onde  $m := \dim F < \infty$ . Então*

$$A \text{ admite uma inversa à direita} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ sobrejetivo.}$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Dado uma inversa à direita  $B$  de  $A$ , então  $\forall f \in F$  vale  $ABf = I_F f = f$ . Assim para todo  $f \in F$  existe um  $v \in E$ , com efeito  $v := Bf$ , tal que  $Av = f$ . Mas isso significa que  $A$  é sobrejetivo.

“ $\Leftarrow$ ” Usamos sobrejetividade de  $A$  para construir explicitamente uma inversa à direita de  $A$ . Escolha uma base ordenada  $\mathcal{Y} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  de  $F$  e, usando sobrejetividade, uma lista  $v = (v_1, \dots, v_m)$  de  $m$  elementos de  $E$  tal que  $Av_j = \eta_j$  para  $j = 1, \dots, m$ . Lembramos de (4.1.5) que a lista  $v$  nos dá uma transformação linear  $B_v : F \rightarrow E$  unicamente determinado pelos valores  $B_v \eta_j := v_j$  nos membros da base  $\mathcal{Y}$ . Resta checar  $AB_v = I_F$ : Escrevendo  $f \in F$  como CL única na base  $\mathcal{Y}$ , ou seja  $f = \sum_j \beta_j \eta_j$ , e usando linearidade de  $B_v$  e de  $A$  obtemos

$$AB_v f = AB_v \sum_j \beta_j \eta_j = A \sum_j \beta_j \underbrace{B_v \eta_j}_{v_j} = \sum_j \beta_j Av_j = \sum_j \beta_j \eta_j = f.$$

Note-se a soma é finita porque temos exprimido  $f$  como uma CL.  $\square$

**Exercício 6.2.4.** Mostre os seguintes.

- Lembra do Exercício 2.1.4 que o subespaço trivial  $\{0\}$  e o próprio  $\mathbb{R}$  são os únicos subespaços de  $\mathbb{R}$ . Seja  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ . Mostre que  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  é sobrejetivo ou igual a zero.
- A derivação  $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ ,  $p(x) \mapsto \frac{d}{dx} p(x)$ , é sobrejetiva.
- A derivação  $D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f(x) \mapsto \frac{d}{dx} f(x)$ , é sobrejetiva.
- Encontre uma inversa à direita  $J : \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  para  $D$  em (c).

## 6.3 Injetividade – inversa à esquerda

**Teorema 6.3.1.** *Dada uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , então*

$$A \text{ injetivo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ leva conjuntos LI em conjuntos LI.}$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Seja  $A$  injetivo e  $X \subset E$  um subconjunto LI. Pegue elementos  $Ax_1, \dots, Ax_\ell \in AX$  na imagem e suponha que uma CL deles representa o vetor nulo, ou seja  $\mathcal{O} = \alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_\ell Ax_\ell = A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\ell x_\ell)$  onde os  $\alpha_i$ 's são escalares. Como  $A$  é injetivo, equivalentemente  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$  segundo Lema 6.0.16, segue que  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\ell x_\ell = \mathcal{O}$ . Como  $X$  é LI segue que

$\alpha_1 = \dots = \alpha_\ell = 0$  e isso prova que o subconjunto  $AX \subset F$  é LI.

“ $\Leftarrow$ ” Seja  $v \in E$ . Se  $v \neq \mathcal{O}$ , então o subconjunto  $\{v\} \subset E$  é LI segundo Comentário 1.3.4 (ii). Assim  $\{Av\} \subset F$  é LI como  $A$  leva LI em LI segundo hipótese. Assim o vetor  $Av$  não pode ser nulo. Temos provado  $v \neq \mathcal{O} \Rightarrow Av \neq \mathcal{O}$ . O contra-positivo então diz que  $Av = \mathcal{O} \Rightarrow v = \mathcal{O}$ . Assim  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$ .  $\square$

**Corolário 6.3.2.** *Se  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  é injetivo, então  $\dim E \leq \dim F$ .*

*Demonstração.* Se  $\dim F = \infty$  não tem nada a provar. Seja  $m := \dim F \in \mathbb{N}_0$ . Seja  $B = \{v_1, \dots, v_k\}$  um subconjunto LI de  $E$ , então como  $A$  leva LI em LI segundo Teorema 6.3.1, o conjunto  $AB = \{Av_1, \dots, Av_k\}$  é LI em  $F$  e por isso (Corolário 3.1.17) não pode conter mais elementos como  $\dim F$ , em símbolos  $k := |B| = |AB| \leq m$ . (Como  $A$  é injetivo vale  $|B| = |AB|$ .) Analogamente à prova da parte (a) de Teorema 3.2.1 um subconjunto  $B_* \subset E$  LI com o número máximo  $n (\leq m)$  de elementos gera  $E$  e assim é uma base de  $E$ . Assim  $\dim E := |B_*| = n \leq m := \dim F$ .  $\square$

**Exemplo 6.3.3** (Aplicação). Não existe nenhuma transformação linear  $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a qual é injetiva.

**Definição 6.3.4.** Dado  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , uma transformação linear  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  é chamado de **uma inversa à esquerda de  $A$**  se a composição satisfaz  $BA = I_E$ .

**Exemplo 6.3.5** (Geralmente inversas à esquerda não são únicas). Seja  $a \in \mathbb{R}$  e

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, 0), \quad B_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + az, y).$$

Então  $B_a A = I_{\mathbb{R}^2}$  para cada um  $a \in \mathbb{R}$ , mas  $B_a \neq B_b$  caso  $a \neq b$ .

**Teorema 6.3.6.** *Suponha  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  onde  $\dim E, \dim F < \infty$ . Então*

$$A \text{ admite uma inversa à esquerda } B \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ injetivo.}$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Se  $Au = Av$ , então  $BAu = BAv$ . Mas  $BA = I$ , daí  $u = v$ . “ $\Leftarrow$ ” Como a dimensão  $n := \dim E$  é finita, escolha uma base  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$ . Baseado na injetividade de  $A$ , segundo Teorema 6.3.1, o conjunto das imagens  $\{A\xi_1, \dots, A\xi_n\}$  é LI em  $F$  e pode ser estendido, segundo Teorema 3.2.1 (b) usando  $\dim F < \infty$ , para obter a base  $\mathcal{B} := \{A\xi_1, \dots, A\xi_n, \eta_1, \dots, \eta_k\}$  de  $F$ . A lista  $w := (\xi_1, \dots, \xi_n, \mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}) \in E^{\times(n+k)}$  determina  $B_w \in \mathcal{L}(F, E)$  segundo (4.1.5), ou seja  $B_w(A\xi_i) := \xi_i$  e  $B_w \eta_j := \mathcal{O}$ . Escreve  $v \in E$  como CL única  $v = \sum_i \alpha_i \xi_i$ . Então usando linearidade de  $A$  e de  $B_w$  obtemos

$$B_w Av = B_w A \sum_i \alpha_i \xi_i = \sum_i \alpha_i \underbrace{B_w A \xi_i}_{\xi_i} = v = I_E v$$

para cada um  $v \in E$ .  $\square$

**Exercício 6.3.7.** Determine uma base para a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas.

- (a)  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - y, x - y)$ ;  
 (b)  $B : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z, t) \mapsto (x + y, z + t, x + z, y + t)$ ;  
 (c)  $C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + \frac{1}{2}y, y + \frac{1}{2}z, z + \frac{1}{2}x)$ ;  
 (d)  $D : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2), X \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$ ;  
 (e)  $E : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R}), p = p(x) \mapsto xp$ .

## 6.4 Bijetividade – inversa

**Definição 6.4.1** (Inversa). Chama-se uma transformação linear  $A : E \rightarrow F$  de **invertível** se  $A$  admite uma inversa à esquerda  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  e uma inversa à direita  $C \in \mathcal{L}(F, E)$ . Neste caso  $B = C$ ,<sup>3</sup> denotado  $A^{-1}$ , é dito **a inversa** de  $A$ .

**Exercício 6.4.2.** Sejam  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $B \in \mathcal{L}(F, G)$  invertíveis, mostre que

- a) a inversa de  $A$  (se existasse) é única;  
 b)  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;  
 c)  $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ ;  
 d)  $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$  para escalares não-nulos  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

### 6.4.1 Isomorfismos

**Definição 6.4.3** (Isomorfismo). Um **isomorfismo** (entre  $E$  e  $F$ ) é uma transformação linear  $A : E \rightarrow F$  a qual é bijetiva (injetivo e sobrejetivo). Neste caso se diz que  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais **isomorfos**, símbolo  $E \simeq F$ .

Para aplicações gerais bijetividade é equivalente a existência da aplicação inversa (a qual herda bijetividade). É interessante observar que se a aplicação bijetiva é linear a aplicação inversa não só existe mas herda linearidade ( $\Rightarrow$ ).

**Proposição 6.4.4.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , então*

$$A \text{ isomorfismo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ é invertível.}$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Definimos o candidato  $B$  para ser a inversa de  $A$  assim

$$B : F \rightarrow E, \quad f \mapsto Bf := v \tag{6.4.1}$$

onde  $v$  é o único elemento de  $E$  com  $Av = f$  (existência:  $A$  sobrejetivo, unicidade:  $A$  injetivo). A aplicação definida  $B$  é linear: Sejam  $f, g \in F$ , denotamos  $v := Bf$  e  $w := Bg$ . Então  $Av = f$  e  $Aw = g$  e como  $A$  é linear obtemos  $A(v + w) = Av + Aw = f + g$ , então  $B(f + g) = v + w = Bf + Bg$ . Deixamos ao

<sup>3</sup> Com efeito  $B = BI_F = B(AC) = (BA)C = I_EC = C$ .

leitor verificar que  $B(\alpha f) = \alpha Bf$ . Também tem a propriedade de ser inversa à direita e esquerda, com efeito para  $v \in E$  denota  $f := Av$ , então

$$ABf = Av = f, \quad BAv = Bf = v.$$

“ $\Leftarrow$ ” Suponha que  $A$  admite a inversa  $A^{-1} : F \rightarrow E$ . Então  $A^{-1}$  é inversa à direita e à esquerda de  $A$ . Assim  $A$  é sobrejetivo e injetivo segundo os Teoremas 6.2.3 e 6.3.6. Mas bijetivo e linear significa isomorfismo.  $\square$

**Corolário 6.4.5.** *Dado isomorfismos  $E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G$ , então composição  $BA$  e múltiplos  $\alpha A$  são isomorfismos para todos os escalares não-nulos  $\alpha \neq 0$ .*

*Demonstração.* Proposição 6.4.4 e Exercício 6.4.2.  $\square$

**Exercício 6.4.6** (Isomorfismo é relação de equivalência). Mostre que isomorfismo ' $\simeq$ ' é uma **relação de equivalência** no conjunto de todos os espaços vetoriais: ou seja, mostre que são satisfeitos os três axiomas seguintes:

$$\begin{aligned} E \simeq E & \text{ para cada um espaço vetorial;} && \text{(reflexividade)} \\ E \simeq F & \Rightarrow F \simeq E; && \text{(simetria)} \\ E \simeq F \text{ e } F \simeq G & \Rightarrow E \simeq G. && \text{(transitividade)} \end{aligned}$$

**Teorema 6.4.7.** *Dada uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , então*

$$A \text{ bijetiva (isomorfismo)} \Leftrightarrow A \text{ leva uma base de } E \text{ numa base de } F.$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Seja  $A$  um isomorfismo e  $\mathcal{B}$  uma base de  $E$ . Resta mostrar que o conjunto  $A\mathcal{B}$  é LI e gera  $F$ . LI segue de Teorema 6.3.1 (uma TL injetiva  $A$  leva LI em LI) e como  $\mathcal{B}$  gera  $E$  o Lema 6.0.17 diz que  $\langle A\mathcal{B} \rangle = \text{Im}(A) = F$  onde a segunda identidade é a sobrejetividade de  $A$ .

“ $\Leftarrow$ ” Dado um base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , então  $A\mathcal{B}$  é uma base de  $F$  segundo a hipótese.  $A$  INJETIVO ( $N(A) = \{\mathcal{O}\}$ ): Suponha  $v \in E$  e  $Av = \mathcal{O}$ . Escrevemos  $v$  como CL  $v = \sum_{i=1}^{k(v)} \alpha_i \xi_i$  de elementos  $\xi_i$  da base  $\mathcal{B}$ . Então

$$\mathcal{O} = Av = A \sum_i \alpha_i \xi_i = \sum_i \alpha_i \underbrace{A\xi_i}_{\in A\mathcal{B}}.$$

Como  $A\mathcal{B}$  é um conjunto LI todos os coeficientes  $\alpha_i = 0$  se anulam. Assim  $v = \mathcal{O}$  o que mostra que  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$ .

$A$  SOBREJETIVO: Segundo hipótese  $A\mathcal{B}$  é uma base de  $F$ . Dado  $f \in F$ , escrevemos  $f$  como CL  $f = \sum_{j=1}^{\ell(f)} \beta_j A\xi_j$  de elementos  $A\xi_j$  da base  $A\mathcal{B}$ . O elemento de  $E$  definido por  $v := \sum_j \beta_j \xi_j$  satisfaz  $Av = A \sum_j \beta_j \xi_j = \sum_j \beta_j A\xi_j = f$ .  $\square$

**Corolário 6.4.8.** *Um espaço vetorial  $E$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e de dimensão  $n \in \mathbb{N}_0$  é isomorfo a  $\mathbb{K}^n$ .*

*Demonstração.* Escolha uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$  e defina a aplicação  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow E$  na forma  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$ . Note-se que  $A$  é linear e que  $Ae_j = A(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 1 \cdot \xi_j = \xi_j$ . Assim  $A$  leva a base canônica  $A\mathcal{E}^n = \mathcal{B}$  na base  $\mathcal{B}$ , então  $A$  é um isomorfismo segundo Teorema 6.4.7.  $\square$

**Corolário 6.4.9.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e de dimensões finitas, então*

$$E \simeq F \quad \Leftrightarrow \quad \dim E = \dim F.$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Seja  $A : E \rightarrow F$  um isomorfismo e  $\mathcal{B}$  uma base de  $E$ . Então  $A\mathcal{B}$  é base de  $F$  segundo Teorema 6.4.7. e  $|\mathcal{B}| = |A\mathcal{B}|$  como  $A$  é bijetivo. Daí  $\dim E := |\mathcal{B}| = |A\mathcal{B}| =: \dim F$ .

“ $\Leftarrow$ ” Corolário 6.4.8 da dois isomorfismos  $E \simeq \mathbb{K}^{\dim E} = \mathbb{K}^{\dim F} \simeq F$ .  $\square$

**Exemplo 6.4.10.** O espaço vetorial  $\mathcal{S}(n)$  das matrizes  $n \times n$  simétricas e o espaço vetorial  $\mathcal{P}_{\frac{n(n+1)}{2}-1}$  dos polinômios de grau menor ou igual  $\frac{n(n+1)}{2} - 1$  são isomorfos. Com efeito as dimensões são iguais – segundo as fórmulas (3.2.2) e (3.0.1) – e assim Corolário 6.4.9 aplica.

**Exercício 6.4.11.** Dado  $A \in \mathcal{L}(E)$  onde  $\dim E < \infty$ , defina

$$\begin{aligned} T_A : \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{L}(E), \\ X &\mapsto AX. \end{aligned}$$

Prove que  $T_A$  é linear e que  $T_A$  é invertível se, e somente se  $A$  é invertível. Mesmo problema com  $S_A(X) := XA$ .

**Exercício 6.4.12.** Estabeleça um isomorfismo entre o espaço vetorial das matrizes reais simétricas  $n \times n$  e o espaço das matrizes reais *triangulares inferiores* ( $a_{ij} = 0$  se  $i < j$ ).

Idem entre as matrizes anti-simétricas e as triangulares inferiores com diagonal nula.

**Exercício 6.4.13.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais tais que  $\dim E \leq \dim F < \infty$ . Prove que existem  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  tais que  $A$  é injetiva e  $B$  é sobrejetiva.

**Exercício 6.4.14.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais (de dimensão finita ou infinita). Sejam  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  tais que  $AB$  é invertível.

- (a) Prove que  $A$  é sobrejetiva e  $B$  é injetiva.
- (b) Se  $AB$  e  $BA$  são invertíveis, prove que  $A$  é invertível.

## 6.5 Teorema de Núcleo e Imagem

**Teorema 6.5.1** (Teorema de núcleo e imagem). *Para uma transformação linear  $A: E \rightarrow F$  com domínio  $E$  de dimensão finita  $n$  vale*

$$\dim E = \dim N(A) + \dim \text{Im}(A).$$

*Demonstração.* Segundo Lema 6.0.14 os conjuntos  $N(A)$  e  $\text{Im}(A)$  são subespaços de  $E$  e  $F$ , respectivamente. Segundo Teorema 3.2.1 (c) e Corolário 6.0.18 temos

$$\begin{aligned} k &:= \dim N(A) \leq \dim E =: n < \infty; \\ \ell &:= \dim \text{Im}(A) \leq \dim E =: n < \infty. \end{aligned}$$

Escolha uma base ordenada  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$  de  $N(A)$  e uma  $(A\nu_1, \dots, A\nu_\ell)$  de  $\text{Im}(A)$ . Resta mostrar que

$$\mathcal{B} := (\xi_1, \dots, \xi_k, \nu_1, \dots, \nu_\ell)$$

é uma base de  $E$ , porque neste caso  $\dim E = k + \ell = \dim N(A) + \dim \text{Im}(A)$ .

**$\mathcal{B}$  é LI.** Suponha que uma CL em  $\mathcal{B}$  representa o vetor nulo, ou seja

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k + \beta_1 \nu_1 + \dots + \beta_\ell \nu_\ell = \mathcal{O}.$$

Resta mostrar que todos os coeficientes se anulam. Aplique  $A$  usando linearidade e que  $\xi_i \in N(A)$  para obter

$$\alpha_1 \underbrace{A\xi_1}_{\mathcal{O}} + \dots + \alpha_k \underbrace{A\xi_k}_{\mathcal{O}} + \beta_1 A\nu_1 + \dots + \beta_\ell A\nu_\ell = \mathcal{O}.$$

Então  $\beta_1 = \dots = \beta_\ell = 0$  porque toda CL no conjunto LI  $\{A\nu_1, \dots, A\nu_\ell\}$  e representando o vetor nulo tem todos coeficientes nulos. Neste caso a primeira identidade simplifica-se para  $\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k = \mathcal{O}$ . Mas os  $\xi_i$ 's formam uma base, então um conjunto LI, assim os coeficientes se anulam  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ .

**$\mathcal{B}$  gera  $E$ .** Dado  $v \in E$ , temos que exprimir  $v$  como CL em  $\mathcal{B}$ . Como temos uma base de  $\text{Im}(A)$ , escrevemos  $Av \in \text{Im}(A)$  como CL  $Av = \beta_1 A\nu_1 + \dots + \beta_\ell A\nu_\ell$  com coeficientes únicos  $\beta_j$ . Mas isso nos dá um elemento  $w$  do núcleo

$$A \underbrace{(v - \beta_1 \nu_1 - \dots - \beta_\ell \nu_\ell)}_{=:w} = \mathcal{O}.$$

Exprimindo  $w$  como CL na base do núcleo, com coeficientes únicos  $\alpha_j$ , obtemos

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k = w := v - \beta_1 \nu_1 - \dots - \beta_\ell \nu_\ell.$$

Assim temos exprimido

$$v = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k + \beta_1 \nu_1 + \dots + \beta_\ell \nu_\ell$$

como CL em  $\mathcal{B}$ . □

**Corolário 6.5.2.** Para uma transformação linear  $A: E \rightarrow F$  entre espaços vetoriais da mesma dimensão finita  $n = \dim E = \dim F$  são equivalente

$$A \text{ injetivo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ sobrejetivo} \quad (\Leftrightarrow \quad A \text{ isomorfismo}).$$

*Demonstração.* Da hipótese da mesma dimensão e do Teorema 6.5.1 sabemos

$$\dim F = \dim E = \dim N(A) + \dim \text{Im}(A).$$

Injetividade (equivalente a  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$  segundo Lema 6.0.16) implica  $\dim F = \dim \text{Im}(A)$ , então  $F = \text{Im}(A)$  (sobrejetividade) segundo Teorema 3.2.1 (d). Vice versa, sobrejetividade ( $F = \text{Im}(A)$ ) implica  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$  (injetividade).  $\square$

**Exercício 6.5.3** (Errado na dimensão infinita). Considere os operadores lineares  $A, B: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  dado por empurrar todos os membros por um lugar

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \\ B(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Mostre que  $A$  é linear e injetivo, mas não é sobrejetivo, enquanto  $B$  é linear e sobrejetivo, mas não é injetivo,

**Corolário 6.5.4.** Na mesma dimensão finita  $n = \dim E = \dim F$  ser inversa à esquerda é equivalente a ser inversa à direita, em símbolos para  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  são equivalentes

$$BA = I_E \quad \Leftrightarrow \quad AB = I_F.$$

No todo caso  $A$  é invertível com inversa  $A^{-1} = B = C$ .

*Demonstração.* Temos as três equivalências

$$\begin{aligned} \exists B \in \mathcal{L}(F, E): BA = I_E \\ \Leftrightarrow A \text{ injetivo} \\ \Leftrightarrow A \text{ sobrejetivo} \\ \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{L}(F, E): AC = I_F \end{aligned}$$

segundo respectivamente os três resultados Teorema 6.3.6, Corolário 6.5.2, e Teorema 6.2.3. Mas neste caso  $C = B$  e este operador é a inversa de  $A$  como mostrado na Definição 6.4.1.  $\square$

**Exemplo 6.5.5.** Dado uma lista não-nula  $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{O}\}$ , o subconjunto

$$H_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_\alpha(x) := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\} = N(\varphi_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$$

é chamado de hiperplano e foi introduzido no Exemplo 2.1.8. Já sabemos que

$$\dim H_\alpha = n - 1$$

como no Exemplo 3.0.13 d) temos visto uma base composto de  $n - 1$  elementos.

Um caminho alternativo para calcular a dimensão é do ponto de vista como núcleo do funcional linear  $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . O Teorema 6.5.1 diz que

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_{=n} = \dim \underbrace{N(\varphi_\alpha)}_{H_\alpha} + \underbrace{\dim \text{Im}(\varphi_\alpha)}_{=1}.$$

Resta ver que  $\text{Im}(\varphi_\alpha) = \mathbb{R}$ . O subespaço  $\text{Im}(\varphi_\alpha)$  de  $\mathbb{R}$  não é o trivial  $\{0\}$  porque  $\varphi_\alpha \alpha = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0$  é não-nulo como  $\alpha \neq (0, \dots, 0)$ . Então  $\text{Im}(\varphi_\alpha)$  deve ser o outro subespaço de  $\mathbb{R}$ , o  $\mathbb{R}$  mesmo, veja Exercício 2.1.4.

## 6.6 Escalonamento: Núcleo e imagem

Aplicamos o processo de escalonar uma matriz  $\mathbf{a}$  – conteúdo do curso MA141 e revisado no Apêndice A.2 – para calcular a dimensão do subespaço gerado por  $m$  vetores.

### 6.6.1 Sistemas lineares

Sistemas lineares foram introduzido em Definição A.3.1 e tratado em Exemplo 6.0.20. Estes conteúdos são pressupostos. Seja  $\mathbf{a}$  uma matriz  $m \times n$  com entradas num corpo  $\mathbb{K}$  e  $b \in \mathbb{K}^m$  uma lista. Lembre-se de (A.3.1) que a equação  $\mathbf{a}x = b$  é chamado de sistema linear de  $m$  equações a  $n$  incógnitas  $(x_1, \dots, x_n) = x$ .

Existência de uma solução  $x$  é equivalente ao fato que a lista  $b$  é localizada na imagem da matriz  $\mathbf{a}$ , em símbolos

$$\mathbf{a}x = b \text{ tem solução } x \Leftrightarrow b \in \text{Im}(\mathbf{a}) \Leftrightarrow p := \text{posto}(\mathbf{a}) = \text{posto}[\mathbf{a} : b]$$

veja Exemplo 6.0.20. Mas neste caso, tem como saber quantas soluções haverá?

**Lema 6.6.1.** *Suponha que  $\mathbf{a}x = b$  admite uma solução  $x_0$  ( $b \in \text{Im}(\mathbf{a})$ ). Então*

- a)  $p = n$  ( $\mathbf{a} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  é injetivo)  $\Leftrightarrow$  a solução é única;  $p := \text{posto}(\mathbf{a})$
- b)  $p < n$  ( $\mathbf{a}$  não é injetivo)  $\Leftrightarrow$  tem infinito muitas soluções.

No caso b) o conjunto das soluções  $x$  de  $\mathbf{a}x = b$  é dado pela translação do núcleo

$$x_0 + N(\mathbf{a}) = \{\text{soluções } x \text{ de } \mathbf{a}x = b\}$$

e  $\dim N(\mathbf{a}) = n - p \geq 1$ .

*Demonstração.* Como a dimensão  $p$  da imagem  $\text{Im}(\mathbf{a}) \subset \mathbb{K}^m$  é no máximo a dimensão  $n$  do domínio, segundo Corolário 6.0.18, temos que  $p \leq \max\{n, m\}$ .

a) Segundo o Teorema 6.5.1 de núcleo e imagem  $n = p$  ( $\dim \mathbb{K}^n = \dim \text{Im}(\mathbf{a})$ ) é equivalente a  $N(\mathbf{a}) = \{\mathcal{O}\}$  o que, segundo Lema 6.0.16, é equivalente a  $\mathbf{a} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  é injetivo. Equivalentemente  $\mathbf{a} : \mathbb{K}^n \rightarrow \text{Im}(\mathbf{a})$  é um isomorfismo, e assim  $b \in \text{Im}(\mathbf{a})$  corresponde exatamente um elemento  $x \in \mathbb{K}^n$  tal que  $\mathbf{a}x = b$ .

b) Seja  $\nu \in N(\mathbf{a})$ , então  $x := x_0 + \nu$  satisfaz  $\mathbf{a}x = \mathbf{a}x_0 + \mathbf{a}\nu = b$ .  $\square$

Lembra o Lema A.3.3: Uma lista  $x$  é solução do sistema linear  $[\mathbf{a} : b]$  se e somente se  $x$  é solução do sistema linear associado à matriz escalonada  $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$ .

Lembra o Comentário A.3.5: Para resolver o SL  $\mathbf{a}x = b$

- escalona a matriz aumentada  $[\mathbf{a} : b]$
- obtendo uma matriz escalonada  $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}} =: [\tilde{\mathbf{a}} : \tilde{b}]$ , então
- resolve o SL  $\tilde{\mathbf{a}}x = \tilde{b}$  "de baixo para cima", veja Exemplo A.3.6, então
- uma lista  $x$  é solução de  $\tilde{\mathbf{a}}x = \tilde{b}$  se e somente se  $x$  é solução de  $\mathbf{a}x = b$ .

### 6.6.2 Determinar bases de núcleo e imagem

**Exemplo 6.6.2.** Determine uma base do núcleo da transformação linear

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + 4y, 3x + 6y + 3z).$$

**Uma solução.** Para obter uma matriz de  $A$  escolhemos as bases mais simples, a base canônica  $\mathcal{E}^3$ . Obtemos

$$\mathbf{a} := [A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Escalonamos a matriz

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{oe})} \dots \xrightarrow{(\text{oe})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_{\text{esc}} : \mathcal{O}].$$

Agora resolvemos o sistema escalonado  $\mathbf{a}_{\text{esc}}x = \mathcal{O}$ , ou seja

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \alpha = -2\beta, \beta \in \mathbb{R}, \\ -2\gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Então  $N(\mathbf{a}) = \mathbb{R}\xi$  onde  $\xi = (-2, 1, 0)$  e  $\mathcal{B} := \{\xi\}$  é uma base.

**Exemplo 6.6.3.** Seja  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$  a base canônica e  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  determinado por

$$Ae_1 = 2e_1 - e_2 - e_3$$

$$Ae_2 = -e_1 + e_2$$

$$Ae_3 = -e_1 + e_3.$$

Determine os subespaços  $N(A)$ ,  $\text{Im}(A)$ , as dimensões, e uma base de cada um. (Tenhamos encontrado  $A$  antes nos Exercícios 5.2.3 e 5.4.8.)

**Uma solução.** A definição de  $A$  já mostra que a matriz é dada por

$$\mathbf{a} := [A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Como  $\mathcal{E}$  corresponde ao isomorfismo identidade, veja (5.0.1) com  $\mathcal{U} = \mathcal{E}$ , e usando (4.2.2) obtemos passos 1 e 2 de

$$\text{Im}(A) = \text{Im}(\mathbf{a}) = \text{Esp-col}(\mathbf{a}) = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}^t).$$

Escalonamos

$$\mathbf{a}^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{oe})} \dots \xrightarrow{(\text{oe})} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2. \end{matrix}$$

Então as listas  $\{\ell_1, \ell_3\}$  formam uma base da imagem e assim  $\dim \text{Im}(A) = 2$ .

- Em respeito ao núcleo de  $A = \mathbf{a}$  escalonamos o SL  $\mathbf{a}x = 0$ , ou seja

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{oe})} \dots \xrightarrow{(\text{oe})} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos o SL escalonado de baixo para cima, ou seja

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 & \Rightarrow x = z, z \in \mathbb{R}, \\ y - z = 0 & \Rightarrow y = z, z \in \mathbb{R}, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Assim  $N(A) = \mathbb{R}\xi$  onde  $\xi = (1, 1, 1)$ . Então  $\{\xi\}$  é uma base e a dimensão é 1.

**Exercício 6.6.4.** Calcule a dimensão do subespaço de  $\mathbb{R}^5$  gerado pelos vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 1, -1, 1), & v_2 &= (1, -1, -1, 0, 1), \\ v_3 &= (0, 1, 1, -1, -1), & v_4 &= (-1, 1, 1, -1, 1). \end{aligned}$$

Decida se o vetor  $b = (6, 18, 1, -9, 8)$  pertence ou não a este subespaço.

**Exercício 6.6.5.** Encontre uma base para o núcleo da transformação linear

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ (x, y, z, t) &\mapsto (2x + y - z + 3t, x - 4y + 2z + t, 2y + 4z - t). \end{aligned}$$

[Dica: Calcule a matriz  $\mathbf{c}$  de  $C$ . Escalonamento. Resolva o sistema linear homogêneo.]

# Capítulo 7

## Soma direta e projeções

No<sup>1</sup> Capítulo 7 denotamos de

$$F, G, H \subset E$$

subespaços de um espaço vetorial  $E$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Na parte das involuções precisamos às vezes que  $1 + 1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ , veja Corolário 1.1.22. (Vale para  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$  se  $p \neq 2$ .) O objeto central do nosso interesse será o conjunto

$$\mathcal{SC} = \mathcal{SC}(E) := \{(F, G) \mid F \oplus G = E\}$$

composto de **pares**  $(F, G)$  de **subespaços complementares** de  $E$  no sentido que o par decompõe  $E = F \oplus G$  como soma direta.

O nosso objetivo será relacionar o conjunto  $\mathcal{SC}(E)$  bijetivamente com duas classes de operadores lineares em  $E$  – os subconjuntos de  $\mathcal{L}(E)$  dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \mathcal{P}(E) &:= \{P \mid P^2 = P\} && \text{“projeções em } E\text{”} \\ \mathcal{I} = \mathcal{I}(E) &:= \{S \mid S^2 = I_E\} && \text{“involuções em } E\text{”}. \end{aligned}$$

Ambas condições fazem sentido no contexto geral de uma aplicação  $s : X \rightarrow X$  num conjunto  $X$ . Para nos são relevantes as **involuções** ( $S^2 = \text{id}$ ). Temos três involuções naturais, isto é (i) trocar os membros

$$\mu : \mathcal{SC} \rightarrow \mathcal{SC}, \quad (F, G) \mapsto (G, F)$$

(ii) mudar o sinal<sup>2</sup>

$$\sigma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}, \quad S \mapsto -S$$

e (iii) tomar diferença com o operador identidade

$$\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}, \quad P \mapsto I - P.$$

Com efeito  $(I - P)^2 = I^2 - 2P + P^2 = I - P$ , assim realmente é uma projeção. Capítulo 7 é ilustrado na Figura 7.1. É comum indicar injetividade de uma aplicação com tal flecha  $f : X \rightarrowtail Y$ , sobrejetividade com tal flecha  $f : X \twoheadrightarrow Y$ .

<sup>1</sup>Cap. 7 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

<sup>2</sup> Na verdade  $-S$  é o inverso aditivo de  $S \in \mathcal{L}(E)$  e o inverso do inverso é a identidade.

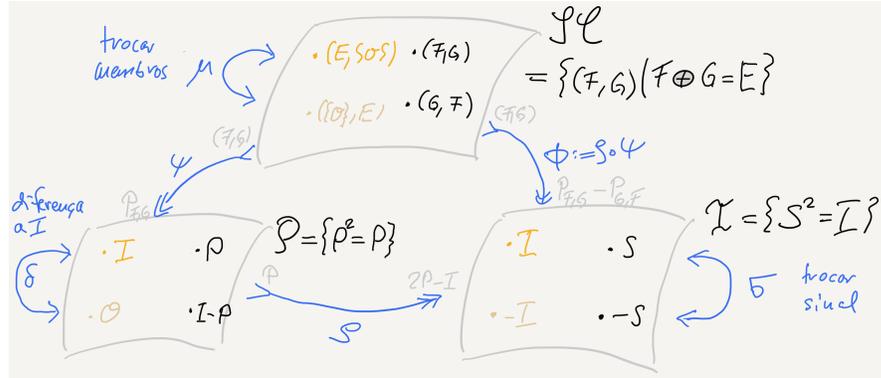


Figura 7.1: Conjuntos  $\mathcal{SC}$  dos subespaços complementares,  $\mathcal{P}$  das projeções, e  $\mathcal{I}$  das involuções lineares – o diagrama das seis bijeções é comutativa

### Preparações e lembranças

**Definição 7.0.6** (Pontos fixos e anti-fixos). Dado um conjunto  $X$  e uma aplicação  $r : X \rightarrow X$ . a) Um elemento  $x \in X$  tal que  $r(x) = x$  chama-se um **ponto fixo** de  $r$ . O conjunto dos pontos fixos de  $r$  satisfaz  $\mathbf{Fix}(r) \subset \text{Im}(r)$ .

b) Se  $X$  é um espaço vetorial denotamos de  $\mathbf{aFix}(r)$  o conjunto de todos os **pontos anti-fixos**  $x$  de  $r$ , ou seja  $r(x) = -x$ .

É fácil – e instrutivo – checar que para aplicações idempotentes num conjunto  $X$  os pontos fixos já formam a imagem inteira, em símbolos

$$r^2 = r \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Fix}(r) = \text{Im}(r). \tag{7.0.1}$$

Para aplicações idempotentes é recomendável – geralmente ilumina bastante – trabalhar com  $\mathbf{Fix}(r)$  em vez de  $\text{Im}(r)$ .

**Exercício 7.0.7.** Se  $B \in \mathcal{L}(E)$ , então  $\mathbf{Fix}(B)$ ,  $\mathbf{aFix}(B) \subset E$  são subespaços.

### Produto cartesiano e soma

Lembre-se do Exercício 3.0.15 que o produto cartesiano  $G \times H$  de dois espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão

$$\dim(G \times H) = \dim G + \dim H.$$

Dado dois subespaços  $G, H$ , será útil relembrar da Seção 2.3 a soma ordinária  $G + H$  e a soma direta  $G \oplus H$  deles. Se  $G, H$  são de dimensão finita vale a fórmula (3.2.1) a qual diz que

$$\dim(G + H) = \dim G + \dim H - \dim(G \cap H). \tag{7.0.2}$$

**Exercício 7.0.8.** Seja  $E$  um espaço vetorial com subespaços de intersecção trivial  $G \cap H = \{\mathcal{O}\}$ . Prove que  $S : G \times H \rightarrow G \oplus H, (g, h) \mapsto g + h$ , é um isomorfismo (linear, injetivo, sobrejetivo).

## 7.1 Projeções

**Definição 7.1.1.** Os operadores lineares idempotentes  $P^2 = P \in \mathcal{L}(E)$  são chamados de **as projeções** de  $E$ . Um **par de subespaços complementares** de  $E$  é um par  $(F, G)$  de subespaços decompondo  $E$  no sentido que  $F \oplus G = E$ .

**Lema 7.1.2** (Caracterização de projeção). *Para  $P \in \mathcal{L}(E)$  são equivalentes*

- (i)  $P^2 = P$ ; (projeção)
- (ii)  $\forall w \in \text{Im}(P): Pw = w$ ; ( $\text{Im}(P) = \text{Fix}(P)$ )
- (iii)  $E = \text{Fix}(P) \oplus \text{N}(P)$ . (par complementar)

e cada um de (i,ii,iii) implica

- (iv)  $E = \text{Im}(P) \oplus \text{N}(P)$ . (par complementar)

*Demonstração.* “(i)  $\Leftrightarrow$  (ii)” veja (7.0.1). “(ii)  $\Rightarrow$  (iii)” Intersecção trivial: seja  $v \in \text{Fix}(P) \cap \text{N}(P)$ , então  $v = Pv = \mathcal{O}$ . Soma: Dado  $v \in E$ ,  $w := Pv \in \text{Im}(P) = \text{Fix}(P)$  e  $v = w + (v - w)$  onde  $P(v - w) = Pv - P^2v = 0$ . “(iii)  $\Rightarrow$  (i)” Dado  $v \in E$ , temos  $v = w + u$  para únicos elementos  $w \in \text{Fix}(P)$  e  $u \in \text{N}(P)$ . Assim  $Pv = Pw + Pu = w$  e daí  $P(Pv) = Pw = w$ . “(ii,iii)  $\Rightarrow$  (iv)” trivial.  $\square$

**Definição 7.1.3** (Projeção sobre  $F$  paralelamente  $G$ ). Seja  $(F, G)$  um par de subespaços complementares de  $E$ , escreva  $v \in E = F \oplus G$  na forma  $v = f + g$  com únicos elementos  $f \in F$  e  $g \in G$ , veja Teorema 2.3.4. A aplicação dada por

$$P_{F,G} : E \rightarrow E, \quad v \mapsto f \tag{7.1.1}$$

é chamada de **projeção de  $E$  sobre  $F$  paralelamente  $G$** .

**Lema 7.1.4.** *A aplicação  $P := P_{F,G}$  definida acima é uma projeção de  $E$ . Ademais imagem (os pontos fixos) e núcleo são dados por  $F$  e  $G$ , em símbolos*

$$F = \text{Im}(P_{F,G}) = \text{Fix}(P_{F,G}), \quad G = \text{N}(P_{F,G}). \tag{7.1.2}$$

Além disso  $P_{G,F} = I_E - P_{F,G}$ .

*Demonstração.* Se  $v = f + g$  e  $\tilde{v} = \tilde{f} + \tilde{g}$ , então  $v + \tilde{v} = f + g + \tilde{f} + \tilde{g} = f + \tilde{f} + g + \tilde{g}$ .

LINEAR: Assim  $P(v + \tilde{v}) = P(f + \tilde{f} + g + \tilde{g}) = f + \tilde{f} = Pv + P\tilde{v}$ . Como  $\alpha v = \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$  obtemos  $P(\alpha v) = P(\alpha f + \alpha g) = \alpha f = \alpha Pv$ .

IDEMPOTENTE: Vale  $P^2v = P(P(f + g)) = Pf = f = Pv$ .

$\text{Im}(P) = F$ : ‘ $\subset$ ’ óbvio ‘ $\supset$ ’ dado  $f \in F$ , então  $Pf = f$ .

$\text{N}(P) = G$ : ‘ $\subset$ ’ para  $f + g = v \in \text{N}(P)$  vale  $\mathcal{O} = Pv = P(f + g) = f$ . Assim segue que  $v = g \in G$ . ‘ $\supset$ ’ para  $g \in G$  vale  $Pg = P(\mathcal{O} + g) = \mathcal{O}$ .

IDENTIDADE:  $P_{G,F}(f + g) = g = (f + g) - f = I_E(f + g) - P_{F,G}(f + g)$   $\square$

**Teorema 7.1.5.** *A seguinte aplicação é uma bijeção*

$$\mathcal{SC} = \{\text{pares de subespaços complementares de } E\} \xrightarrow{\psi} \{\text{projeções em } E\} = \mathcal{P}$$

$$(F, G) \mapsto P_{F,G}$$

com inversa  $\chi: P \mapsto (\text{Im}(P), \text{N}(P))$ .

útil lembrar:  $\text{Im}(P) = \text{Fix}(P)$

Note-se que o subconjunto  $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(E)$  composto das projeções  $P$  de  $E$  não é um subespaço como  $(\alpha P)^2 = \alpha^2 P^2 = \alpha^2 P \neq \alpha P$  caso  $\alpha^2 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ . Então não faz sentido falar sobre linearidade da bijeção  $\psi$ .

*Demonstração.* INJETIVO. Suponha  $P_{F,G} = P_{\tilde{F},\tilde{G}}$ , então aplique Lema 7.1.4 duas vezes para obter as identidades  $F = \text{Im}(P_{F,G}) = \text{Im}(P_{\tilde{F},\tilde{G}}) = \tilde{F}$  e analogamente  $G = \text{N}(P_{F,G}) = \text{N}(P_{\tilde{F},\tilde{G}}) = \tilde{G}$ .

SOBREJETIVO. Dado uma projeção  $P$  em  $E$ , Lema 7.1.2 diz que o par definido por  $(F, G) := (\text{Im}(P), \text{N}(P))$  é um par de subespaços complementares. Resta mostrar que  $P = P_{\text{Im}(P), \text{N}(P)} \stackrel{\text{def.}}{=} \psi(F, G)$ . Dado  $w \in E$ , Lema 7.1.2 diz que  $w = f + g$  para únicos elementos  $f \in \text{Im}(P) = \text{Fix}(P)$  e  $g \in \text{N}(P)$ . Então vale

$$P_{\text{Im}(P), \text{N}(P)} w \stackrel{\text{def.}}{=} f \stackrel{\text{pt. fix.}}{=} Pf = Pf + \underbrace{\mathcal{O}}_{Pg} \stackrel{\text{lin.}}{=} P(f + g) = Pw.$$

INVERSA. Dada uma projeção  $P$  em  $E$ , no item anterior temos visto que

$$P = P_{\text{Im}(P), \text{N}(P)} \stackrel{\text{def.}}{=} \psi(\text{Im}(P), \text{N}(P)) \stackrel{\text{def.}}{=} \psi(\chi(P)).$$

Vale  $\chi(\psi(F, G)) \stackrel{\text{def.}}{=} (\text{Im}(P_{F,G}), \text{N}(P_{F,G})) = (F, G)$  segundo Lema 7.1.4.  $\square$

## 7.2 Involuções

**Definição 7.2.1.** Um operador linear  $S \in \mathcal{L}(E)$  cujo quadrado  $S^2 = I_E$  é a identidade chama-se de **involução** de  $E$ . Involuções são isomorfismos.

Com efeito, a condição  $S^2 = I_E$  para ser uma involução implica injetivo e sobrejetivo. Como o núcleo sempre é mínima  $\text{N}(S) = \{\mathcal{O}\}$  e a imagem sempre é máxima  $\text{Im}(S) = E$  estes dois subespaços não são úteis, não – em contraste ao caso de projeções. Os lugares deles como par de subespaços complementares ocupam, no caso de involuções, os subespaços dos pontos fixos e anti-fixos

$$F := \text{Fix}(S), \quad A := \text{aFix}(S).$$

A vinculação entre projeções  $P$  e involuções  $S$ , além de dar decomposições

$$\text{Im}(P) \oplus \text{N}(P) = E = F \oplus A$$

é a igualdade  $S = P_{F,A} - P_{A,F}$  baseada na identidade

$$\text{Im}(P) = \text{Fix}(P).$$

Nosso trajeto será assim: Suponhamos agora que  $2 := 1 + 1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ , veja Corolário 1.1.22. Primeiro mostramos que a fórmula estabelecida na dimensão 2 para a reflexão em torno de uma reta, veja (4.3.3), nos dá uma bijeção

$$\rho : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{I}, \quad P \mapsto 2P - I_E$$

entre projeções e involuções com inversa  $S \mapsto \frac{1}{2}(I_E + S)$ . Caracterizamos involuções em termos de subespaços complementares com a composição de bijeções

$$\phi := \rho \circ \psi : \mathcal{SC} \rightarrow \mathcal{I}, \quad (F, G) \mapsto \rho(P_{F,G}) = P_{F,G} - P_{G,F} =: S_{F,G}.$$

Todo é compatível no sentido que é comutativa o diagrama das 6 bijeções na Figura 7.1.

**Lema 7.2.2** (Caracterização de involução). *Seja  $S \in \mathcal{L}(E)$ , então*

$$S \text{ involução de } E \iff E = \underbrace{\text{Fix}(S)}_{=:F} \oplus \underbrace{\text{aFix}(S)}_{=:A} \quad \text{“par complementar } (F, A)\text{”}$$

Além disso uma involução  $S$  é da forma  $S = P_{F,A} - P_{A,F}$ .

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Cada um elemento  $x \in \text{Fix}(S) \cap \text{aFix}(S)$  é nulo porque  $x = Sx = -x$ . Os elementos  $v \in E$  são da forma  $v = Pv + Qv$  onde  $Pv := \frac{1}{2}(v + Sv)$  e  $Qv := \frac{1}{2}(v - Sv)$ . Mas  $S^2 = I_E$  implica  $S(Pv) = Pv$  e  $S(Qv) = -Qv$ .

“ $\Leftarrow$ ” Como  $E = \text{Fix}(S) \oplus \text{aFix}(S)$  os elementos  $v \in E$  são da forma  $v = f + a$  para únicos elementos  $f \in \text{Fix}(S)$  e  $a \in \text{aFix}(S)$ , veja Teorema 2.3.4. Como  $S$  é linear obtemos

$$S^2v = S(S(f + a)) = S(Sf + Sa) = S(f - a) = Sf - Sa = f + a = v$$

para todos os  $v \in E$ . “ $S = S_{F,A}$ ” Escrevendo  $v \in E$  como  $v = f + a$  obtemos

$$Sv = S(f + a) = Sf + Sa = f - a = P_{F,A}v - P_{A,F}v$$

segundo Definição 7.1.3. □

### Involuções e projeções

**Teorema 7.2.3.** *Seja  $1 + 1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ . A seguinte aplicação é uma bijeção*

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{P} = \{\text{projeções em } E\} &\rightarrow \{\text{involuções em } E\} = \mathcal{I} \\ P &\mapsto 2P - I_E =: S_P \end{aligned}$$

com inversa  $\rho^{-1} =: \gamma : S \mapsto \frac{1}{2}(I_E + S)$ . As projeções  $\gamma(S)$  e  $\gamma(-S)$ , ou seja

$$P := \frac{1}{2}(I_E + S), \quad Q := \frac{1}{2}(I_E - S)$$

satisfazem  $P + Q = I_E$  e  $P - Q = S$ .

*Demonstração.* Seja  $I = I_E$ . BEM DEFINIDO.  $(2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I = I$ .  
 INJETIVO. Suponha  $2P - I = 2\tilde{P} - I$ , adicione  $-I$  para obter  $2P = 2\tilde{P}$ . Então  $P = \tilde{P}$  segundo Corolário 1.1.22.

SOBREJETIVO. Dado uma involução  $S$  em  $E$ , defina  $P := \gamma(S) = \frac{1}{2}(I + S)$  para obter  $\rho(P) = 2P - I = (I + S) - I = S$ .

INVERSA. Dada uma involução  $S$  em  $E$ , no item anterior vimos que  $S = \rho(\gamma(S))$ . De outro lado  $\gamma(\rho(P)) = \gamma(2P - I) = \frac{1}{2}(I + (2P - I)) = P$ .  $\square$

### Involuções e subespaços complementares

**Definição 7.2.4** (Involução/reflexão em torno de  $F$  ao longo  $G$ ). Seja  $(F, G)$  um par de subespaços complementares de  $E$ , escreva  $v \in E = F \oplus G$  na forma  $v = f + g$  com únicos elementos  $f \in F$  e  $g \in G$ , veja Teorema 2.3.4. A aplicação

$$S_{F,G} := P_{F,G} - P_{G,F}: E \rightarrow E \quad (7.2.1)$$

é chamada de **involução (ou reflexão) de  $E$  em torno de  $F$  ao longo  $G$** .

Vamos justificar chamar  $S_{F,G}$  de involução em torno de  $F$  ao longo  $G$ :

**Lema 7.2.5.** *A aplicação  $S_{F,G}$  definida acima é uma involução de  $E$ . Os pontos fixos e anti-fixos contém respectivamente  $F$  e  $G$ , em símbolos*

$$F \subset \text{Fix}(S_{F,G}), \quad G \subset \text{aFix}(S_{F,G}). \quad (7.2.2)$$

Valem igualdades nos casos  $\dim E < \infty$  ou  $1 + 1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ .

Ter igualdades em (7.2.2) é importante para consistência: como  $S_{F,G}$  e uma involução o Lema 7.2.2 aplica e fala que  $S_{F,G} = S_{\text{Fix}(S_{F,G}), \text{aFix}(S_{F,G})}$ . Então espera-se igualdade dos pares  $(F, G) = (\text{Fix}(S_{F,G}), \text{aFix}(S_{F,G}))$ .

*Demonstração.* Dado  $v \in E$ , então  $\exists! f \in F$  e  $\exists! g \in G$  tal que  $v = f + g$ .

**Linearidade:** É óbvio como  $S_{F,G}$  é soma de dois operadores lineares.

**$S^2 = \mathbf{I}_E$ :** Usamos a definição de  $S := S_{F,G}$  e Lema 7.1.4 para obter

$$\begin{aligned} S^2 v &= S((P_{F,G} - P_{G,F})(f + g)) \\ &= S(f - g) \\ &= (P_{F,G} - P_{G,F})(f - g) \\ &= f - (-g) \\ &= v. \end{aligned}$$

**$G = \text{aFix}(S_{F,G})$ :** Como  $\text{aFix}(S_{F,G}) = \text{Fix}(S_{G,F})$  o próximo item aplica.

**$F = \text{Fix}(S_{F,G})$ :** 'C' Seja  $f \in F$ . Como  $F = \text{Im}(P_{F,G}) = \text{Fix}(P_{F,G})$  e  $F = \text{N}(P_{G,F})$  obtemos  $Sf = P_{F,G}f - P_{G,F}f = f$ .

'D' **Caso  $1 + 1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ :** Escreva  $x \in \text{Fix}(S) \subset E$  unicamente na forma  $x = f + g$  onde  $f \in F$  e  $g \in G$ . Então

$$f + g = x = Sx = P_{F,G}(f + g) - P_{G,F}(f + g) = f - g.$$

Assim  $g + g = \mathcal{O}$ . Segundo Corolário 1.1.22 obtemos  $g = \mathcal{O}$ . Então  $x = f \in F$ .  
 '⊃' **Caso  $\dim E < \infty$ :** Como  $(F, G) \in \mathcal{SC}$  e segundo Lema 7.2.2 ( $S^2 = I_E$ )

$$F \oplus G = E = \text{Fix}(S) \oplus \text{aFix}(S).$$

Então aplicando a fórmula (7.0.2) a cada uma soma direta nos da as igualdades

$$\dim F + \dim G = \dim E = \dim \text{Fix}(S) + \dim \text{aFix}(S).$$

Como  $0 \leq \dim F \leq \dim \text{Fix}(S)$  e  $0 \leq \dim G \leq \dim \text{aFix}(S)$  segundo Teorema 3.2.1 (c), as dimensões devem ser iguais, ou seja

$$\dim F = \dim \text{Fix}(S), \quad \dim G = \dim \text{aFix}(S).$$

Mas, segundo Teorema 3.2.1 (d), inclusão com a mesma dimensão implica igualdade, assim  $F = \text{Fix}(S)$  e  $G = \text{aFix}(S)$ .  $\square$

**Exercício 7.2.6.** Faça um desenho de  $E = \mathbb{R}^2$  com dois subespaços  $F \neq G$  de dimensão 1. Ilustre para varias escolhas de  $v \in E, F, G$  a imagem  $S_{F,G}v$  usando os vetores (pensa em flechas)  $P_{F,G}v$  e  $-P_{G,F}v$ .

## 7.3 Exercícios

Seja  $E$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ .

1. No plano  $\mathbb{R}^2$ , considere as retas  $F_1$  e  $F_2$ , definidas respectivamente pelas equações  $y = ax$  e  $y = bx$ , onde  $a \neq b$  são números reais.
  - (a) Exprima  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  como soma de um vetor de  $F_1$  e um de  $F_2$ .
  - (b) Seja  $P = P_{F_1, F_2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  a projeção sobre  $F_1$  paralelamente a  $F_2$ . Obtenha a matriz  $[P]$  de  $P$ .
  - (c) Encontre a matriz  $[S]$  da reflexão  $S = S_{F_2, F_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , em torno da reta  $F_2$ , paralelamente a  $F_1$ .
2. Exprima  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  como soma de um vetor do plano  $F_1$ , cuja equação é  $x + y - z = 0$ , com um vetor da reta  $F_2$ , gerada pelo vetor  $(1, 2, 1)$ . Conclua que  $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ . Determine a matriz  $[P]$  da projeção  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que tem imagem  $F_1$  e núcleo  $F_2$ .
3. Dado  $P \in \mathcal{L}(E)$ , *prove* ou *desprove*:
  - (a)  $E = \text{N}(P) \oplus \text{Im}(P) \Rightarrow P$  é projeção de  $E$ .
  - (b)  $E = \text{N}(P) + \text{Im}(P) \Rightarrow P$  é projeção de  $E$ .
  - (c)  $P$  é projeção  $\Leftrightarrow I - P$  é projeção.
  - (d)  $P$  é projeção  $\Leftrightarrow \text{N}(P) = \text{Im}(I - P) \quad (\Leftrightarrow \text{N}(I - P) = \text{Im}(P))$ .

4. Sejam  $F_1, F_2 \subset E$  subespaços com  $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E < \infty$ . Prove

$$E = F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}.$$

5. Sejam  $P_1, \dots, P_n : E \rightarrow E$  operadores lineares tais que

$$P_1 + \dots + P_n = I \quad \text{e} \quad \forall i \neq j : P_i P_j = \mathcal{O}.$$

Prove que estes operadores são projeções.

6. Sejam  $P, Q \in \mathcal{L}(E)$  projeções e  $1+1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ , prove que são equivalentes:

- (a)  $P + Q$  é uma projeção;
- (b)  $PQ + QP = \mathcal{O}$ ;
- (c)  $PQ = QP = \mathcal{O}$ .

[Para provar (b)  $\Rightarrow$  (c), multiplique à esquerda e à direita da hipótese  $PQ = -QP$  por  $P$  e conclua  $\mathcal{O} = PQP$ . Consequentemente  $\mathcal{O} = \mathcal{O}Q = PQPQ = P(-PQ)Q = -PQ$ .]

7. Seja  $E = F_1 \oplus F_2$ . O **gráfico** de uma transformação linear  $B : F_1 \rightarrow F_2$  é o subconjunto  $\text{graph}(B) := \{v + Bv \mid v \in F_1\}$  de  $E$ . Prove que

- (a)  $\text{graph}(B)$  é um subespaço de  $E$ ;
- (b) a projeção  $P = P_{F_1, F_2} : E \rightarrow E$ , restrita a  $\text{graph}(B)$ , define um isomorfismo entre  $\text{graph}(B)$  e  $F_1$ .

## Capítulo 8

# Subespaços invariantes

Durante<sup>1</sup> o presente Capítulo 8 denotamos de  $A \in \mathcal{L}(E)$  uma transformação linear, alternativamente chamado de **operador linear**

$$A: E \rightarrow E, \quad E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \quad n := \dim E < \infty$$

num espaço vetorial  $E$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e de dimensão *finita*. No início do capítulo a dimensão pode ser também *infinita* no qual caso usamos a notação

$$A: X \rightarrow X, \quad X = (X, +, \cdot, \mathbb{K}), \quad \dim X \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

para indicar esta generalidade maior.

Ate o fim da Seção 8.1 *Autovalores e autovetores* o corpo  $\mathbb{K}$  pode ser qualquer um e a dimensão do espaço vetorial pode ser infinito.<sup>2</sup> Na Seção 8.2 *Polinômio característico* aparece a) um polinômio e por isso suponhamos que o corpo  $\mathbb{K}$  seja infinito (como explicado no Apêndice B) e aparece b) o determinante e assim a dimensão do espaço vetorial deve ser finita. Na Seção 8.3 *Existência no caso real e complexo* encontramos subespaços invariantes nos casos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , porque temos um ótimo conhecimento quantos raízes um polinômio complexo ou real tem pelo mínimo; veja Apêndice B.

### Motivação – diagonalizável e triangularizável

A matriz  $[A]_{\mathcal{B}}$  de  $A$  depende da base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Assim chegamos naturalmente ao desejo de escolher uma base  $\mathcal{X}$  tal que a matriz toma uma forma simples, por exemplo uma forma diagonal

$$[A]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} =: \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]. \quad (8.0.1)$$

<sup>1</sup>Cap. 8 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

<sup>2</sup> exceto na parte b) da Proposição 8.1.5 quando aparece o determinante

Tal simplificação máxima, para uma matriz diagonal, é realmente possível para a classe de operadores as quais admitem uma base composto de autovetores.

Um exemplo, no caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , é a classe dos operadores auto-adjuntos – as quais pode-se definir depois introduzir mais uma estrutura no espaço vetorial – um chamado produto interno o que vamos estudar no Capítulo 9.

Um exemplo, no caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , é a classe dos operadores hermitianos as quais estudamos no Capítulo 13 junto com produtos hermitianos.

Com uma matriz diagonal ficamos muito feliz. Mas se diagonalizar não da, o próximo nível de felicidade é quando existe uma base que faz a matriz **triangular superior**, ou seja

$$[A]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (8.0.2)$$

onde os campos vazios em baixo da diagonal por convenção tem valor  $0 \in \mathbb{K}$ .

**Definição 8.0.1.** a) Uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E)$  que admite uma base  $\mathcal{X}$  tal que a matriz correspondente é diagonal é chamado de **diagonalizável**.

b) Uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E)$  que admite uma base  $\mathcal{X}$  tal que a matriz correspondente é triangular superior é chamado de **triangularizável**.

### Subespaços invariantes

**Definição 8.0.2.** Um subespaço  $F \subset X$  é chamado de **invariante por  $A$**  se a imagem  $AF \subset F$  é contido no subespaço. Neste caso o operador linear  $A|_F : F \rightarrow F, f \mapsto Af$ , é chamado de **restrição de  $A$** .

**Exemplo 8.0.3** (Subespaços invariantes). Seja  $A \in \mathcal{L}(X)$ .

- a)  $F = \{\mathcal{O}\}$  e  $F = X$ . (os subespaços invariantes triviais)  
 b)  $F = N(A), \text{Im}(A), \text{Fix}(A), \text{aFix}(A)$ . (subespaços invariantes canônicos de  $A$ )

**Lema 8.0.4** (Dimensão 1). *Seja  $A \in \mathcal{L}(X)$  e  $F$  um subespaço de  $\dim F = 1$ .*

$$F \text{ invariante por } A \Leftrightarrow \exists \lambda = \lambda(A) \in \mathbb{K} : Af = \lambda f \forall f \in F.$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Fixe  $\xi \in F$  não-nulo, assim  $\mathcal{B} = \{\xi\}$  é base de  $F$ . Seja  $f \in F$  não-nulo (para  $f = \mathcal{O}$  vale  $A\mathcal{O} = \lambda\mathcal{O}$  para qualquer um escalar  $\lambda$ ). Então  $f = \alpha\xi$  para um único escalar não-nulo  $\alpha$ . Como  $F$  é invariante por  $A$  temos  $A\xi \in F$  e assim  $A\xi = \lambda\xi$  para um único escalar  $\lambda = \lambda(A, \xi)$ . Vale

$$Af = A(\alpha\xi) = \alpha A\xi = \alpha(\lambda\xi) = \lambda(\alpha\xi) = \lambda f.$$

O  $\lambda(A, \xi)$  depende de  $\xi$ ? Repetindo o argumento para  $\tilde{\xi} \in F$  não-nulo obtemos

$$Af = A(\tilde{\alpha}\tilde{\xi}) = \tilde{\alpha}A\tilde{\xi} = \tilde{\alpha}(\tilde{\lambda}\tilde{\xi}) = \tilde{\lambda}(\tilde{\alpha}\tilde{\xi}) = \tilde{\lambda}f.$$

Assim  $\lambda f = \tilde{\lambda}f$ . Daí  $f \neq \mathcal{O}$  implica que  $\lambda(A, \xi) = \tilde{\lambda}(A, \tilde{\xi})$ . Então os escalares  $\lambda = \tilde{\lambda}$  são iguais e não dependem nem de  $\xi$  nem de  $\tilde{\xi}$ , só de  $A$ .

“ $\Leftarrow$ ” Um subespaço é fechado sob multiplicação escalar.  $\square$

**Lema 8.0.5** (Dimensão 2). *Seja  $\{u, v\} \subset X$  um subconjunto LI, então*

$$\langle u, v \rangle \text{ invariante por } A \Leftrightarrow Au, Av \in \langle u, v \rangle.$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Invariância por  $A$  junto com o fato que  $u, v \in \langle u, v \rangle$ .  
 “ $\Leftarrow$ ” Como  $\mathcal{B} = \{u, v\}$  é uma base de  $\langle u, v \rangle$ , todo  $f \in \langle u, v \rangle$  é da forma  $f = \alpha u + \beta v$  para escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Assim  $Af = \alpha Au + \beta Av$  é elemento de  $\langle u, v \rangle$ , porque  $Au$  e  $Av$  são e porque o subespaço  $\langle u, v \rangle$  é fechado sob  $\cdot$  e  $+$ .  $\square$

## 8.1 Autovalores e autovetores

**Definição 8.1.1** (autovalor, autovetores, espectro). *Seja  $A \in \mathcal{L}(X)$ .*

- a) Por definição chama-se um vetor não-nulo

$$v \in X \setminus \{\mathcal{O}\} \text{ autovetor de } A \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}: Av = \lambda v$$

em palavras, se a imagem  $Av$  é um múltiplo de  $v$ . Neste caso o escalar  $\lambda$  é chamado de **autovalor de  $A$**  e  $v$  um **autovetor associado a  $\lambda$** . Às vezes é prático denotar um autovetor associado a  $\lambda$  da forma  $v_\lambda$ .

- b) O **espectro de  $A$**  é o conjunto composto de

$$\{\text{todos os autovalores de } A\} =: \text{spec } A.$$

**Observação 8.1.2.** Tendo em vista o Lema 8.0.4 podemos resumir

$$\text{achar autovetores} \quad \Leftrightarrow \quad \text{achar subespaços invariantes de dimensão 1.}$$

**Exercício 8.1.3** (Autovetores não são únicos).

- a) Os múltiplos não-nulos de um autovetor são autovetores.  
 b) Somas de autovetores associados ao mesmo autovalor  $\lambda$  são autovetores.

**Definição 8.1.4** (Autosubespaço e multiplicidade geométrica). *Seja  $A \in \mathcal{L}(X)$ .*

- a) Dado um autovalor  $\lambda$  de  $A$ , então o conjunto

$$E_\lambda = E_\lambda(A) := \{\text{todos os autovetores de } A \text{ associado a } \lambda\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

é um subespaço de  $X$  chamado de **autosubespaço** associado ao autovalor  $\lambda$ . Note que  $E_\lambda \neq \{\mathcal{O}\}$ .

- b) A **multiplicidade geométrica** de um autovalor  $\lambda$  é a dimensão

$$g_\lambda = g_\lambda(A) := \dim E_\lambda$$

do autosubespaço.

**Proposição 8.1.5.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(X)$  e  $\lambda \in \text{spec } A$ , então valem os seguintes:*

- a)  $E_\lambda = N(\lambda I_X - A)$ ;
- b)  $\lambda \in \text{spec } A \Leftrightarrow \lambda I_X - A$  não admite inversa;
- c)  $E_\lambda \subset X$  é subespaço invariante por  $A \in \mathcal{L}(X)$ ;
- d)  $\forall \xi \in E_\lambda \setminus \{\mathcal{O}\}$ : o subespaço  $\langle \xi \rangle$  é invariante por  $A \in \mathcal{L}(X)$ ;
- e) Um subespaço 1-dimensional invariante por  $A$  é composto de autovetores.

*Demonstração.* Abreviamos  $I_E$  e  $I_X$  de  $I$ .

- a)  $Av = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda I - A)v = \mathcal{O}$ .
- b)  $\lambda \in \text{spec } A \Leftrightarrow Av = \lambda v$  para um  $v \neq \mathcal{O} \Leftrightarrow (\lambda I - A)v = \mathcal{O}$  para um  $v \neq \mathcal{O} \Leftrightarrow \lambda I - A$  não injetivo  $\Leftrightarrow \lambda I - A$  não invertível (Cor. 6.5.2 e Prop. 6.4.4).
- c) Para  $v \in E_\lambda$  vale  $Av = \lambda v \in E_\lambda$  como o subespaço  $E_\lambda$  é fechado sob “.”.
- d) Seja  $\alpha \xi \in \langle \xi \rangle$ , então  $A(\alpha \xi) = \alpha A\xi = \alpha \lambda \xi \in \langle \xi \rangle$ .
- e) Lema 8.0.4. □

**Teorema 8.1.6** (Autovetores associado a autovalores diferentes são LI). *Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  são autovalores dois-a-dois diferentes de  $A \in \mathcal{L}(X)$ , então qualquer escolha  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  de autovetores associados forma um conjunto LI.*

*Demonstração.* Indução sobre o número  $k$  de autovalores.  
 $k = 1$ . Como é autovetor  $\xi_1$  é não-nulo, assim  $\{\xi_{\lambda_1}\}$  é LI.  
 $k - 1 \Rightarrow k$ . Dado escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , suponhamos que

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k = \mathcal{O}.$$

Aplicamos  $A$  para obtemos

$$\alpha_1 \underbrace{A\xi_1}_{\lambda_1 \xi_1} + \dots + \alpha_k \underbrace{A\xi_k}_{\lambda_k \xi_k} = A\mathcal{O} = \mathcal{O}.$$

Adicionamos a esta equação  $(-\lambda_k)$  vezes a equação anterior, obtemos

$$\alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_k)}_{\neq 0} \xi_1 + \dots + \alpha_{k-1} \underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0} \xi_{k-1} + \mathcal{O} = \mathcal{O}.$$

Pela hipótese  $k - 1$  da indução  $\{\xi_1, \dots, \xi_{k-1}\}$  é LI, então cada um coeficiente anula-se, conseqüentemente  $0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1}$ . Com estes valores a equação no início da indução reduz-se a  $\alpha_k \xi_k = \mathcal{O}$ , então como um autovetor não se anula segue que  $\alpha_k = 0$  segundo (1.1.3). □

**Corolário 8.1.7** (Não tem mais autovalores como  $\dim E$ ).

$$n := \dim E \quad \Rightarrow \quad |\text{spec } A| \leq n.$$

*Demonstração.* Se por absurdo  $|\text{spec } A| > n$ , então segundo Teorema 8.1.6 pode-se escolher um conjunto LI composto de mais como  $\dim E$  elementos. Mas isso contradiz Corolário 3.1.15. □

**Exemplos**

**Exemplo 8.1.8.** Para  $A \in \mathcal{L}(X)$  tem-se autosubespaços

$$N(A) = E_0, \quad \text{Fix}A = E_1, \quad \text{aFix}A = E_{-1},$$

sempre se um dos três subespaços é não-trivial.

**Exemplo 8.1.9** (Rotações, reflexões, cisalhamento). Denotamos de  $A$  o operador linear na consideração e de  $E, F$  subespaços invariantes por  $A$  dos quais  $E$  tem dimensão 1 – então  $E$  é autosubespaço, enquanto  $F$  não necessariamente é.

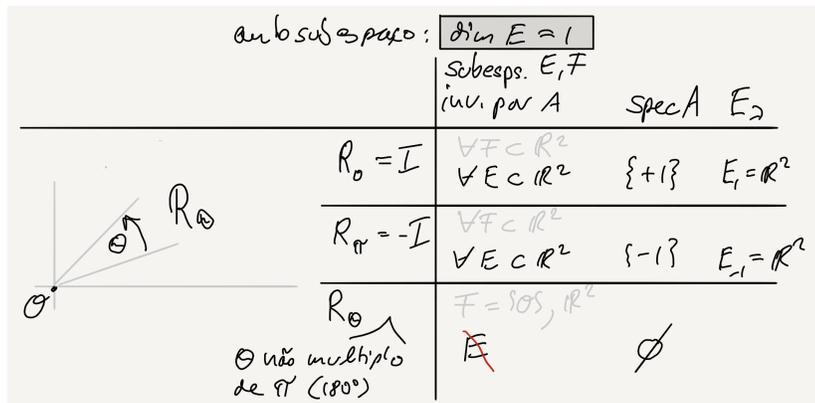


Figura 8.1: Rotação  $R_\theta$  no plano pelo ângulo  $\theta$

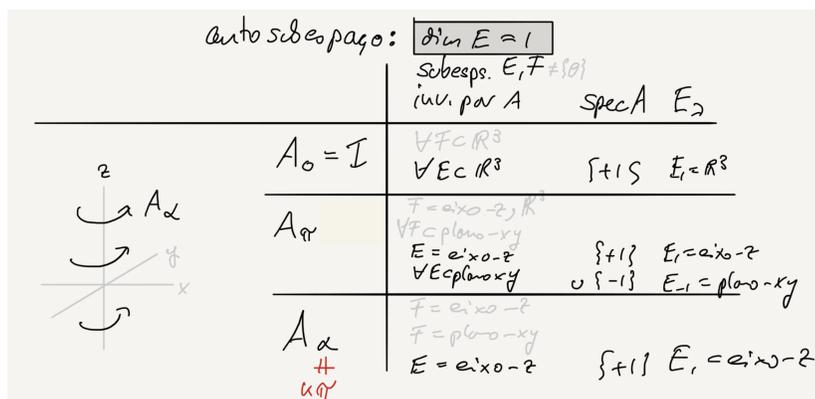


Figura 8.2: Rotação  $A_\alpha$  no espaço em torno do eixo  $z$  pelo ângulo  $\alpha$

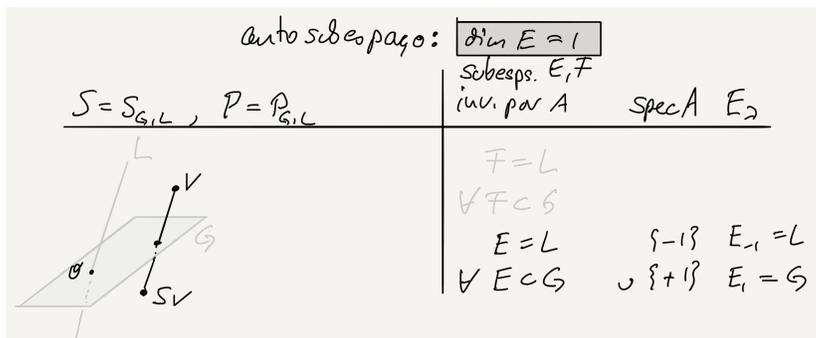


Figura 8.3: Reflexão  $S = 2P - I$  sobre  $G$  paralelamente  $L$

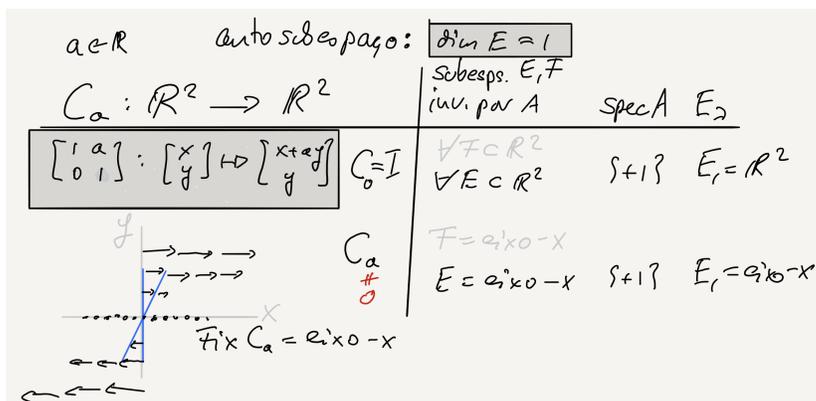


Figura 8.4: Cisalhamento  $C_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado  $a \in \mathbb{R}$

### Diagonalização

**Corolário 8.1.10** (Diagonalizável). *Se  $A \in \mathcal{L}(E)$  possui  $n = \dim E < \infty$  autovalores dois-a-dois diferentes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , então obtém-se uma matriz diagonal*

$$[A]_{\mathcal{X}} = \text{diag} [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

veja (8.0.1), para qualquer seleção  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de autovetores associados.

*Demonstração.* A  $i$ -ésima coluna da matriz  $[A]_{\mathcal{X}}$  é composto dos coeficientes de

$$A\xi_i = \lambda_i \xi_i = \xi_1 \cdot 0 + \dots + \xi_{i-1} \cdot 0 + \xi_i \cdot \lambda_i + \xi_{i+1} \cdot 0 + \dots + \xi_n \cdot 0$$

veja (5.2.1). □

O exercício seguinte diz que um operador  $A \in \mathcal{L}(E)$  é diagonalizável se, e somente se, existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $E$  composto de autovetores de  $A$ .

**Exercício 8.1.11** (Matrizes diagonais). Mostre o seguinte.

- (i) A matriz de um operador  $A \in \mathcal{L}(E)$  em respeito a uma base  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  composto de autovetores é a matriz diagonal

$$[A]_{\mathcal{X}} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

cujas entradas ao longo da diagonal são os autovalores correspondentes.

- (ii) Vice versa, se a matriz de um operador  $A \in \mathcal{L}(E)$  em respeito a uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$  já é uma matriz diagonal

$$[A]_{\mathcal{B}} = \text{diag}[a_{11}, \dots, a_{nn}]$$

então cada um elemento  $a_{ii}$  na diagonal é autovalor de  $A$  e  $\xi_i$  é autovetor.

**Comentário 8.1.12** (Matrizes triangulares – autovalores ainda na diagonal). Se a matriz  $[A]_{\mathcal{B}}$  só é triangular cada um elemento  $a_{ii}$  na diagonal continua ser autovalor de  $A$ , mas os elementos da base  $\mathcal{B}$  geralmente não são mais autovetores. Em vez de construir para os  $a_{ii}$  autovetores a mão, é recomendável esperar à introdução do polinômio característico, veja Lema 8.2.3.

### Aplicação: cálculo de potência de operadores

Seja  $\mathcal{B}$  uma base de  $E$  e seja  $\mathcal{X}$  uma base composto de autovetores do operador  $A \in \mathcal{L}(E)$  com autovalores associados  $\lambda_i$ . Então

$$\text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = [A]_{\mathcal{X}, \mathcal{X}} = [I_E]_{\mathcal{B}, \mathcal{X}} [A]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} [I_E]_{\mathcal{X}, \mathcal{B}}$$

em outros símbolos, denotando de  $\mathbf{p} = [I_E]_{\mathcal{X}, \mathcal{B}}$  a matriz de passagem

$$\text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = \mathbf{p}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{p}, \quad \mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}.$$

Resolvemos para  $\mathbf{a} = \mathbf{p}^{-1} \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \mathbf{p}$  o que, para  $k \in \mathbb{N}$ , traduz em

$$\mathbf{a}^k = \mathbf{p} \text{diag}[\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k] \mathbf{p}^{-1}.$$

Observe que no lado direito só temos que multiplicar três matrizes. O Exercício 1 na Seção 8 ilustra esta técnica de calcular potências de matrizes e operadores.

## 8.2 Polinômio característico

Nesta Seção 8.2, como utilizamos o determinante, suponhamos que  $E$  é um espaço vetorial de **dimensão  $n$  finita** e para podermos trabalhar com polinômios suponhamos que o corpo  $\mathbb{K}$  **seja infinito**, veja Apêndice B.

**Teorema 8.2.1** (Polinômio característico). *Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$  um operador linear.*  
a) *As raízes<sup>3</sup> do **polinômio característico** de  $A$*

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &:= \det(\lambda I_E - A) && , \lambda \in \mathbb{K} \\ &= \det(\lambda \mathbb{1}_n - \mathbf{a}) && , \mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B}} \\ &=: p_{\mathbf{a}}(\lambda) \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

onde  $\mathcal{B}$  é qualquer base ordenada de  $E$ , são os autovalores de  $A$ , assim

$$\text{spec } A = \{\lambda_0 \in \mathbb{K} \mid p_A(\lambda_0) = 0\}.$$

A **ordem**  $m$  de uma raiz  $\lambda_0$ ,<sup>4</sup> veja (B.3.1), chama-se de **multiplicidade algébrica** do autovalor  $\lambda_0$  e usamos o símbolo  $\text{alg}_{\lambda_0} := m$ .

b) Dada uma matriz quadrada  $\mathbf{a} \in M(n \times n; \mathbb{K})$ , então o polinômio  $p_{\mathbf{a}} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$  é mônico e de grau  $n$ .

*Demonstração.* a) Segundo Proposição 8.1.5 b) vale que  $\lambda \in \text{spec } A \Leftrightarrow \lambda I_E - A$  não é invertível. Mas isso é equivalente que o determinante do operador anula-se, ou seja  $\det(\lambda I_E - A) = \det(\lambda \mathbb{1}_n - [A]_{\mathcal{B}}) = 0$ , veja Teorema A.4.5.

b) Segue da fórmula (D.3.1) em [Sal19] a qual não vale só para o corpo  $\mathbb{R}$ , mas também para gerais corpos infinitos  $\mathbb{K}$ .  $\square$

**Comentário 8.2.2** (A convenção (8.2.1) faz  $p_A(\lambda)$  mônico). Uns autores usam a ordem oposta  $\det(A - \lambda I_E)$  o que difere de  $p_A(\lambda)$  por um fator  $(-1)^n$ , veja por exemplo [Sal19, Ap.D.3]. No todo caso as raízes são as mesmas. Mas o polinômio  $p_A(\lambda)$  é mônico, veja Definição B.3.3, o outro só quando  $n$  é par.

Teorema 8.2.1 reduz a existência de autovalores, então autovetores (ou equivalentemente subespaços invariantes de dimensão 1), a existência de raízes de um polinômio com coeficientes em  $\mathbb{K}$  e de grau  $n = \dim E$ . Nos casos importantes  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  e  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , tratados na Seção 8.3, tem-se conhecimento ótimo sobre raízes, veja Apêndice B.4.

**Lema 8.2.3.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$  e seja  $\mathcal{B}$  base de  $E$ . Se a matriz  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B}}$  é triangular, então os elementos  $a_{ii} \in \mathbb{K}$  da diagonal são autovalores do operador  $A$ .*

*Demonstração.* O determinante de uma matriz triangular

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1}_n - \mathbf{a}) = (\lambda - a_{11}) \cdots (\lambda - a_{nn})$$

é o produto dos elementos da diagonal.  $\square$

<sup>3</sup> as **raízes** de um polinômio  $p$  são os pontos  $\lambda$  nos quais o polinômio anula-se  $p(\lambda) = 0$

<sup>4</sup> o maior inteiro  $m$  tal que  $p_{\mathbf{a}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m \cdot q(\lambda)$ , onde  $q(\lambda)$  é ainda um polinômio

**Lema 8.2.4** (Polinômio característico da inversa). *Para  $A \in \mathcal{L}(E)$  invertível*

$$p_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{(-\lambda)^{\dim E}}{\det A} \cdot p_A\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

*Demonstração.*  $p_{A^{-1}}(\lambda) \det A = \det((\lambda I_E - A^{-1})A) = \det(-\lambda(\frac{1}{\lambda}I_E - A))$ .  $\square$

**Lema 8.2.5** (Restrição a subespaço invariante – divisor). *Dado um operador linear  $A: E \rightarrow E$  e um subespaço invariante  $F \subset E$ . Seja  $A': F \rightarrow F$  a restrição de  $A$ . Então o polinômio característico  $p_{A'}$  é um divisor do polinômio característico  $p_A$ , ou seja*

$$p_A(\lambda) = p_{A'}(\lambda) \cdot q(\lambda)$$

para um polinômio  $q(\lambda)$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{a}'$  a matriz de  $A'$  numa base  $\mathcal{B}'$  de  $F$  e  $\mathbf{a}$  a matriz de  $A$  numa base  $\mathcal{B}$  contendo  $\mathcal{B}'$ . Seja  $k = \dim F$  e  $n = \dim E$ , então

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}' & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{pmatrix}, \quad \lambda \mathbb{1}_n - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_k - \mathbf{a}' & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \lambda \mathbb{1}_{n-k} - \mathbf{c} \end{pmatrix}.$$

A fórmula (A.4.3) do determinante de uma matriz triangular de blocos diz que

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &:= \det(\lambda \mathbb{1}_n - \mathbf{a}) \\ &= \det(\lambda \mathbb{1}_k - \mathbf{a}') \cdot \det(\lambda \mathbb{1}_{n-k} - \mathbf{c}) \\ &= p_{A'}(\lambda) \cdot q(\lambda) \end{aligned}$$

onde  $q(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1}_{n-k} - \mathbf{c})$ .  $\square$

### Multiplicidades – desigualdade e igualdade

**Proposição 8.2.6** (Desigualdade). *Para os autovalores  $\lambda_0 \in \text{spec } A$  vale que*

$$g_{\lambda_0} := \dim E_{\lambda_0} \leq \text{alg}_{\lambda_0}. \quad (8.2.2)$$

- **Igualdade** vale, segundo Proposição 8.2.7, para operadores auto-adjuntos (Teorema 11.3.3), ortogonais,<sup>5</sup> hermitianos, e unitários.
- **Desigualdade estrita** tem-se para o cisalhamento  $C_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ , veja Figura 8.4. No caso  $C_1$  o leitor pode verificar que  $g_1 = 1 < 2 = \text{alg}_1$ .

*Demonstração.* Como  $E_{\lambda_0}$  é um subespaço invariante de  $A$  (Proposição 8.1.5) consideramos a restrição  $A'$  de  $A$  a  $E_{\lambda_0}$  a qual  $A' = \lambda_0 I: E_{\lambda_0} \rightarrow E_{\lambda_0}$  é multiplicação por  $\lambda_0$ . Note que o polinômio característico da restrição é

$$p_{A'}(\lambda) = \det(\lambda I_{E_{\lambda_0}} - \lambda_0 I_{E_{\lambda_0}}) = (\lambda - \lambda_0)^{g_{\lambda_0}}.$$

<sup>5</sup> Isso não implica diagonalizável, poderia ter 'falta' de autovalores: A rotação por  $\theta = \pi/2$  no plano é ortogonal mas não possui autovalores (reais).

Pelo Lema 8.2.5 o polinômio característico de  $A$  é um múltiplo do polinômio característico da restrição  $A'$ , ou seja

$$p_A(\lambda) = p_{A'}(\lambda) \cdot q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{g_{\lambda_0}} \cdot q(\lambda)$$

para um polinômio  $q(\lambda)$ . Mas  $q$  também poderia ter, ou não, uma raiz no ponto  $\lambda_0$  e conseqüentemente ser da forma  $q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \cdot \tilde{q}(\lambda)$  para um polinômio  $\tilde{q}$ , veja Teorema B.3.1. Isso prova que a ordem da raiz  $\lambda_0$  do polinômio característico de  $A$  é pelo menos  $g_{\lambda_0}$ .  $\square$

**Proposição 8.2.7** (Igualdade). *Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$  um operador linear. Suponha que  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  é uma base de  $E$  composto de autovetores de  $A$ . Sejam  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$  os autovalores (2-a-2 diferentes) de  $A$ . Então vale que*

$$E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r} = E, \quad g_{\lambda_i} = \text{alg}_{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Além disso o subconjunto  $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$  composto dos autovetores associados ao autovalor  $\lambda_i$  é uma base do autosubespaço  $E_{\lambda_i}$ .

*Demonstração.* Conforme Teorema 8.1.6 a soma é direta  $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r} \subset E$ . Daí  $g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_r} \leq \dim E = n$ . Seja  $F_i$  o subespaço gerado por  $\mathcal{B}_i$ . Como  $\mathcal{B}_i \subset E_{\lambda_i}$  segue a inclusão  $F_i \subset E_{\lambda_i}$  e daí  $|\mathcal{B}_i| \leq g_{\lambda_i}$ . Obtemos as duas desigualdades

$$n = |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_1| + \dots + |\mathcal{B}_r| \leq g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_r} \leq n. \quad (8.2.3)$$

As duas desigualdades em (8.2.3) são igualdades. Daí  $\dim(E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}) = \dim E$  e por isso  $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r} = E$  segundo Teorema 3.2.1 (d). Além disso as quatro igualdades em (8.2.3), junto com  $0 \leq |\mathcal{B}_i| \leq g_{\lambda_i}$ , mostram que  $|\mathcal{B}_i| = g_{\lambda_i}$  para todos os  $i$ . Por isso  $F_i = E_{\lambda_i}$  e  $\mathcal{B}_i$  é base de  $E_{\lambda_i}$ . De (8.2.2) obtemos

$$n = g_{\lambda_1} + \dots + g_{\lambda_r} \leq \text{alg}_{\lambda_1} + \dots + \text{alg}_{\lambda_r} \leq \deg(p_A) = n$$

onde a ultima desigualdade é o fato que um polinômio não tem mais raízes como indica o seu grau. As desigualdades são igualdades e, junto com  $0 \leq g_{\lambda_i} \leq \text{alg}_{\lambda_i}$ , segue que  $g_{\lambda_i} = \text{alg}_{\lambda_i}$  para todos os  $i$ .  $\square$

## Operadores reais

### Existência de um autovalor na dimensão ímpar

**Teorema 8.2.8.** *Cada um operador linear num espaço vetorial real de dimensão ímpar possui pelo menos um autovalor.*

*Demonstração.* O polinômio característico é um polinômio real de grau ímpar e assim possui pelo menos uma raiz.  $\square$

Na dimensão par já temos visto na Figura 8.1 exemplos sem autovalores: quase todas rotações no plano.

### Triangularizável

**Teorema 8.2.9.** *Um operador linear num espaço vetorial real  $E$  de dimensão  $n$  cujo polinômio característico  $\mathbf{p}_A$  possui  $n$  raízes (reais e contadas com multiplicidade)<sup>6</sup> é triangularizável.*

O cisalhamento  $C_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , veja Figura 8.4, é triangular e seu polinômio característico tem duas raízes. Como o único subespaço invariante de dimensão 1 é o eixo- $x$  o cisalhamento não é diagonalizável.

### O polinômio característico na dimensão 2

Começamos com uma preparação técnica.

**Lema 8.2.10.** *Seja  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \xi_2\} \subset E$  LI e  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ , então o conjunto*

$$\underbrace{\{a\xi_1 + b\xi_2\}}_{=:v_1}, \underbrace{\{c\xi_1 + d\xi_2\}}_{=:v_2} \text{ é LD} \Leftrightarrow ad - bc = 0.$$

*Demonstração.* Provamos que LI é equivalente a desigualdade  $\neq 0$ . Seja  $F := \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$  com base  $\mathcal{U}$  e seja  $G := \langle v_1, v_2 \rangle$ . Então LI significa que o operador linear  $A: F \rightarrow G$  definido por  $A\xi_1 = v_1$  e  $A\xi_2 = v_2$ , assim levando base em base, é um isomorfismo segundo Teorema 6.4.7. Mas isso é equivalente a sua matriz  $[A]_{\mathcal{U}}$  ser invertível e isso a seu determinante não ser nulo  $0 \neq \det[A]_{\mathcal{U}} = ad - bc$ .  $\square$

Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$  um operador linear e  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2\}$  uma base de  $E$ . Escrevemos

$$\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

e calculamos

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &:= \det \begin{bmatrix} \lambda - \alpha & -\gamma \\ -\beta & \lambda - \delta \end{bmatrix} = (\lambda - \alpha)(\lambda - \delta) - \beta\gamma \\ &= \lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + \alpha\delta - \beta\gamma \\ &= \lambda^2 - (\text{tr } \mathbf{a})\lambda + \det \mathbf{a} \\ &= \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A. \end{aligned} \tag{8.2.4}$$

Note que traço e determinante de  $[A]_{\mathcal{B}}$  não dependem da escolha da base  $\mathcal{B}$ ; veja (5.3.6) e (5.3.4).

As colunas da matriz  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B}}$  são os coeficientes de  $A\xi_1 = \xi_1\alpha + \xi_2\beta$  e de  $A\xi_2 = \xi_1\gamma + \xi_2\delta$  segundo definição (5.2.1). Para  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $I = I_E$  obtemos

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)\xi_1 &= (\lambda - \alpha)\xi_1 - \beta\xi_2 =: v_1, \\ (\lambda I - A)\xi_2 &= -\gamma\xi_1 + (\lambda - \delta)\xi_2 =: v_2. \end{aligned}$$

<sup>6</sup> equivalentemente o polinômio característico é o produto de fatores reais do primeiro grau

Obtemos as três equivalências seguintes usando, respectivamente, Proposição 8.1.5 b), o fato que  $\{\xi_1, \xi_2\}$  é base, e **Lema** 8.2.10, a saber

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{spec } A &\Leftrightarrow \lambda I - A \in \mathcal{L}(E) \text{ não é um isomorfismo} \\ &\Leftrightarrow \{v_1, v_2\} \text{ é LD} \\ &\Leftrightarrow 0 = (\lambda - \alpha)(\lambda - \delta) - \beta\gamma \stackrel{(8.2.4)}{=} p_A(\lambda). \end{aligned}$$

Em resumo, na dimensão dois temos mostrado

$$\lambda \in \text{spec } A \text{ (ou seja } \lambda \text{ autovalor)} \quad \Leftrightarrow \quad p_A(\lambda) = 0.$$

**Teorema 8.2.11** ( $\dim E = 2$ ). *Dado um operador linear  $A \in \mathcal{L}(E)$ , então as raízes do **polinômio característico de  $A$***

$$p_A: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \lambda \mapsto \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A$$

onde

$$\text{tr } A := \text{tr } [A]_{\mathcal{B}}, \quad \det A := \det [A]_{\mathcal{B}}$$

são os autovalores de  $A$ , assim  $\text{spec } A = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid p_A(\lambda) = 0\}$ .

**Comentário 8.2.12** (Corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). As raízes de um polinômio real quadrático

$$ax^2 + bx + c = 0$$

existem no caso  $b^2 \geq 4ac$  e são dados pela fórmula

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{no caso } a = 1: \quad x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (8.2.5)$$

**Exemplo 8.2.13.** Determine o espectro e os autosubespaços da matriz real

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Uma solução. Passo 1 – autovalores.** Temos que determinar, se existir, os autovalores as quais são as raízes reais do polinômio característico

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{a}}(\lambda) &:= \lambda^2 - (\text{tr } \mathbf{a})\lambda + \det \mathbf{a} \\ &= \lambda^2 - (4 + 2)\lambda + (4 \cdot 2 - 1 \cdot 3) \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 5. \end{aligned}$$

Encontramos as raízes através da fórmula (8.2.5) obtendo

$$\lambda_{\pm} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = 3 \pm 2, \quad \lambda_- = 1, \quad \lambda_+ = 5.$$

Assim  $\text{spec } \mathbf{a} = \{1, 5\}$ .

**Passo 2 – autosubespaços.** Isto é o núcleo da matriz  $\lambda \mathbb{1} - \mathbf{a}$  para  $\lambda = 1, 5$ .

$E_1 = N(\mathbb{1} - \mathbf{a})$ : Depois calcular a matriz  $\mathbb{1} - \mathbf{a}$  escalonamos ela e resolvemos de baixo para cima, veja Exemplo 6.6.2. Ou seja

$$\mathbb{1} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{oe})} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{oe})} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O SL obtida é  $x + y = 0$  e assim  $y = -x$  para  $x \in \mathbb{R}$ . Assim  $E_1 = \mathbb{R}(1, -1)$ .  
 $E_5 = N(5\mathbb{1} - \mathbf{a})$ : Analogamente

$$5\mathbb{1} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{oe})} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O SL obtida é  $x - 3y = 0$  e assim  $x = 3y$  para  $y \in \mathbb{R}$ . Assim  $E_5 = \mathbb{R}(3, 1)$ .

**Comentário 8.2.14** (Truque de autovetores). Seja  $\mathbf{a}$  uma matriz real  $2 \times 2$  não-nula e  $\lambda$  um autovalor (real ou complexo). Então

$$\lambda\mathbb{1} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ * & * \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

se a primeira linha não é nula. Caso a primeira linha é nula, use a segunda linha, dizemos  $(\gamma, \delta)$ , para obter um autovetor  $(-\delta, \gamma)$ .

*Demonstração.* Como  $\lambda$  é autovalor, a matriz  $\lambda\mathbb{1} - \mathbf{a}$  não é invertível. Daí as duas linhas são LD, e a segunda é um múltiplo (real ou complexo) da primeira

$$\lambda\mathbb{1} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ c\alpha & c\beta \end{bmatrix}.$$

O vetor  $(-\beta, \alpha)$  está no núcleo desta matriz. □

**Exercício 8.2.15.** Determine autovalores e autosubespaços do operador linear

$$A: \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \quad a + bx \mapsto (4a + 3b) + (a + 2b)x.$$

## 8.3 Existência no caso real e complexo

Nesta seção restringimos a espaços vetoriais reais ou complexos ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) de dimensão **finita**  $n$  e a operadores lineares  $A$  **em**  $E$ , ou seja  $A \in \mathcal{L}(E)$ .

### Caso real

**Teorema 8.3.1** (Existência). *Um operador linear  $A$  num espaço vetorial real  $E$  de dimensão finita admite um subespaço invariante  $F$  de dimensão 1 ou 2.*

*Demonstração.* Teorema C.5.1 □

A rotação  $R_\theta$  no plano por um ângulo  $\theta$ , não um múltiplo inteiro de  $\pi$ , em símbolos  $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ , não tem um subespaço invariante de dimensão 1, mas de dimensão 2 – o plano mesmo. O cisalhamento  $C_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ , veja Figura 8.4, tem um subespaço invariante de dimensão 1, o eixo  $x$ , mas não de dimensão 2.

**Caso complexo**

**Teorema 8.3.2** (Existência). *Um operador linear  $A$  num espaço vetorial complexo  $E$  de dimensão finita admite um subespaço invariante  $F$  de dimensão 1. Equivalentemente  $A$  admite um autovalor.*

*Demonstração.* O polinômio característico  $p_A(\lambda)$  é um polinômio complexo e assim possui uma raiz segundo Teorema B.4.1.  $\square$

**8.4 Exercícios**

1. Seja  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (3x + y, 2x + 2y)$ .

- (a) Mostre que 4 e 1 são autovalores de  $A$ .
- (b) Ache uma base ordenada  $\mathcal{B} = (u, v)$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que

$$Au = 4u \quad \text{e} \quad Av = v.$$

- (c) Dada a matriz  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ , ache uma matriz invertível  $\mathbf{p}$  tal que

$$\mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (d) Calcule  $A^{10}$ .

2. Dado  $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ , determine os subespaços de  $\mathbb{R}^3$  invariantes por

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto a \times v,$$

onde o produto vetorial  $\times$  é definido no Exercício 5.4.5.

3. Sejam  $A, B \in \mathcal{L}(E)$  operadores que *comutam*:  $AB = BA$ . Prove que

- (a)  $N(B)$  e  $\text{Im}(B)$  são subespaços invariantes por  $A$ ;
  - (b) se  $F$  é um subespaço invariante por  $A$ , então  $BF := \{Bf : f \in F\}$  é ainda um subespaço invariante por  $A$ .
4. Dado  $A \in \mathcal{L}(E)$  e um polinômio  $p = p(x)$ , prove que núcleo e imagem do operador  $p(A) \in \mathcal{L}(E)$  (Definição C.5.2) são subespaços invariantes por  $A$ .
5. Mostre que o operador derivação no espaço  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  dos polinômios reais

$$D : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad p(x) \mapsto p'(x) := \frac{d}{dx}p(x)$$

tem espectro  $\{0\}$  e  $E_0 = \mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  é composto dos polinômios constantes.

6. Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$ , prove que

- (a)  $A$  invertível  $\iff A$  não possui autovalor 0;
  - (b) se  $A$  é invertível, então os autovetores de  $A$  e  $A^{-1}$  coincidem. E os autovalores?
7. Seja  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o operador linear cuja matriz na base canônica tem todas as entradas iguais a 1. Prove que
- (a)  $\text{posto}(A) = 1$ ;
  - (b)  $\mathbb{R}^n = N(A) \oplus \text{Im}(A)$ ;
  - (c) os autovalores de  $A$  são 0 e  $n$ ;
  - (d) os autovetores de  $A$  pertencem a  $N(A)$  ou a  $\text{Im}(A)$ .

Exiba uma base de  $\mathbb{R}^n$  na qual a matriz de  $A$  tem  $n^2 - 1$  zeros.

8. Mostre que todo operador  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  de posto 1 possui um autovetor  $v$  cujo autovalor  $\lambda$  é o traco de  $A$ .



## Parte III

# Estruturas adicionais e operadores especiais



# Capítulo 9

## Produto interno

Neste<sup>1</sup> Capítulo 9 consideramos exclusivamente espaços vetoriais **reais**

$$(X, +, \cdot, \mathbb{R}), \quad (E, +, \cdot, \mathbb{R}), \quad n := \dim E < \infty.$$

O uso das letras  $E, F, G$  sinaliza dimensão finita enquanto  $\dim X \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ .

Produtos internos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  só são definidos para espaços vetoriais *reais* ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). Pode-se definir produtos similares, mas não iguais, em espaços vetoriais complexos ( $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Eles são chamados de produtos hermitianos, veja Capítulo 13.

### 9.1 Produto interno, norma, métrica

**Definição 9.1.1** (Produto interno). Um **produto interno**<sup>2</sup> num espaço vetorial real  $X$  é uma função de duas variáveis

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

a qual satisfaz os três axiomas

$$\text{(SIM)} \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad (\text{simetria})$$

$$\text{(BL)} \quad \langle u + \tilde{u}, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle \tilde{u}, v \rangle, \quad \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad (\text{bi-linearidade})^3$$

$$\text{(POS)} \quad u \neq \mathcal{O} \Rightarrow \langle u, u \rangle > 0 \quad (\text{positividade})$$

para todos os vetores  $u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \in X$  e escalares  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Neste caso  $X$  é chamado de **espaço vetorial com produto interno**.

**Lema 9.1.2.** *Num espaço vetorial  $X$  com produto interno vale*

<sup>1</sup>Cap. 9 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

<sup>2</sup>Produtos internos são também chamados de **produtos escalares**.

<sup>3</sup>Note que simetria implica linearidade também na segunda variável, por isso o nome para o axioma dois, abreviando bi-linearidade, é justificado.

- (a)  $\langle v, \mathcal{O} \rangle = 0 \quad \forall v \in X$ ;
- (ND)  $\langle u, v \rangle = \langle \tilde{u}, v \rangle \quad \forall v \in X \Rightarrow u = \tilde{u}$ ; (não-degenerado)
- (ND)'  $\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in X \Rightarrow u = \mathcal{O}$ . (não-degenerado)'

*Demonstração.* (a) Dado  $v, w \in X$ , vale  $\langle v, w \rangle + \langle v, \mathcal{O} \rangle \stackrel{\text{(BL)}}{=} \langle v, w + \mathcal{O} \rangle = \langle v, w \rangle$ .  
 (ND) Escrevendo a hipótese na forma  $\langle u - \tilde{u}, v \rangle = 0 \quad \forall v$ , resta aplicar (ND).  
 (ND)' Suponha por absurdo  $u \neq \mathcal{O}$ . A hipótese para  $v = u$  mostra que  $\langle u, u \rangle = 0$  em contradição ao axioma (POS).  $\square$

**Lema 9.1.3** (Critério para dois operadores são iguais). *Dado operadores  $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$  e bases  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  e  $\mathcal{V} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ , então*

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \langle A\xi_j, \eta_i \rangle = \langle B\xi_j, \eta_i \rangle \quad \forall i, j.$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Trivial. “ $\Leftarrow$ ” Axioma (BL) na primeira entrada de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e propriedade (ND) em Lema 9.1.2.  $\square$

**Exemplo 9.1.4** (Produto euclidiano em  $\mathbb{R}^n$ ). A função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_0: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

é chamado de **produto euclidiano** em  $\mathbb{R}^n$ . O leitor pode verificar os 3 axiomas. Caso não especificamos diferentemente o  $\mathbb{R}^n$  sempre será munido do produto euclidiano.

**Exemplo 9.1.5** (Produto interno mediante integração). No espaço vetorial  $C^0([a, b])$  das funções reais contínuas num intervalo  $[a, b]$  integração

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (9.1.1)$$

define um produto interno. Deixamos ao leitor verificar os 3 axiomas.

**Exemplo 9.1.6** (Integração **não** dando produto interno). No espaço vetorial  $C^0(\mathbb{R})$  das funções reais contínuas no  $\mathbb{R}$  inteiro, integração, nem sobre  $\mathbb{R}$ , nem sobre um intervalo  $[a, b]$ ,

$$\langle f, g \rangle_\infty := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx, \quad \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx$$

define um produto interno em  $C^0(\mathbb{R})$ , não.

O problema no primeiro caso são valores infinitos, por exemplo  $\langle 2, 3 \rangle_\infty = \infty$ .

O problema no segundo caso é o axioma (POS). Seja  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua a qual anula-se em  $[a, b]$ , mas não no complemento inteiro. Por exemplo, suponha  $u(b+1) = 1$ . Assim  $u \neq \mathcal{O}$  não é a função nula, mas a integral  $\langle u, u \rangle = \int_a^b u(x)^2 dx = 0$  não é positivo.

**Exemplo 9.1.7** (Polinômios em  $\mathbb{R}$  e integração sobre  $[a, b]$ ). Em contraste ao espaço  $C^0(\mathbb{R})$ , no espaço vetorial dos polinômios  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  integração sobre  $[a, b]$  produz um produto interno! Deixamos ao leitor mostrar que (9.1.1) realmente satisfaz o axioma (POS).

[Dica: Em quantos pontos um polinômio de grau  $n$  pode-se anular no máximo?]

### Normas – norma induzida

**Definição 9.1.8.** Uma **norma** num espaço vetorial real  $X$  é uma função

$$|\cdot| : X \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto |x|$$

a qual satisfaz os três axiomas

- (HOM)  $|\alpha x| = |\alpha| |x|$  (homogeneidade)  $\Rightarrow |0| = 0$   
 ( $\Delta$ )  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (desigualdade triangular)  
 (POS)  $x \neq 0 \Rightarrow |x| > 0$  (positividade)

para todos os vetores  $x, y \in X$  e escalares  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Neste caso  $X$  é chamado de **espaço vetorial normado**.

**Definição 9.1.9** (Norma induzida). Num espaço vetorial  $X$  com produto interno existe para cada um vetor  $v$  um número não-negativo

$$|v| = |v|_{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$$

chamado de **norma induzida** de  $v$ , ou informalmente o “*comprimento*” do vetor. Um vetor de comprimento  $|v| = 1$  é chamado de **vetor unitário**. A notação  $\hat{v}$  sinaliza que trata-se de um vetor unitário.

**Exercício 9.1.10.** (a) A norma induzida é uma norma.

(b) Dado um vetor não-nulo  $u$ , então  $\hat{u} := \frac{1}{|u|}u$  é um vetor unitário.

### Métricas – métrica induzida

**Definição 9.1.11.** Uma **métrica**<sup>4</sup> num conjunto  $M$  é uma função

$$d: M \times M \rightarrow [0, \infty) \\ (q, p) \mapsto d(q, p)$$

a qual satisfaz os três axiomas

- (SIM)  $d(q, p) = d(p, q)$  (simetria)  
 ( $\Delta$ )  $d(q, r) \leq d(q, p) + d(p, r)$  (desigualdade triangular)  
 (POS)  $d(q, q) = 0$  mas  $q \neq p \Rightarrow d(q, p) > 0$  (positividade)

<sup>4</sup> Métricas são também chamadas de **funções distância** ou simplesmente **distâncias**.

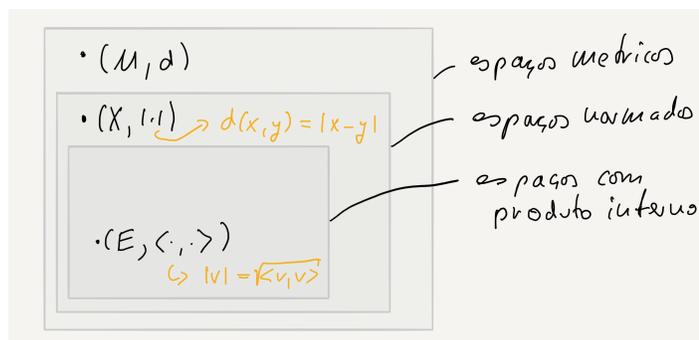


Figura 9.1: Produto interno  $\rightarrow$  norma  $\rightarrow$  função distância

para todos os pontos  $q, p \in M$ . Neste caso  $M$  é chamado de **espaço métrico**.

**Definição 9.1.12** (Métrica induzida). Num espaço vetorial normado a função

$$d(x, y) = d_{|\cdot|}(x, y) := |x - y|$$

é chamado de **métrica induzida** ou **distância** entre dois pontos.

**Exercício 9.1.13.** A métrica induzida  $d(x, y) := |x - y|$  é uma métrica.

Então produtos internos disponibilizam normas e normas disponibilizam distâncias. As inclusões são ilustrados na Figura 9.1.

### 9.1.1 Produto interno e espaço dual – dualidade

Um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  num espaço vetorial  $E$  com  $\dim E = n$  finita disponibiliza um isomorfismo canônico<sup>5</sup> entre  $E$  e seu espaço dual

$$\begin{aligned} D: E &\rightarrow E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ v &\mapsto \langle v, \cdot \rangle \end{aligned} \tag{9.1.2}$$

chamado de **dualidade** e onde  $\langle v, \cdot \rangle$  é a transformação linear abreviada de

$$v^* := \langle v, \cdot \rangle: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \langle v, u \rangle.$$

**Teorema 9.1.14** (Dualidade). *O operador  $D$  em (9.1.2) é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Linearidade de (9.1.2) vale segundo o axioma (BL) de bilinearidade. Injetividade vale segundo o axioma (POS) na sua incarnação (ND)'. Sobrejetividade é equivalente a injetividade segundo Corolário 6.5.2 porque as dimensões  $\dim E = n = \dim E^*$  são iguais segundo Lema 4.1.20.  $\square$

<sup>5</sup> **Canônico** significa sem a necessidade de fazer escolhas das quais o objeto construído eventualmente vai depender. Por exemplo, se  $\dim E = \dim F$ , então  $E$  e  $F$  são isomorfos segundo Corolário 6.4.9, mas não tem um isomorfismo canônico geralmente. Mas um isomorfismo com muita escolha geralmente não pode extrair informações intrínsecas.

**Exercício 9.1.15** (Produto interno induzido no espaço dual). Mostre que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* := \langle D^{-1} \cdot, D^{-1} \cdot \rangle: E^* \times E^* \rightarrow \mathbb{R}$$

é um produto interno no espaço dual de  $E$ .

**Exercício 9.1.16.** Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e seja  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base de  $E$ . Dado números  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , prove que existe um único vetor  $w \in E$  tal que

$$\langle w, \xi_1 \rangle = \alpha_1, \dots, \langle w, \xi_n \rangle = \alpha_n.$$

As afirmações continuam em Lema 9.1.17.

[Dica: Proposição 4.1.12 diz que uma transformação linear  $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}$  é determinada por seus valores numa base, dizemos  $\psi \xi_i := \alpha_i$ . Defina  $w := D^{-1} \psi$ .]

**Lema 9.1.17** (Continuando Exercício 9.1.16). *Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e seja  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base de  $E$ . Prove que existe uma única base  $\mathcal{V} = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$  de  $E$  tal que*

$$\langle \eta_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Defina  $a_{ij} := \langle \xi_i, \xi_j \rangle$  e  $b_{ij} := \langle \eta_i, \eta_j \rangle$ , onde  $i, j = 1, \dots, n$ . Prove que as matrizes  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  e  $\mathbf{b} = (b_{ij})$  são inversas uma da outra.

*Demonstração.* Dado uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$ , seja  $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  a base dual (4.1.6) de  $E^*$ . Isomorfismos levam base em base (Teorema 6.4.7), assim  $\mathcal{V} := D^{-1} \mathcal{B}^*$  é uma base de  $E$ . Para os elementos  $\eta_i := D^{-1} \phi_i$  de  $\mathcal{V}$  vale

$$\langle \eta_i, \xi_j \rangle = \langle D^{-1} \phi_i, \xi_j \rangle \stackrel{(9.1.2)}{=} (D(D^{-1} \phi_i)) \xi_j = \phi_i \xi_j \stackrel{(4.1.6)}{=} \delta_{ij}.$$

Segundo Teorema 5.2.7  $I_E = D^{-1} D$  traduz em  $[I_E]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = [D^{-1} D]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ . Assim

$$\mathbb{1} \stackrel{(5.2.4)}{=} [I_E]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = [D^{-1} D]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} \stackrel{(5.2.6)}{=} [D^{-1}]_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}} [D]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*} = \mathbf{ba}$$

onde resta provar a última identidade. (Como as matrizes são quadradas  $\mathbb{1} = \mathbf{ba}$  é equivalente a  $\mathbb{1} = \mathbf{ab}$ .) Mais detalhado, resta provar que

$$\mathbf{c} := [D^{-1}]_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}} = \mathbf{b} := (\langle \eta_i, \eta_j \rangle) \quad , \quad \mathbf{d} := [D]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*} = \mathbf{a} := (\langle \xi_i, \xi_j \rangle).$$

Começamos com a definição de

$$\begin{aligned} b_{ij} &:= \langle \eta_i, \eta_j \rangle \\ &= \langle D^{-1} \phi_i, \eta_j \rangle \\ &= (D(D^{-1} \phi_i)) \eta_j \\ &= \phi_i \eta_j \\ &= \phi_i (D^{-1} \phi_j) \\ &\stackrel{*}{=} \phi_i (\xi_1 c_{1j} + \dots + \xi_n c_{nj}) \\ &= (\phi_i \xi_i) c_{ij} \\ &= c_{ij} \end{aligned}$$

onde  $*$  vale por definição (5.2.1) da matriz  $[D^{-1}]_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}} =: (c_{ij})$ . Deixamos ao leitor provar similarmente  $a_{ij} = d_{ij}$ .  $\square$

### 9.1.2 Produto interno e matrizes simétricas positivas

Consideramos um espaço vetorial real  $E$  de dimensão finita  $n$ . Escolhendo uma base ordenada  $\mathcal{B}$  permite traduzir cada um vetor numa lista de  $n$  números reais, o vetor coordenada. Vamos ver como identificar produtos internos com uma classe de matrizes quadradas.

Vai ser útil escrever vetores coordenadas como matrizes coluna. Denotamos de

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in M(n \times 1)$$

o vetor coordenada  $[u]_{\mathcal{B}}$  de um vetor  $u$  em respeito à base  $\mathcal{B}$ , veja (5.1.2).

#### Produto interno associado a uma base ordenada

**Proposição 9.1.18** (Existência de produtos internos). *Um espaço vetorial real  $E$  de dimensão finita admite um produto interno.*

*Demonstração.* Dado uma base ordenada  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$ , defina

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{B}} := \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_0 := \mathbf{u}^t \mathbf{v} \quad (9.1.3)$$

para  $u, v \in E$  onde  $\mathbf{u} = [u]_{\mathcal{B}} \in M(n \times 1)$  é o vetor coordenada escrito como matriz coluna. Os axiomas do produto euclidiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  no  $\mathbb{R}^n$  implicam os axiomas correspondentes para  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ .  $\square$

**Exercício 9.1.19.** Seja  $E = \mathbb{R}^n$ . Mostre que o produto interno associado à base canônica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_0$  reproduz o produto euclidiano no  $\mathbb{R}^n$ .

#### A matriz de um produto interno

**Definição 9.1.20** (Matriz de um produto interno). Seja  $E$  um espaço vetorial munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dado uma base ordenada  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$ , calcule todos os números reais

$$g_{ij} := \langle \xi_i, \xi_j \rangle$$

e coloque numa matriz quadrada denotada, dependente do contexto, de

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\mathcal{B}} := (g_{ij})_{i,j=1}^n \in M(n \times n).$$

Esta matriz é chamada de **matriz do produto interno** em respeito à base  $\mathcal{B}$ . Verifique que a matriz real quadrada  $\mathbf{g}$  é simétrica e também **positiva**, ou seja

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij} u_i u_j > 0$$

para todas as listas não nulas  $u \in \mathbb{R}^n$ . Denotamos de

$$S^+(n) \subset M(n \times n)$$

o subconjunto composto das matrizes reais  $n \times n$  simétricas e positivas.

**Comentário 9.1.21.** Seja  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\mathcal{B}}$  a matriz de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  em respeito a uma base ordenada  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Usando vetores coordenadas  $\mathbf{u} = [u]_{\mathcal{B}} \in M(n \times 1)$  podemos exprimir o produto interno em  $E$  através do produto euclidiano assim

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_i u_i \xi_i, \sum_j v_j \xi_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n u_i g_{ij} v_j \\ &= \underbrace{\mathbf{u}^t}_{1 \times n} \underbrace{\mathbf{g}}_{n \times n} \underbrace{\mathbf{v}}_{n \times 1} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{g}\mathbf{v} \rangle_0 \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

para todos os vetores  $u, v$  de  $E$ .

Vice versa, dada uma base ordenada  $\mathcal{B}$  de  $E$ , a fórmula (9.1.4) define um produto interno em  $E$  para cada uma matriz simétrica positiva  $\mathbf{s}$ , em símbolos

$$\Phi_{\mathcal{B}}: S^+(n) \xrightarrow{\text{bij.}} \{\text{produtos internos em } E\}, \quad \mathbf{s} \mapsto \langle [\cdot]_{\mathcal{B}}, \mathbf{s} [\cdot]_{\mathcal{B}} \rangle_0.$$

A aplicação  $\Phi_{\mathcal{B}}$  é uma bijeção entre conjuntos. Sobrejetivo: escolha um produto interno em  $E$  e use para  $\mathbf{s}$  a matriz dele. Injetivo: aplique Lema 9.1.3.

**Exemplo 9.1.22.** Nos polinômios reais de grau menor ou igual um

$$\mathcal{P}_1(\mathbb{R}) := \{p(x) = a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

considere a base ordenada  $\mathcal{B} = (\xi_1, \xi_2) = (3, 1+x)$ . Integração

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

da um produto interno em  $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$  cuja matriz em respeito a  $\mathcal{B}$  tem entradas

$$g_{11} := \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = \int_{-1}^1 3 \cdot 3 dx = 9x \Big|_{-1}^1 = 18,$$

$$g_{22} := \langle \xi_2, \xi_2 \rangle = \int_{-1}^1 (1+x) \cdot (1+x) dx = (x + x^2 + x^3/3) \Big|_{-1}^1 = 8/3,$$

$$g_{12} := \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \int_{-1}^1 3(1+x) dx = (3x + 3x^2/2) \Big|_{-1}^1 = 6,$$

$$g_{21} := \langle \xi_2, \xi_1 \rangle \stackrel{(\text{SIM})}{=} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = g_{12} = 6.$$

**Exercício 9.1.23** (Continuamos Exemplo 9.1.22). Determine a distância

$$d(\xi_1, \xi_2) := |\xi_1 - \xi_2| := \sqrt{\langle \xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_2 \rangle}$$

dos dois membros da base de  $E = \mathcal{P}_1$ .

**Uma solução em  $E$ .** Inserindo na fórmula obtemos para o quadrado

$$d(\xi_1, \xi_2)^2 = \int_{-1}^1 \underbrace{(3 - (1+x))^2}_{4+4x+x^2} dx = (4x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3) \Big|_{x=-1}^1 = \frac{26}{3}.$$

**Outra solução em coordenadas.** A matriz  $[g]_{\mathcal{B}}$  já conhecemos, calculamos

$$[\xi_1 - \xi_2]_{\mathcal{B}} = [\xi_1]_{\mathcal{B}} - [\xi_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Com isso, usando (9.1.4) no primeiro passo, obtemos

$$\begin{aligned} d(\xi_1, \xi_2)^2 &= \langle [\xi_1 - \xi_2]_{\mathcal{B}}, [g]_{\mathcal{B}} [\xi_1 - \xi_2]_{\mathcal{B}} \rangle_0 \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle_0 \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 10/3 \end{bmatrix} \right\rangle_0 \\ &= \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

## 9.2 Plano euclidiano: Ângulos e comprimentos

Depois as definições abstratas da prévia Seção 9.1 uns leitores deviam-se perguntar como os matemáticos chegaram a estas fórmulas? Como chegaram à noção de produto interno? Isso tem uma significância no dia a dia?

O curso “Álgebra Linear”, bem abstrato e algébrico, é baseado no curso “Geometria Analítica”, bem geométrico. Esta ordem reflete o desenvolvimento histórico. Os gregos Pitágoras (aprox. 570-495 antes do Cristo) e Euclides (aprox. 325-270 antes do Cristo), entre outros, estudaram a geometria no plano e o francês René Descartes (1596-1650) introduziu uma ferramenta – o sistema de coordenadas Cartesianas (1637) veja Definição 0.0.4 – para traduzir os estudos geométricos do plano no universo da álgebra.

Vamos lembrar o lado da álgebra primeiro. No espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  das listas ordenadas  $u = (u_1, u_2)$  de dois números reais temos introduzido uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_0: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto u_1 v_1 + u_2 v_2$$

chamado de **produto interno euclidiano** e uma função associada

$$|\cdot|_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty), \quad u \mapsto \sqrt{\langle u, u \rangle_0} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

chamado de **norma euclidiana**.

Entramos então a geometria. Fixando no plano  $\Pi$  um sistema de coordenadas Cartesianas  $OXY$  as duas funções acima ganham significância geométrica:

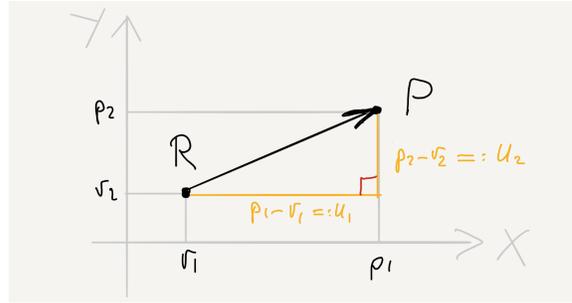


Figura 9.2: Pelo teorema de Pitágoras  $\text{dist}(R, P)^2 = u_1^2 + u_2^2 =: |u|_0^2$

**Lema 9.2.1** (Comprimento e ângulo). *Seja  $OXY$  um sistema de coordenadas Cartesianas no plano  $\Pi$ . Uma flecha  $\overrightarrow{RP}$  entre dois pontos, dizemos  $R$  com coordenadas  $(r_1, r_2)$  e  $P$  com coordenadas  $(p_1, p_2)$ , têm por definição o vetor coordenada  $u = (u_1, u_2) := (p_1 - r_1, p_2 - r_2)$ .<sup>6</sup> Denotamos de  $v$  o vetor coordenada da flecha de um ponto  $S$  para um ponto  $Q$ . Então vale o seguinte.*

- (i) *A norma euclidiana do vetor coordenada  $u$  da flecha  $\overrightarrow{RP}$ , ou seja*

$$|u|_0 := \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \text{dist}(R, P) \quad (9.2.1)$$

*é igual ao **comprimento** da flecha  $\overrightarrow{RP}$ .*

- (ii) *O produto interno dos vetores coordenadas  $u, v$  de flechas  $\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{SQ}$ , ou seja*

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_0 &:= u_1 v_1 + u_2 v_2 = \text{dist}(R, P) \cdot \text{dist}(S, Q) \cdot \cos \theta \\ &= |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v) \end{aligned} \quad (9.2.2)$$

*é igual ao produto dos comprimentos das flechas  $\overrightarrow{RP}$  e  $\overrightarrow{SQ}$  vezes o cosseno do **ângulo** menor<sup>7</sup>  $\theta$  entre as retas contendo as flechas.*

**Comentário 9.2.2.** Nunca esqueça uma coisa: Num sistema de coordenadas **não-Cartesianas**, ou seja onde os dois eixos  $OX$  e  $OY$  não são ortogonais um ao outro, a interpretação geométrica acima é **errada**.

*Demonstração de Lema 9.2.1.* (i) Como os eixos  $OX$  e  $OY$  são ortogonais o teorema de Pitágoras aplica: o quadrado do comprimento da hipotenusa  $RP$  é a soma dos quadrados do comprimento  $|u_i| = |p_i - r_i|$  dos catetos; veja Figura 9.2. (ii) Flechas equipolentes (mesmo comprimento, direção, sentido de percurso - veja Exemplo 0.0.1) tem o mesmo vetor coordenada. Por isso suponhamos que as flechas tem ponto inicial na origem  $O = R = S$ . Assim o vetor coordenada de  $\overrightarrow{OP}$  é  $u = (u_1, u_2) = (p_1, p_2)$ , análogo para  $\overrightarrow{OQ}$ . Consideramos dois casos.

<sup>6</sup> Exercício: Flechas equipolentes, veja Exemplo 0.0.1, têm o mesmo vetor coordenada.

<sup>7</sup> de fato, a simetria do cosseno garante que não importa se escolhe o ângulo menor ou maior

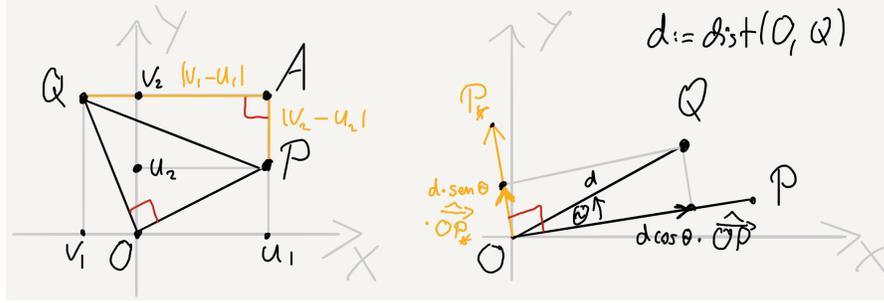


Figura 9.3: Caso perpendicular

Caso geral

**Caso perpendicular**  $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ . De um lado, Pitágoras para o triângulo retângulo  $OPQ$  diz que

$$\text{dist}(P, Q)^2 = \text{dist}(O, P)^2 + \text{dist}(O, Q)^2.$$

De outro lado, Pitágoras para o triângulo  $APQ$ , veja Figura 9.3, diz que

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, Q)^2 &= (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 \\ &= u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2) \\ &= \text{dist}(O, P)^2 + \text{dist}(O, Q)^2 - 2\langle u, v \rangle_0. \end{aligned}$$

Pela comparação  $\langle u, v \rangle_0 = 0$ , de outro lado  $\cos \pi/2 = 0$ , assim (9.2.2) vale.

**Caso geral.** Utilizamos o caso perpendicular junto com o axioma (BL) de bilinearidade do produto interno. Denotamos de  $\theta$  o ângulo menor entre as duas flechas  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{OQ}$ . Dada a flecha  $\overrightarrow{OP}$  com vetor coordenada  $u$ , e  $\overrightarrow{OQ}$  com  $v$ , fixamos um ponto  $P_* \neq O$  tal que a flecha  $\overrightarrow{OP_*}$  (vetor coordenada  $u_*$ ) é ortogonal a  $\overrightarrow{OP}$ . Como ilustrado na Figura 9.3 consideramos a combinação linear

$$\overrightarrow{OQ} = \text{dist}(O, Q) \cdot \cos \theta \cdot \frac{\overrightarrow{OP}}{\text{dist}(O, P)} + \text{dist}(O, Q) \cdot \sin \theta \cdot \frac{\overrightarrow{OP_*}}{\text{dist}(O, P_*)}$$

a qual em coordenadas toma a forma ( $\hat{u} := \frac{1}{|u|_0} u$  é vetor unitário)

$$v = |v|_0 \cdot \cos \theta \cdot \hat{u} + |v|_0 \cdot \sin \theta \cdot \hat{u}_*.$$

Tomando o produto interno com  $u$  e usando o axioma (BL) obtemos

$$\langle u, v \rangle_0 = |v|_0 \cdot \cos \theta \cdot \underbrace{\langle u, \hat{u} \rangle_0}_{|u|_0} + |v|_0 \cdot \sin \theta \cdot \underbrace{\langle u, \hat{u}_* \rangle_0}_{\stackrel{(9.2.2)}{=} 0} = |u|_0 |v|_0 \cdot \cos \theta.$$

Agora use (9.2.1) para  $|u|_0$  e para  $|v|_0$ . Note que segundo o caso perpendicular já provado a fórmula (9.2.2) aplica e diz que  $\langle u, \hat{u}_* \rangle_0 = \dots \cdot \underbrace{\cos \pi/2}_{=0} = 0$ .  $\square$

## 9.3 Ortogonalidade

**Definição 9.3.1.** Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno.

- (i) Chama-se dois **vetores**  $u$  e  $v$  **ortogonais**, ou **perpendiculares**, símbolo  $u \perp v$ , se tem produto nulo  $\langle u, v \rangle = 0$ . (Note  $\mathcal{O} \perp v$  para todos vetores.)  
Chama-se um **vetor**  $u$  **ortogonal a um subconjunto**  $X$ , símbolo  $u \perp X$ , se  $u \perp x$  para todos os elementos  $x$  de  $X$ .
- (ii) Chama-se  $X \subset E$  um **subconjunto ortogonal** se os vetores de  $X$  são dois-a-dois ortogonais.
- (iii) Chama-se  $X \subset E$  um **subconjunto ortonormal (ON)** se  $X$  é composto de vetores unitários (norma 1) dois-a-dois ortogonais.
- (iv) Uma base  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  é chamado de **base ortonormal (ON)** se

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad (9.3.1)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o símbolo de Kronecker.

**Teorema 9.3.2** (Conjuntos ortogonais, sem  $\mathcal{O}$ , são LI).

$$X \subset E \setminus \{\mathcal{O}\} \text{ conjunto ortogonal} \Rightarrow X \text{ LI.}$$

*Demonstração.* Suponha que

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k = \mathcal{O}$$

para uma escolha finita de elementos  $x_i \in X$  e escalares  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . Tome o produto interno de ambos lados com qualquer um dos elementos, dizemos  $x_j$ , segue

$$\alpha_1 \underbrace{\langle x_1, x_j \rangle}_{=0} + \underbrace{\dots}_{=0} + \alpha_j \underbrace{\langle x_j, x_j \rangle}_{=1} + \underbrace{\dots}_{=0} + \alpha_k \underbrace{\langle x_k, x_j \rangle}_{=0} = \langle \mathcal{O}, x_j \rangle = 0.$$

Mas  $\alpha_j |x_j|^2 = 0$  implica  $\alpha_j = 0$  porque  $\langle x_j, x_j \rangle > 0$  pela hipótese  $x_j \neq \mathcal{O}$ .  $\square$

**Exercício 9.3.3.** Dado uma base **ON**  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  de  $E$ , mostre que

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \varepsilon_i \Leftrightarrow v_i = \langle \varepsilon_i, v \rangle, \quad i = 1, \dots, n \quad (9.3.2)$$

para cada um vetor  $v \in E$ .

**Exercício 9.3.4.** Seja  $\mathcal{B}$  uma base ordenada de um espaço vetorial real  $E$  de dimensão finita  $n$ . Seja  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{B}} = \langle [u]_{\mathcal{B}}, [v]_{\mathcal{B}} \rangle_0$  o produto interno associado, veja (9.1.3). Mostre que  $\mathcal{B}$  é uma base ON de  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{B}}$ .

**Exemplo 9.3.5** (Conjuntos e bases ortogonais).

- a) A base canônica  $\mathcal{E}^n$  é ortonormal em respeito a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ .
- b) O conjunto  $\{(0, 0), (-1, 1)\}$  é ortogonal em  $\mathbb{R}^2$ .
- c) O conjunto  $\{(1, 1), (-1, 1)\}$  é uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 9.3.6** (Teorema de Pitágoras para espaços com produto interno).  
Para dois vetores  $u, v \in E$  são equivalente

$$u \perp v \quad \Leftrightarrow \quad |u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2. \quad (9.3.3)$$

*Demonstração.* Usamos os axiomas bi-linearidade e simetria para obter

$$\begin{aligned} |u + v|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &\stackrel{\text{(BL)}}{=} \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &\stackrel{\text{(SIM)}}{=} |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u, v \rangle \end{aligned}$$

e agora lembramos que por definição escrevemos  $u \perp v$  no caso  $\langle u, v \rangle = 0$ .  $\square$

**Exemplo 9.3.7.** Para vetores não-nulos  $u, v \in \mathbb{R}^2$  ter produto euclidiano nulo

$$0 = \langle u, v \rangle_0 = |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v)$$

é equivalente que o ângulo entre eles é rectângulo, ou seja  $\angle(u, v) \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ .

### 9.3.1 Projecção ortogonal sobre uma reta

**Definição 9.3.8** (Projecção ortogonal sobre uma reta  $\mathbb{R}\hat{u}$ ). Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno. Dado um vetor  $u \in E$  não-nulo, seja  $\hat{u} = \frac{1}{|u|}u$  o vetor unitário correspondente. Definimos a transformação linear

$$\begin{aligned} \text{pr}_u : E &\rightarrow E \\ v &\mapsto \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \underbrace{\langle \hat{u}, v \rangle}_{=\text{pr}_{\hat{u}} v} \hat{u} \in \mathbb{R}\hat{u} \end{aligned}$$

chamada de **projecção ortogonal sobre a reta  $\mathbb{R}\hat{u}$** . Note que  $\text{pr}_u = \text{pr}_{\hat{u}}$ .

Vamos justificar o nome de  $\text{pr}_u$ . Linearidade segue do axioma (BL) e

$$\text{pr}_{\hat{u}}(\text{pr}_{\hat{u}}v) = \langle \hat{u}, \text{pr}_{\hat{u}}v \rangle \hat{u} = \langle \hat{u}, \langle \hat{u}, v \rangle \hat{u} \rangle \hat{u} = \langle \hat{u}, v \rangle \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle \hat{u} = \text{pr}_{\hat{u}}v$$

mostra que  $\text{pr}_{\hat{u}} = (\text{pr}_{\hat{u}})^2$  é uma projecção. Assim

$$\text{Im}(\text{pr}_{\hat{u}}) \stackrel{(7.0.1)}{=} \text{Fix}(\text{pr}_{\hat{u}}) = \mathbb{R}\hat{u} \quad (9.3.4)$$

onde identidade dois segue imediatamente da definição de  $\text{pr}_{\hat{u}}$ , similarmemente

$$\text{N}(\text{pr}_{\hat{u}}) = \{v \in E \mid \langle v, \alpha\hat{u} \rangle = 0, \forall \alpha\hat{u} \in \mathbb{R}\hat{u}\} =: (\mathbb{R}\hat{u})^\perp.$$

Para justificar o termo *ortogonal* no nome de  $\text{pr}_u$  escolha  $v \in E$  e note que

$$\langle \text{pr}_{\hat{u}}v - v, \alpha \hat{u} \rangle = \langle \hat{u}, v \rangle \hat{u}, \alpha \hat{u} \rangle - \langle v, \alpha \hat{u} \rangle = \alpha \langle \hat{u}, v \rangle \langle \hat{u}, \hat{u} \rangle - \alpha \langle v, \hat{u} \rangle = 0.$$

Assim o vetor  $w$  conectando os pontos  $v$  e  $\text{pr}_{\hat{u}}v$  é ortogonal à reta  $\mathbb{R}\hat{u}$ , ou seja

$$w := (v - \text{pr}_{\hat{u}}v) \perp \mathbb{R}\hat{u}, \quad v \in E.$$

Na notação (7.1.1) temos que

$$\text{pr}_{\hat{u}} = P_{\mathbb{R}\hat{u}, (\mathbb{R}\hat{u})^\perp}.$$

**Lema 9.3.9** (Projeções ortogonais não alongam). *Para  $u, v \in E$  não-nulos vale*

$$|\text{pr}_u v| \leq |v|$$

onde “=” vale exatamente ao longo dos pontos fixos (9.3.4), ou seja  $\text{pr}_u v = v$ .

*Demonstração.* Como  $w := (v - \text{pr}_{\hat{u}}v) \perp \mathbb{R}\hat{u}$  obtemos do Pitágoras (9.3.3) que

$$|v|^2 = |v - \text{pr}_{\hat{u}}v + \text{pr}_{\hat{u}}v|^2 = |w + \text{pr}_{\hat{u}}v|^2 = |w|^2 + |\text{pr}_{\hat{u}}v|^2 \geq |\text{pr}_{\hat{u}}v|^2$$

onde “=” vale exatamente se  $|w|^2 = 0$ , equivalentemente  $\mathcal{O} = w = v - \text{pr}_{\hat{u}}v$ .  $\square$

## 9.4 Desigualdades

**Proposição 9.4.1** (Desigualdade de Schwarz). *Para  $u, v \in E$  não-nulos<sup>8</sup> vale*

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| \cdot |v| \tag{9.4.1}$$

onde “=” é equivalente a cada um de  $u, v$  é múltiplo (não-nulo) do outro.

*Demonstração.* Caso um de  $u$  ou  $v$  é nulo as afirmações valem. Suponha no seguinte  $u \neq \mathcal{O}$  e  $v \neq \mathcal{O}$ : “ $\leq$ ” Usando Lema 9.3.9 no último passo obtemos

$$\frac{|\langle u, v \rangle|}{|u|} = |\langle \hat{u}, v \rangle \hat{u}| = |\text{pr}_{\hat{u}}v| \leq |v|.$$

“=” Segundo Lema 9.3.9 temos **igualdade** se e somente se  $v = \text{pr}_{\hat{u}}v$ . Mas  $\text{pr}_{\hat{u}}v \in \text{Im}(\text{pr}_{\hat{u}}) = \mathbb{R}\hat{u}$ . Daí  $v \in \mathbb{R}\hat{u} = \mathbb{R}u$  é da forma  $v = \alpha u$  com  $\alpha \neq 0$ .  $\square$

**Proposição 9.4.2** (Desigualdade triangular). *Para  $u, v \in E$  não-nulos<sup>9</sup> vale*

$$|u + v| \leq |u| + |v| \tag{9.4.2}$$

onde “=” é equivalente a cada um de  $u, v$  é múltiplo positivo do outro.

*Demonstração.* Utilizamos a desigualdade de Schwarz (9.4.1) para obter

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2 \langle u, v \rangle \leq |u|^2 + |v|^2 + 2 |u| \cdot |v| = (|u| + |v|)^2$$

onde igualdade “=” é equivalente a  $\langle u, v \rangle = |u| \cdot |v| > 0$ . Assim, por Schwarz, cada um de  $u, v$  é múltiplo do outro, dizemos  $v = \alpha u$  para um real  $\alpha \neq 0$ . Mas neste caso de  $0 < \langle u, v \rangle = \alpha |u|^2$  e  $|u|^2 > 0$  segue  $\alpha > 0$ .  $\square$

<sup>8</sup> Para  $u$ , ou  $v$ , nulo (9.4.1) também vale:  $0 = 0$ . Mas só o nulo é múltiplo do outro.

<sup>9</sup> Para  $u$ , ou  $v$ , nulo (9.4.2) também vale:  $0 = 0$ . Mas só o nulo é múltiplo do outro.

## 9.5 Ortonormalização segundo Gram-Schmidt

**Hipótese.** Seja  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base ordenada de um espaço vetorial  $E$  com produto interno. Denotamos de

$$F_1 := \langle \xi_1 \rangle \subset \dots \subset \boxed{F_k := \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle} \subset \dots \subset F_n := \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle = E$$

os subespaços gerados pelos primeiros  $1, 2, \dots, n$  membros da base  $\mathcal{X}$ .

**Passo A.** Vamos construir iterativamente bases ortogonais:

- (1) base ortogonal  $\{\eta_1\}$  de  $F_1$ : escolha  $\eta_1 := \xi_1$  e já pronto;
- (k) dado  $k \geq 1$  suponha que  $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$  é base ortogonal de  $F_k$ , defina

$$\eta_{k+1} := \xi_{k+1} - \sum_{i=1}^k \text{pr}_{\eta_i} \xi_{k+1} = \xi_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \eta_i, \xi_{k+1} \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle} \eta_i; \quad (9.5.1)$$

(k + 1) então  $\{\eta_1, \dots, \eta_k, \eta_{k+1}\}$  é uma base ortogonal de  $F_{k+1}$ ;

o processo usa o último membro  $\xi_n$  de  $\mathcal{X}$  quando  $k = n - 1 \Rightarrow k + 1 = n$

(n) ao fim obtemos uma base ortogonal

$$\mathcal{Y} = \{\eta_1, \dots, \eta_k, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n\}$$

de  $F_n = E$ .

**Demonstração (k)  $\Rightarrow$  (k + 1).** Suponha (k) e defina  $\eta_{k+1}$ , então

- a)  $\eta_{k+1} \perp \eta_1, \dots, \eta_k$ ;  $\langle \eta_{k+1}, \eta_j \rangle \stackrel{(k)}{=} \langle \xi_{k+1}, \eta_j \rangle - \langle \xi_{k+1}, \eta_j \rangle = 0$
- b)  $\eta_{k+1} \notin F_k \stackrel{(k)}{=} \langle \eta_1, \dots, \eta_k \rangle \ni \mathcal{O}$ ; suponha por absurdo  $\eta_{k+1} \in \langle \eta_1, \dots, \eta_k \rangle$   
 $\Rightarrow \xi_{k+1} \in \langle \eta_1, \dots, \eta_k \rangle = F_k := \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle$  contradição
- c)  $\eta_{k+1} \in F_{k+1}$ .  $\eta_{k+1} \in \langle \eta_1, \dots, \eta_k, \xi_{k+1} \rangle \stackrel{(k)}{=} \langle \xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1} \rangle =: F_{k+1}$

Segundo hipótese (k) o conjunto  $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$  é LI. Além disso  $\eta_{k+1}$  é não-nulo (segundo b) e ortogonal a  $\eta_1, \dots, \eta_k$  segundo a). Sendo assim o conjunto ortogonal  $\{\eta_1, \dots, \eta_k, \eta_{k+1}\}$  é LI segundo Teorema 9.3.2. Note que o subespaço

$$\langle \eta_1, \dots, \eta_{k+1} \rangle \subset \langle \xi_1, \dots, \xi_{k+1} \rangle$$

é contido num subespaço da mesma dimensão  $k + 1$ . Então os dois são iguais segundo Teorema 3.2.1 (d). Assim  $\{\eta_1, \dots, \eta_{k+1}\}$  é base ortogonal de  $F_{k+1}$ .

**Passo B.** A base  $\mathcal{Z} := \{\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_n\}$  de  $E$  é ortonormal onde  $\hat{\eta}_i := |\eta_i|^{-1} \eta_i$ .

**Comentário 9.5.1.** No caso que  $\xi_{k+1}$  já é ortogonal a  $\eta_1, \dots, \eta_k$  a definição de  $\eta_{k+1}$  mostra que  $\eta_{k+1} = \xi_{k+1}$ . O processo de Gram-Schmidt não muda  $\xi_{k+1}$ .

**Exercício 9.5.2** (Listas arbitrárias). Seja  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$  uma lista arbitrária de  $\ell$  vetores  $\xi_i \in E$ , dobros e o vetor nulo, tudo permitido. Pode-se aplicar o processo de Gram-Schmidt com a seguinte modificação pequena da hipótese

(k) dado  $k \geq 1$  suponha a lista  $(\eta_1, \dots, \eta_k)$  gera  $F_k$  e seus membros são dois-a-dois ortogonais, defina

$$\eta_{k+1} := \xi_{k+1} - \sum_{\substack{i=1 \\ \eta_i \neq \mathcal{O}}}^k \text{pr}_{\eta_i} \xi_{k+1} = \xi_{k+1} - \sum_{\substack{i=1 \\ \eta_i \neq \mathcal{O}}}^k \langle \hat{\eta}_i, \xi_{k+1} \rangle \hat{\eta}_i.$$

Obtém-se também uma lista  $(\eta_1, \dots, \eta_\ell)$  cujos membros são dois-a-dois ortogonais, só agora é possível que uns são nulos. Com efeito, mostre que

$$\xi_{k+1} \in \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle \stackrel{(k)}{=} \langle \eta_1, \dots, \eta_k \rangle \Rightarrow \eta_{k+1} = \mathcal{O}$$

[Dica: Note que  $\langle \hat{\eta}_i, \xi_{k+1} \rangle$  é a  $i$ -ésima coordenada do vetor  $\xi_{k+1}$  na base ON composto daqueles  $\hat{\eta}_i$  onde  $\eta_i \neq \mathcal{O}$  é não-nulo. Exercício 9.3.3.]

**Exemplo 9.5.3.** Determine uma base ON do subespaço  $F \subset \mathbb{R}^3$  gerado por

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_0.$$

**Solução com Gram-Schmidt (GS).** Definição (9.5.1) dos  $\eta_{k+1}$  diz que

$$\begin{aligned} \eta_1 &:= \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\eta_1|^2 := \langle \eta_1, \eta_1 \rangle = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3, \\ \eta_2 &:= \xi_2 - \frac{\langle \eta_1, \xi_2 \rangle}{|\eta_1|^2} \eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\eta_2|^2 = \frac{8}{3}, \\ \eta_3 &:= \xi_3 - \frac{\langle \eta_1, \xi_3 \rangle}{|\eta_1|^2} \eta_1 - \frac{\langle \eta_2, \xi_3 \rangle}{|\eta_2|^2} \eta_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{8} \underbrace{\left\langle \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=\frac{2}{3} \cdot 2} \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Segundo GS e como  $\eta_3 = \mathcal{O}$  sabemos que  $F := \langle \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle = \langle \eta_1, \eta_2, \eta_3 \rangle = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ . GS diz que o conjunto  $\{\eta_1, \eta_2\}$  é ortogonal, então LI segundo Teorema 9.3.2 usando que  $\eta_1, \eta_2 \neq \mathcal{O}$ . O conjunto ortogonal  $\{\eta_1, \eta_2\}$  é uma base

ortogonal de  $F$  porque é LI e gera  $F$ . Uma base ON é composto dos vetores

$$\varepsilon_1 := \frac{1}{|\eta_1|} \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 := \frac{1}{|\eta_2|} \eta_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (9.5.2)$$

### 9.5.1 Existência e extensão de bases ortogonais

Lembramos que um espaço vetorial de dimensão finita admite um produto interno – cada uma base ordenada  $\mathcal{B}$  induz um, notação  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ , veja (9.1.3).

**Teorema 9.5.4** (Existência). *Um espaço vetorial  $E$  com produto interno e de dimensão finita  $n$  admite uma base ON  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ .*

*Demonstração.* Pegue uma base ordenada  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$  e aplique o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.  $\square$

**Proposição 9.5.5** (Extensão). *Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno. Toda base ON  $\mathcal{X}$  de um subespaço  $F$  estende-se a uma base ON  $\mathcal{Z}$  de  $E$ .*

*Demonstração.* Segundo Teorema 3.2.1 (b) a base  $\mathcal{X} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$  de  $F$  é contida numa base ordenada  $\mathcal{Y}$  de  $E$ , dizemos  $\mathcal{Y} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n\}$ . Aplique Gram-Schmidt para obter  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n\}$ .  $\square$

### 9.5.2 Projeção ortogonal sobre um subespaço

O processo de Gram-Schmidt prova a existência de bases ONs: pegue qualquer base e aplique o processo; veja Proposição 9.5.5. É importante usar uma base ON nesta definição:

**Definição 9.5.6** (Projeção ortogonal sobre um subespaço  $F$ ). Escolha uma base ordenada ON  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$  de  $F$  e defina a transformação linear

$$\begin{aligned} \text{pr}_F: E &\rightarrow E \\ v &\mapsto \sum_{i=1}^k \text{pr}_{\varepsilon_i} v = \sum_{i=1}^k \langle \varepsilon_i, v \rangle \varepsilon_i. \end{aligned} \quad (9.5.3)$$

**Teorema 9.5.7** (Propriedades da projeção ortogonal).

1.  $\text{pr}_F$  é linear e bem definido (independente da base ON  $\mathcal{Z}$  de  $F$ ).
2.  $(\text{pr}_F)^2 = \text{pr}_F$ .
3.  $\text{Im}(\text{pr}_F) = \text{Fix}(\text{pr}_F)$  e  $E = \text{Im}(\text{pr}_F) \oplus \text{N}(\text{pr}_F)$ .
4.  $\text{Im}(\text{pr}_F) = F$ .
5.  $\text{pr}_F|_F = I_F \in \mathcal{L}(F)$ .
6.  $w := (v - \text{pr}_F v) \perp f \quad \forall f \in F$ .

$$7. \forall v \in E \text{ vale}^{10} \text{ dist}(v, F) := \inf_{f \in F} \underbrace{\text{dist}(v, f)}_{:=|v-f|} = |v - \text{pr}_F v|.$$

*Demonstração.* Teorema C.6.1. □

## 9.6 Complemento ortogonal

### Subconjuntos não-vazios

**Definição 9.6.1.** O **complemento ortogonal** de um subconjunto não-vazio  $S \subset E$  é definido assim

$$S^\perp := \{v \in E \mid \langle v, x \rangle = 0 \ \forall x \in S\}.$$

**Exercício 9.6.2.** Seja  $S \subset E$  um subconjunto não-vazio. Mostre que

- (i) o complemento ortogonal  $S^\perp$  é um subespaço de  $E$ ;
- (ii) ou  $S^\perp \cap S = \emptyset$ , ou  $S^\perp \cap S = \{0\}$ ;
- (iii)  $T \subset S \Rightarrow S^\perp \subset T^\perp$ ;
- (iv)  $S^\perp = \langle S \rangle^\perp$ .

### Subespaços

**Exercício 9.6.3.** Seja  $\mathcal{B}$  uma base de um subespaço  $F \subset E$ , mostre que

$$F^\perp = \{v \in E \mid \langle v, \xi \rangle = 0 \ \forall \xi \in \mathcal{B}\}.$$

**Proposição 9.6.4** (Relação entre  $F$  e  $F^\perp$  e a projeção ortogonal  $\text{pr}_F$  de (9.5.3)).  
Para subespaços  $F$  de  $E$  vale o seguinte

- (i)  $F^\perp = \text{N}(\text{pr}_F)$ ;  $\text{Im}(\text{pr}_F) = F$
- (ii)  $E = F \oplus F^\perp$  e  $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ ;
- (iii)  $\text{pr}_F = P_{F, F^\perp}$  veja (7.1.1);
- (iv)  $(F^\perp)^\perp = F$ .

*Demonstração.* (i) “ $\subset$ ” Para  $v \in F^\perp$  vale

$$0 = \underbrace{\langle \text{pr}_F v, v \rangle}_{\in F} = \langle \text{pr}_F v, \underbrace{v - \text{pr}_F v}_{w \perp F} \rangle + \langle \text{pr}_F v, \text{pr}_F v \rangle = 0 + \langle \text{pr}_F v, \text{pr}_F v \rangle$$

e consequentemente (POS) diz que  $\text{pr}_F v = 0$ .

“ $\supset$ ” Para  $v \in \text{N}(\text{pr}_F)$  vale  $v = v - \text{pr}_F v \perp f \ \forall f \in F$  segundo Teorema 9.5.7 6.

- (ii) Item 3 de Teorema 9.5.7 junto com item 4 e no teorema presente item (i).
- (iii) Item (ii) diz que  $(F, F^\perp)$  são subespaços complementares. Teorema 7.1.5.
- (iv) É suficiente mostrar inclusão  $F \subset (F^\perp)^\perp$  e igualdade de dimensão, veja

<sup>10</sup> como  $\dim F < \infty$  um ínfimo é um mínimo

Teorema 3.2.1 (d). Seja  $f \in F$ , então  $\langle f, \tilde{f} \rangle = 0 \forall \tilde{f} \in F^\perp$ , mas isso significa que  $f \in (F^\perp)^\perp := \{v \in E \mid \langle v, \tilde{f} \rangle = 0 \forall \tilde{f} \in F^\perp\}$ .

O Corolário 3.2.3 disponibiliza a fórmula de dimensão para a soma direta. Use item (ii) acima primeiro para  $F^\perp$  no lugar de  $F$  e segundo para  $F$  para obter

$$\dim(F^\perp)^\perp = \dim E - \dim F^\perp = \dim F.$$

□

**Exemplo 9.6.5.** No Exemplo 9.5.3 temos calculado a base ON  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , veja (9.5.2), do subespaço  $F := \langle \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle$  de  $\mathbb{R}^3$ . Determine uma base ON do complemento ortogonal

$$F^\perp \stackrel{\text{def.}}{=} \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, f \rangle = 0 \forall f \in F\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp \varepsilon_1, v \perp \varepsilon_2\}.$$

Vale a ultima igualdade porque a condição  $\langle v, f \rangle = 0$  é linear em  $f$ , então é suficiente checar para os elementos  $f$  de uma base só.

**Uma solução.**

$$v \perp \varepsilon_1: 0 = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (x - y + z).$$

$$v \perp \varepsilon_2: 0 = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (x + 2y + z).$$

Multiplique a primeira identidade por  $\sqrt{3}$  e a segunda por  $\sqrt{6}$  e forma a diferença das identidades resultantes para obter

$$0 - 0 = 0 - 3y - 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Com isso obtemos da primeira identidade que

$$z = -x, \quad x \in \mathbb{R} \text{ livre}, \quad F^\perp = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Uma base ON de  $F^\perp$  é composto do vetor  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ .

**Exemplo 9.6.6.** Ache uma base ON para o complemento ortogonal do subespaço  $F$  de  $\mathbb{R}^3$  gerado por os dois vetores

$$\xi_1 = (3, -1, 1), \quad \xi_2 = (-1, 2, 3).$$

## 9.7 Exercícios e umas soluções

### Exercícios.

1. Prove que  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

define um produto interno em  $\mathbb{R}^2$ .

2. **Lei do paralelogramo.** Seja  $|\cdot| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  a norma induzida de um produto interno num espaço vetorial  $E$ . Prove o lei do paralelogramo

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2. \quad (9.7.1)$$

Interprete (9.7.1) geometricamente mediante um desenho.

No ano 1935 J. v. Neumann e P. Jordan descobriram que, vice versa, uma norma  $|\cdot|$  já é induzida de um produto interno quando ela satisfaz o lei do paralelogramo. Neste caso  $\langle u, v \rangle := \frac{1}{4}|u + v|^2 - \frac{1}{4}|u - v|^2$  é um produto interno e induz  $|\cdot|$ .

3. Considere os vetores  $u = (2, -1, 2)$ ,  $v = (1, 2, 1)$  e  $w = (-2, 3, 3)$ . Determine o vetor de  $\mathbb{R}^3$  que é a projeção ortogonal de  $w$  sobre o plano gerado por  $u$  e  $v$ .
4. Considere a base  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  onde

$$\xi_1 = (1, 1, 1), \quad \xi_2 = (1, -1, 1), \quad \xi_3 = (1, -1, -1).$$

Aplique o método de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ . Determine a matriz  $\mathbf{p}$  de passagem da base  $\mathcal{U}$  para a base  $\mathcal{Z}$ .

5. Determine as bases obtidas de  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  pelo processo de Gram-Schmidt nos casos seguintes:
- (a)  $\xi_1 = (3, 0, 0)$ ,  $\xi_2 = (-1, 3, 0)$ ,  $\xi_3 = (2, -5, 1)$ ;  
 (b)  $\xi_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $\xi_2 = (5, 0, 0)$ ,  $\xi_3 = (2, -2, 3)$ .
6. Sejam  $F_1, F_2 \subset E$  subespaços. Prove que
- (a)  $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$       (b)  $F_1^\perp + F_2^\perp = (F_1 \cap F_2)^\perp$ .

7. Prove que o produto vetorial  $\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido no Exercício 5.4.5, satisfaz:

- (a)  $u \times v = -v \times u$ ;  
 (b)  $u \times (v + \tilde{v}) = u \times v + u \times \tilde{v}$ ;  
 (c)  $u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;  
 (d)  $u \times v \neq 0 \iff \{u, v\}$  é um conjunto LI;  
 (e)  $u \times v$  é ortogonal a  $u$  e ortogonal a  $v$ ;  
 (f)  $e_1 \times e_2 = e_3$ ,  $e_2 \times e_3 = e_1$ ,  $e_3 \times e_1 = e_2$ .



# Capítulo 10

## A adjunta

Neste<sup>1</sup> Capítulo 10 consideramos exclusivamente espaços vetoriais de dimensão **finita** com produtos internos

$$E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E), \quad F = (F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F),$$

e dimensões  $n := \dim E$  e  $m := \dim F$ . Dévido aos produtos internos o corpo sempre será  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Em vez de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  escrevemos simplesmente  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , o contexto indica do qual produto interno trata-se, aquele de  $E$  ou  $F$ .

### 10.1 Definição e propriedades

Deixa repetir o Teorema 9.1.14. Dimensão **finita** é essencial.<sup>2</sup>

**Teorema 10.1.1.** *É um isomorfismo a transformação linear definida assim*

$$D = D_E = D_{\langle \cdot, \cdot \rangle_E}: E \rightarrow E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \quad (10.1.1)$$
$$v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$$

onde  $\langle v, \cdot \rangle: E \rightarrow \mathbb{R}$  é a transformação linear  $u \mapsto \langle v, u \rangle$ .

*Demonstração.* Linear: Para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $u, v \in E$  axioma (BL) da

$$D(\alpha u + \beta v) = \langle \alpha u + \beta v, \cdot \rangle = \alpha \langle u, \cdot \rangle + \beta \langle v, \cdot \rangle = \alpha D u + \beta D v.$$

Bijetivo: Segundo Corolário 5.2.8 as dimensões são iguais

$$\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E \cdot \dim \mathbb{R} = \dim E < \infty.$$

Segundo Corolário 6.5.2 é suficiente mostrar injetivo: Suponha  $Dv = \mathcal{O} \in E^*$ . Obtemos  $\forall u \in E: \langle v, u \rangle = (Dv)u = \mathcal{O}v = 0$ . Então axioma (ND)' em Lema 9.1.2 diz que  $v = \mathcal{O} \in E$ . Isso mostra que  $D$  é injetivo, assim bijetivo.  $\square$

<sup>1</sup>Cap. 10 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

<sup>2</sup> Na dimensão infinita usa-se o espaço dual contínuo  $\tilde{E}^*$ , composto dos funcionais lineares contínuas. O famoso **teorema de Riesz** diz que  $E \rightarrow \tilde{E}^*$ ,  $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  é um isomorfismo.

**Definição 10.1.2** (Adjunta). A **adjunta** de uma transformação linear  $A: E \rightarrow F$  entre espaços vetoriais com produtos internos é num ponto  $w$  a composição

$$A^*: F \rightarrow E$$

$$w \mapsto (D_E)^{-1} \langle w, A \cdot \rangle_F$$

das transformações lineares  $[v \mapsto \langle w, Av \rangle_F] \in E^*$  e  $(D_E)^{-1}: E^* \rightarrow E$ .

**Proposição 10.1.3** (Critério para adjunta). *Sejam  $y \in E$  e  $w \in F$ , então*

$$y = A^*w \quad \Leftrightarrow \quad \langle y, v \rangle = \langle w, Av \rangle \quad \forall v \in E.$$

*Demonstração.* Dado  $y \in E$  e  $w \in F$ , são equivalente

$$y = A^*w := (D_E)^{-1} \langle w, A \cdot \rangle_F \quad \Leftrightarrow \quad \langle w, A \cdot \rangle_F = D_E y := \langle y, \cdot \rangle_E.$$

□

**Corolário 10.1.4.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , então*

$$\langle A^*w, v \rangle = \langle w, Av \rangle \quad (10.1.2)$$

*para cada um  $w \in F$  e  $v \in E$ .*

*Demonstração.* Proposição 10.1.3 “ $\Rightarrow$ ”. □

**Teorema 10.1.5** (Regras básicas para a adjunta).

- (i)  $I = I^*$
- (ii)  $(A + B)^* = A^* + B^*$
- (iii)  $(\alpha A)^* = \alpha A^*$
- (iv)  $(BA)^* = A^*B^*$
- (v)  $(A^*)^* = A$

*Demonstração.* Para cada um de (i-v) aplique (10.1.2) junto com Lema 9.1.3. Ilustramos o princípio provando (iv) deixando os outros itens para o leitor. Vale  $\langle (BA)^*w, v \rangle = \langle w, BAv \rangle = \langle B^*w, Av \rangle = \langle A^*B^*w, v \rangle$ . □

**Teorema 10.1.6** (Injetividade e sobrejetividade de  $A$  e  $A^*$ ).

- (i)  $A$  injetivo  $\Leftrightarrow A^*$  sobrejetivo
- (ii)  $A$  sobrejetivo  $\Leftrightarrow A^*$  injetivo
- (iii)  $A$  isomorfismo  $\Leftrightarrow A^*$  isomorfismo

*Demonstração.* (i) São equivalente

$$A \text{ injetivo} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \text{existe inversa à esquerda } B \text{ de } A: BA = I_E \stackrel{*}{\Leftrightarrow} A^*B^* = I_E$$

$$\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \text{existe inversa à direita } C (= B^*) \text{ de } A^*: A^*C = I_E$$

$$\stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} A^* \text{ sobrejetivo}$$

conforme (1) Teorema 6.3.6, (2) Teorema 10.1.5 (i,iv), e (3) Teorema 6.2.3.

(ii) Parte (i) diz que  $B := A^*$  injetivo  $\Leftrightarrow$  sobrejetividade de  $B^* = (A^*)^* = A$ .

(iii) Isomorfismo é linear e bijetivo (injetivo e sobrejetivo). Aplique (i) e (ii). □

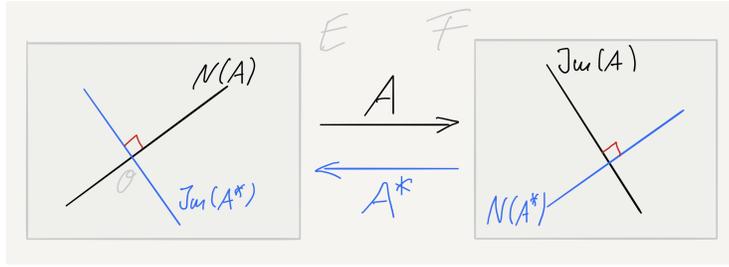


Figura 10.1: Operador  $A$  e sua adjunta  $A^*$  tem subespaços ortogonais

### 10.1.1 Adjunta e ortogonalidade

**Teorema 10.1.7.** *Seja  $A^*: F \rightarrow E$  a adjunta de  $A: E \rightarrow F$ . Os dois subespaços naturais de  $E$  são complementos ortogonais, igualmente para  $F$ , ou seja*

$$N(A) = \text{Im}(A^*)^\perp, \quad \text{Im}(A) = N(A^*)^\perp. \quad (10.1.3)$$

*Demonstração.*  $v \in N(A) \Leftrightarrow Av = \mathcal{O} \Leftrightarrow \forall w \in F: 0 = \langle w, Av \rangle = \langle A^*w, v \rangle \Leftrightarrow 0 = \langle u, v \rangle \forall u \in \text{Im}(A^*) \Leftrightarrow v \in \text{Im}(A^*)^\perp$ . Analogamente para afirmação dois.  $\square$

**Corolário 10.1.8.** a) *Para  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  vale igualdade  $\text{posto}(A) = \text{posto}(A^*)$ .*  
b) *Para  $A \in \mathcal{L}(E)$  ainda os núcleos são da mesma dimensão  $N(A) = N(A^*)$ .*

*Demonstração.* a) Segundo Teorema 10.1.7 e Proposição 9.6.4 (ii) vale

$$\dim \text{Im}(A^*) = \dim N(A)^\perp = \dim E - \dim N(A) = \dim \text{Im}(A) \quad (10.1.4)$$

onde o ultimo passo é o Teorema 6.5.1 de núcleo e imagem. b) Teorema 6.5.1 diz que  $\dim N(A) + \text{posto}(A) = \dim E = \dim N(A^*) + \text{posto}(A^*)$ , aplique a).  $\square$

**Proposição 10.1.9.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$  e seja  $F \subset E$  um subespaço, então*

$$F \text{ subespaço invariante por } A \Leftrightarrow F^\perp \text{ subespaço invariante por } A^*.$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Dado  $g \in F^\perp$ , a mostrar:  $A^*g \in F^\perp$ . Seja  $f \in F$ , então

$$\langle f, A^*g \rangle = \langle \underbrace{Af}_{\in F}, \underbrace{g}_{\in F^\perp} \rangle = 0.$$

Como  $f \in F$  foi arbitrário, segue que  $A^*g \in F^\perp$ .

“ $\Leftarrow$ ” Aplique a parte já provada “ $\Rightarrow$ ” para  $G := F^\perp$  e  $B := A^*$  usando que vale

$$G^\perp = (F^\perp)^\perp = F, \quad B^* = (A^*)^* = A,$$

segundo, respectivamente, Proposição 9.6.4 (iv) e Teorema 10.1.5 (v).  $\square$

**Lema 10.1.10.** Dado  $A, B \in \mathcal{L}(E)$ , então

$$B^*A = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \forall v \in E: Av \perp Bv.$$

Particularmente  $A^*A = \mathcal{O} \Rightarrow A = \mathcal{O}$ .  $\mathcal{O}$  é a transformação nula  $\mathcal{O}_{\mathcal{L}(E)}$

*Demonstração.* Seja  $v \in E$ . Vale  $\langle Av, Bv \rangle = \langle B^*Av, v \rangle = \langle \mathcal{O}v, v \rangle = \langle \mathcal{O}, v \rangle = 0$  (onde  $\langle \mathcal{O}, v \rangle = \langle \mathcal{O}_E, v \rangle$ ). Particularmente vale  $\langle Av, Av \rangle = 0$ . Assim  $Av = \mathcal{O}$  segundo axioma (POS). Como  $v \in E$  foi arbitrário o operador  $A = \mathcal{O}$  é nulo.  $\square$

### 10.1.2 Matriz da adjunta

**Teorema 10.1.11** (A matriz da adjunta é a matriz transposta). Seja  $\mathbf{a} = (a_{ij}) := [A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}$  a matriz de uma transformação linear  $A: E \rightarrow F$  em respeito a bases ordenadas *ortonormais*  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  e  $\mathcal{Y} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ . Então

- (i)  $\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}} \Leftrightarrow \mathbf{a}^t = [A^*]_{\mathcal{Y}, \mathcal{X}}$
- (ii)  $a_{ij} = \langle \eta_i, A\xi_j \rangle$

*Demonstração.* (i) Seja  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}$  e  $\mathbf{b} := [A^*]_{\mathcal{Y}, \mathcal{X}}$ . Segundo da definição das matrizes temos  $A\xi_j = \sum_{\ell=1}^m \eta_\ell a_{\ell j}$  para  $j = 1, \dots, n$  e  $A^*\eta_i = \sum_{r=1}^n \xi_r b_{ri}$  para  $i = 1, \dots, m$ . Usando isso e axiomas (BL, SIM) obtemos

$$\begin{aligned} b_{ji} &= \sum_{r=1}^n b_{ri} \underbrace{\delta_{jr}}_{\langle \xi_j, \xi_r \rangle} = \left\langle \xi_j, \underbrace{\sum_{r=1}^n \xi_r b_{ri}}_{A^*\eta_i} \right\rangle = \langle A^*\eta_i, \xi_j \rangle \\ &\stackrel{4}{=} \langle \eta_i, \underbrace{A\xi_j}_{\sum_{\ell} \eta_\ell a_{\ell j}} \rangle = \sum_{\ell=1}^m a_{\ell j} \underbrace{\langle \eta_i, \eta_\ell \rangle}_{=\delta_{ij}} = a_{ij} \end{aligned}$$

onde passo 4 é Proposição 10.1.3. Bases **ON** são essenciais. Já provamos (ii).  $\square$

O próximo resultado re-confirma o Teorema 4.2.2 dizendo que o posto de uma matriz é igual ao posto da matriz transposta.

**Corolário 10.1.12.** Consideramos uma matriz real  $\mathbf{a} \in M(m \times n)$  como transformação linear  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  entre espaços cada um munido do produto euclidiano e da base canónica. Então a adjunta  $\mathbf{a}^*$  da matriz  $\mathbf{a}$  é a matriz transposta, em símbolos  $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^t$ . Assim  $\text{posto}(\mathbf{a}) = \text{posto}(\mathbf{a}^t)$ .

*Demonstração.* Teorema 10.1.11 (ii).  $\square$

**Comentário 10.1.13.** As regras básicas do Teorema 10.1.5 tomam para matrizes (visto como transformações lineares e usando  $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^t$ ) a forma seguinte

$$\mathbb{1}^t = \mathbb{1}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})^t = \mathbf{a}^t + \mathbf{b}^t, \quad (\alpha \mathbf{a})^t = \alpha \mathbf{a}^t, \quad (\mathbf{ba})^t = \mathbf{a}^t \mathbf{b}^t, \quad (\mathbf{a}^t)^t = \mathbf{a}.$$

Sim, estas regras prova-se mais rápido diretamente, exceto tal-vez  $(\mathbf{ba})^t = \mathbf{a}^t \mathbf{b}^t$ .

**Comentário 10.1.14** (Injetividade e sobrejetividade de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}^t$ ). As afirmações do Teorema 10.1.6 tomam a forma seguinte para matrizes  $\mathbf{a} \in M(m \times n)$  – visto como transformações lineares e usando  $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^t$ .

- (i)  $\mathbf{a}$  injetivo  $\Leftrightarrow \mathbf{a}^t$  sobrejetivo
- (ii)  $\mathbf{a}$  sobrejetivo  $\Leftrightarrow \mathbf{a}^t$  injetivo
- (iii)  $\mathbf{a}$  isomorfismo  $\Leftrightarrow \mathbf{a}^t$  isomorfismo

**Corolário 10.1.15.** *Seja  $\mathbf{a} \in M(m \times n)$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ , então*

$$\mathbf{a}x = b \text{ possui uma solução} \quad \Leftrightarrow \quad b \perp N(\mathbf{a}^t).$$

*Demonstração.* Segundo Exemplo 6.0.20 são equivalente  $\mathbf{a}x = b \Leftrightarrow b \in \text{Im}(\mathbf{a})$ , mas  $\text{Im}(\mathbf{a}) = N(\mathbf{a}^t)^\perp$  segundo Teorema 10.1.7.  $\square$

## 10.2 Fórmula para inversa à direita/esquerda

**Proposição 10.2.1** (Inversas à direita e esquerda). *Seja  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ .*

- a)  $A$  sobrejetivo  $\Rightarrow AA^* \in \mathcal{L}(F)$  é invertível e  $AA^*(AA^*)^{-1} = I_F$ .
- b)  $A$  injetivo  $\Rightarrow A^*A \in \mathcal{L}(E)$  é invertível e  $(A^*A)^{-1}A^*A = I_E$ .

*Demonstração.* a) Segundo Teorema 10.1.6 sobrejetividade de  $A$  significa injetividade de  $A^*$ . Isso implica<sup>3</sup> que  $AA^*: F \rightarrow F$  é injetivo, assim segundo Corolário 6.5.2 (dimensão igual) bijetivo, então um isomorfismo.

b) Aplique a) para  $B := A^*$ , use  $(A^*)^* = A$ , segue  $BB^* = A^*A$  invertível.  $\square$

De fato, também valem as implicações opostas ' $\Leftarrow$ ' como vamos ver no Corolário 11.4.9. O posto de  $AA^*$  e de  $A^*A$  é igual ao posto de  $A$  (Teorema 11.4.8).

**Lema 10.2.2.** *Dado  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , as restrições*

$$A|: \text{Im}(A^*) \xrightarrow{\cong} \text{Im}(A), \quad A^*|: \text{Im}(A) \xrightarrow{\cong} \text{Im}(A^*),$$

*são isomorfismos (ainda que geralmente não são inversas um do outro).*

*Demonstração.* É bem definido e injetivo como  $\text{Im}(A^*) = N(A)^\perp$ , então bijetivo como  $\dim \text{Im}(A) = \dim \text{Im}(A^*)$  segundo (10.1.4). Analogamente para  $A^*|$ .  $\square$

**Exemplo 10.2.3** (Não são inversas um do outro).

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

São invertíveis como o determinante é não-nulo, assim sobrejetivo, ou seja  $\text{Im}(A) = \text{Im}(A^*) = \mathbb{R}^2$ , mas

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \mathbb{1}$$

então  $A^* \neq A^{-1}$ .

<sup>3</sup> Suponha  $v \in N(AA^*)$ , ou seja  $AA^*v = \mathcal{O}$ , então  $\text{Im}(A^*) \ni A^*v \in N(A) = \text{Im}(A^*)^\perp$ . Consequentemente  $A^*v = \mathcal{O}$ , então  $v = \mathcal{O}$  como  $A^*$  é injetivo.

### 10.3 Traço – produto interno em $\mathcal{L}(E, F)$

Para a definição do traço nas matrizes reais quadradas  $M(n)$  veja Seção 5.3.4.

**Exercício 10.3.1.** a) No espaço vetorial  $M(m \times n)$  das matrizes reais  $m \times n$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \text{tr}(\mathbf{a}^t \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} \quad (10.3.1)$$

define um produto interno. Verifique. Identifique  $M(m \times n)$  naturalmente com  $\mathbb{R}^{mn}$  e verifique que  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$  corresponde ao produto Euclidiano em  $\mathbb{R}^{mn}$ .

b) Mostre que o subespaço  $\mathcal{A} \subset M(n)$  das matrizes anti-simétricas é o complemento ortogonal do subespaço  $\mathcal{S}$  das matrizes simétricas:

$$\mathcal{A} = \mathcal{S}^\perp \quad \text{e assim } \mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = M(n).$$

[Dicas: a) Seção 5.3.4.]

**Exercício 10.3.2.** No espaço vetorial  $\mathcal{L}(E, F)$  de operadores lineares

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^* B) := \text{tr}[A^* B]_{\mathcal{U}} \quad (10.3.2)$$

define um produto interno onde  $\mathcal{U}$  é uma base de  $E$ . Verifique.

### 10.4 Operadores normais

**Definição 10.4.1.** Consideramos operadores lineares  $A$  em  $E$  as quais comutam com sua adjunta  $AA^* = A^*A$ . Tal  $A$  é chamado de **operador normal**.

**Exemplo 10.4.2.** São normais operadores  $A \in \mathcal{L}(E)$  tais que

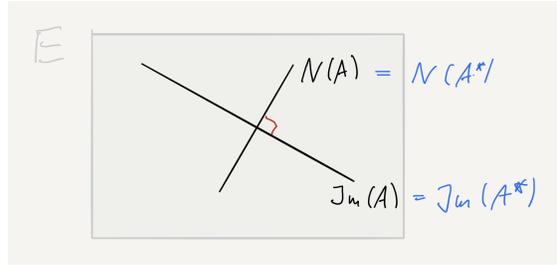
- a)  $A^* = A$ ; operadores auto-adjuntos
- b)  $A^* = A^{-1}$ . operadores ortogonais

Um operador  $A$  é normal se e somente sua adjunta  $A^*$  é normal, e neste caso cada um imagem  $Av$  e  $A^*v$  tem a **mesma norma**. Operadores normais tem a propriedade que  $A$  e a adjunta  $A^*$  tem os **mesmos autovalores** e **autovetores** associadas, o **mesmo núcleo** e a **mesma imagem** as quais, além disso, são complementos ortogonais um do outro como ilustrado na Figura 10.2.

**Exercício 10.4.3.** Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$  normal. Prove que

- a) a adjunta  $A^*$  é normal também;
- b)  $|Av| = |A^*v|$  para todos os vetores  $v$  de  $E$ ;  $\Leftrightarrow A$  ortogonal (Thm. 12.2.1)
- c)  $v$  autovetor de  $A$  com autovalor  $\lambda \Leftrightarrow v$  autovetor de  $A^*$  com autovalor  $\bar{\lambda}$ ;
- d)  $N(A) = N(A^*)$  e  $\text{Im}(A) = \text{Im}(A^*)$ . lembre que  $N(A^*) = (\text{Im}(A))^\perp$ .

[Dicas: b) Calcule  $|Av|^2$  com produto interno. c)  $0 = |(A - \lambda I)v|^2 = \dots$   
d) Para núcleo use b) e para imagem use complementos ortogonais (10.1.3).]

Figura 10.2: Operador normal  $A$  ( $\Leftrightarrow A^*$  normal)

## 10.5 Exercícios

Para todos os exercícios seja  $E$  um espaço vetorial de dimensão  $n < \infty$ , munido de um produto interno.

1. Determine uma inversa à direita para

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2x - y - z),$$

e uma inversa à esquerda para

$$B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y, x + 3y, 4x + y).$$

2. Dado

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

calcule  $\mathbf{a}\mathbf{a}^t$  e, a partir daí, encontre uma matriz  $\mathbf{b} \in M(3 \times 2)$  tal que  $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbb{1}_2$ .

3. Seja  $P$  uma projeção em  $E$  ( $P \in \mathcal{L}(E)$  e  $P^2 = P$ ). Prove que a adjunta  $P^*$  também é uma projeção em  $E$ . Dê um exemplo em que  $P^* \neq P$ .

4. Uma matriz quadrada  $\mathbf{a}$  chama-se *diagonalizável* quando é semelhante a uma matriz  $\mathbf{d} = (d_{ij})$  do tipo *diagonal* ( $d_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ ), ou seja, quando existe  $\mathbf{p}$  invertível tal que  $\mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p} = \mathbf{d}$ . Prove que:

- $\mathbf{a}$  diagonalizável  $\Rightarrow \mathbf{a}^t$  diagonalizável.
- Se a matriz do operador  $A \in \mathcal{L}(E)$  relativamente a uma base de  $E$  é diagonalizável, então  $A$  é em relação a qualquer outra base.

5. Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$ .

- Seja  $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$  e cada  $F_i$  é um subespaço invariante por  $A$ . Tome uma base ordenada  $\mathcal{V}$  de  $E$  que seja uma união de bases das  $F_i$ . Determine a forma da matriz de  $A$  na base  $\mathcal{V}$ .
- Se  $E$  possui uma base formada por autovetores de  $A$ , prove que existe também uma base de  $E$  formada por autovetores de  $A^* : E \rightarrow E$ . [Dica: (a).]



# Capítulo 11

## Operadores auto-adjuntos

Neste<sup>1</sup> Capítulo 11 consideramos operadores  $A \in \mathcal{L}(E)$  num espaço vetorial real  $E$  de dimensão finita  $n$  e com produto interno, ou seja

$$A: E \rightarrow E, \quad E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

Lembramos que devido ao produto interno o corpo será  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

**Definição 11.0.1** (Auto-adjunto). Chama-se um operador  $A \in \mathcal{L}(E)$  de **auto-adjunto** se ele iguale a sua adjunta  $A^* = A$ .

**Observação 11.0.2.** a) O operador nulo  $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(E)$  é auto-adjunto  $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}$ .

O operador identidade  $I \in \mathcal{L}(E)$  é auto-adjunto  $I^* = I$ .

b) Operadores auto-adjuntos são operadores normais.

c) Para operadores auto-adjuntos núcleo e imagem são complementos ortogonais  $N(A) = \text{Im}(A)^\perp$  segundo Teorema 10.1.7.

Os operadores auto-adjuntos formam um subespaço de  $\mathcal{L}(E)$ :

**Lema 11.0.3.** Para operadores auto-adjuntos  $A, B \in \mathcal{L}(E)$  vale o seguinte.

(i) Somas  $A+B = (A+B)^*$  e múltiplos reais  $\alpha A = (\alpha A)^*$  são auto-adjuntos.

(ii)  $AB$  auto-adjunto  $\Leftrightarrow AB = BA \Leftrightarrow BA = AB \Leftrightarrow BA$  auto-adjunto.

No caso  $[A, B] := AB - BA = \mathbf{O}$  diz-se que **A e B comutam**.

*Demonstração.* Teorema 10.1.5. □

**Lema 11.0.4** (Restrição preserva auto-adjunto). A restrição de um operador auto-adjunto  $A \in \mathcal{L}(E)$  a um subespaço  $F$  invariante por  $A$  é auto-adjunta.

*Demonstração.* Para todos os  $f, \tilde{f} \in F$  vale

$$\langle f, (A|_F)^* \tilde{f} \rangle = \langle (A|_F) f, \tilde{f} \rangle = \langle Af, \tilde{f} \rangle \stackrel{A^*=A}{=} \langle f, A\tilde{f} \rangle = \langle f, (A|_F) \tilde{f} \rangle$$

então  $(A|_F)^* = (A|_F)$  segundo Lema 9.1.3. □

<sup>1</sup>Cap. 11 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

## 11.1 Auto-adjunto e ortogonalidade

**Lema 11.1.1** (As projeções auto-adjuntas são as projeções ortogonais). *Dado Um par de subespaços complementares  $F \oplus G = E$ , então são equivalente*

$$P := P_{F,G} \in \mathcal{L}(E) \text{ auto-adjunto} \quad \Leftrightarrow \quad F \perp G.$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Dado  $f \in F$ ,  $g \in G$ , como  $F = \text{Fix } P_{F,G}$  e  $G = N(P_{F,G})$  segundo (7.1.2) obtemos

$$\langle f, g \rangle = \langle Pf, g \rangle \stackrel{P=P^*}{=} \langle f, Pg \rangle = 0.$$

“ $\Leftarrow$ ” Dado  $u, \tilde{u} \in E$ . Como  $E = F \oplus G$  escrevemos  $u = f + g$  e  $\tilde{u} = \tilde{f} + \tilde{g}$  para únicos  $f, \tilde{f} \in F$  e  $g, \tilde{g} \in G$  (Teorema 2.3.4). Como  $F = \text{Fix } P_{F,G}$  e  $G = N(P_{F,G})$

$$\begin{aligned} \langle u, P^* \tilde{u} \rangle &\stackrel{(10.1.2)}{=} \langle P(f+g), \tilde{u} \rangle \stackrel{g \in N(P)}{=} \langle \overbrace{Pf}^=f, \tilde{f} + \tilde{g} \rangle \\ &\stackrel{\tilde{g} \perp f}{=} \langle f, \tilde{f} \rangle \stackrel{\tilde{f} \perp g}{=} \langle f + g, P\tilde{f} \rangle \stackrel{\tilde{g} \in N(P)}{=} \langle u, P\tilde{u} \rangle. \end{aligned}$$

Então  $P^* = P$  segundo Lema 9.1.3. □

**Proposição 11.1.2.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$  auto-adjunto e  $F \subset E$  subespaço, então*

$$F \text{ subespaço invariante por } A \quad \Leftrightarrow \quad F^\perp \text{ subespaço invariante por } A.$$

*Demonstração.* Proposição 10.1.9. □

**Teorema 11.1.3** (Autovalores diferentes tem autovetores ortogonais). *Seja  $A = A^*$  um operador auto-adjunto em  $E$ . Então autovetores  $\xi_\lambda$  e  $\xi_\mu$  associados a autovalores diferentes  $\lambda \neq \mu$  são ortogonais, em símbolos  $\xi_\lambda \perp \xi_\mu$ .*

*Demonstração.* Vale que o produto se anula

$$(\lambda - \mu)\langle \xi_\lambda, \xi_\mu \rangle = \langle \lambda \xi_\lambda, \xi_\mu \rangle - \langle \xi_\lambda, \mu \xi_\mu \rangle = \langle A\xi_\lambda, \xi_\mu \rangle - \langle \xi_\lambda, A\xi_\mu \rangle \stackrel{A^*=A}{=} 0$$

e assim, como  $(\lambda - \mu) \neq 0$ , segue que  $\langle \xi_\lambda, \xi_\mu \rangle = 0$ . □

## 11.2 Matrizes simétricas

Como podemos checar se um operador  $A \in \mathcal{L}(E)$  é auto-adjunto? Só calcular a matriz dele em respeito a uma base **ON** e ver se é simétrica.

**Teorema 11.2.1.** *Seja  $\mathcal{X} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  uma base **ON** de  $E$ . Então os operadores auto-adjuntos correspondem exatamente às matrizes simétricas  $n \times n$ . Com efeito, a aplicação entre espaços vetoriais*

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_{\mathcal{X}}: \{ \text{operadores auto-adjuntos em } E \} &\rightarrow \mathcal{S}(n) \\ A &\mapsto \mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X}} \end{aligned}$$

*é linear e bijetivo (um isomorfismo).*

*Demonstração.* Bem definido: Com efeito é simétrica a matriz  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X}} = [A^*]_{\mathcal{X}} = \mathbf{a}^t$  onde a última igualdade é Teorema 10.1.11.

Linear e injetivo: Teorema 5.2.7.

Sobrejetivo: Dado uma matriz  $n \times n$  simétrica  $\mathbf{a} = (a_{ij})$ , define  $A \in \mathcal{L}(E)$  nos membros da base ON  $\mathcal{X}$  assim  $A\varepsilon_j := \varepsilon_1 a_{1j} + \cdots + \varepsilon_n a_{nj}$  e estende linearmente a  $E$ . Então  $A$  é auto-adjunto porque  $[A]_{\mathcal{X}} = \mathbf{a} = \mathbf{a}^t = [A^*]_{\mathcal{X}}$  onde a última igualdade é Teorema 10.1.11. Mas se as matrizes de dois operadores são iguais os operadores são iguais porque eles tomam os mesmos valores numa base.  $\square$

**Corolário 11.2.2.** *Os operadores auto-adjuntos formam um subespaço de dimensão  $n(n+1)/2$  do espaço vetorial  $\mathcal{L}(E)$  onde  $n = \dim E$ .*

*Demonstração.* Segundo Corolário 6.4.9 isomorfismos, assim aquele em Teorema 11.2.1, preservam dimensão e  $\dim \mathcal{S}(n) = n(n+1)/2$  segundo (3.2.2).  $\square$

**Comentário 11.2.3.** Seja  $E = F \oplus G$ . Pode-se usar Teorema 11.2.1, simetria da matriz, para provar Lema 11.1.1 o que diz que

$$P := P_{F,G} \in \mathcal{L}(E) \text{ auto-adjunto} \quad \Leftrightarrow \quad F \perp G.$$

Sejam  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$  e  $\{\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n\}$  bases ONs de  $F$  e  $G$ , respectivamente. Então  $\mathcal{X} := \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  é uma base ON de  $E$  se e somente se  $F \perp G$ . Neste caso a matriz de  $P$  tem a forma simétrica

$$\mathbf{p} := [P]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O}_{n-k} \end{bmatrix} = \mathbf{p}^t$$

o que é equivalente a  $P$  sendo auto-adjunto (Teorema 11.2.1).

**Exemplo 11.2.4.** Sejam dois operadores  $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  dados por

$$A(x, y) = (x, 2y), \quad B(x, y) = (y, x).$$

Determine quais dos quatro  $A, B, AB, BA$  são auto-adjuntos.

**Uma solução.** Obviamente escolhemos a base canónica  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$  como base ON. Auto-adjunto é equivalente a simetria da matriz.

(i)  $\mathbf{a} := [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^t = \mathbf{a}^t$  e assim  $A = A^*$  é auto-adjunto;

(ii)  $\mathbf{b} := [B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}^t$  e assim  $B = B^*$  é auto-adjunto;

(iii)  $[AB] = [A][B] = \mathbf{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{c}$ , então como  $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^t$  sabemos que  $AB$  não é auto-adjunto;

(iv)  $[BA] = [B][A] = \mathbf{ba} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{d}$ , então como  $\mathbf{d} \neq \mathbf{d}^t$  sabemos que  $BA$  não é auto-adjunto.

**Outra solução (iii-iv).** Não-comutatividade  $\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{ba}$  é equivalente a não-comutatividade  $AB \neq BA$  o que é equivalente, segundo Lema 11.0.3, a  $AB$  e  $BA$  ambos não são auto-adjuntos.

**Exercício 11.2.5.** Considere a base ordenada  $\mathcal{B} = (\xi_1, \xi_2) := ((1, -1), (3, 1))$  de  $\mathbb{R}^2$ . Determine se o operador  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  cuja matriz  $[A]_{\mathcal{B}}$  é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = [A]_{\mathcal{B}} =: \mathbf{a}$$

é auto-adjunto, ou não.

**Uma solução.** A matriz  $\mathbf{a}$  é simétrica, mas a base  $\mathcal{B}$  não é ON. Precisamos calcular a matriz de  $A$  em respeito a uma base ON, logicamente vamos escolher a base mais simples, a base canônica  $\mathcal{E}$ . Para determinar  $[A]_{\mathcal{E}}$  começamos assim

$$\begin{aligned} Ae_1 - Ae_2 &= A(e_1 - e_2) = A(1, -1) = \xi_1 \cdot 1 + \xi_2 \cdot 0 = \xi_1 = (1, -1) = e_1 - e_2 \\ 3Ae_1 + Ae_2 &= A(3e_1 + e_2) = A(3, 1) = \xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 5 = 5(3, 1) = 15e_1 + 5e_2. \end{aligned}$$

Adicionamos as identidades para obtermos

$$4Ae_1 + \mathcal{O} = 16e_1 + 4e_2 \quad \Rightarrow \quad Ae_1 = e_1 \cdot 4 + e_2 \cdot 1$$

e consequentemente a primeira coluna da matriz

$$\mathbf{b} := [A]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A segunda coluna segue da primeira identidade  $Ae_2 = Ae_1 - e_1 + e_2 = e_1 \cdot 3 + e_2 \cdot 2$ . Como a matriz  $\mathbf{b} \neq \mathbf{b}^t$  não é simétrica, o operador  $A$  não é auto-adjunto.

### 11.3 Teorema espectral – diagonalização

**Proposição 11.3.1** (Caso  $\dim E = 2$ ). *Na dimensão dois para todo operador auto-adjunto  $A$  existe uma base ON  $\mathcal{X} = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\}$  composto de autovetores.*

*Demonstração.* Escolha uma base ON  $\mathcal{Y}$  de  $E$ . A matriz correspondente

$$\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$$

é simétrica porque  $A = A^*$  é auto-adjunto. O polinômio característico é

$$p_A(\lambda) := p_{[A]_{\mathcal{Y}}}(\lambda) := \lambda^2 - (\alpha + \gamma)\lambda + (\alpha\gamma - \beta^2)$$

e suas raízes são segundo a fórmula (8.2.5) dadas por

$$\lambda_{\pm} = \frac{(\alpha + \gamma) \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = (\alpha + \gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2) \geq 0.$$

Observe que  $\Delta = (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 \geq 0$  é realmente não-negativo.

**Caso  $\Delta = 0$ .** Então  $\alpha = \gamma$  e  $\beta = 0$ , e daí  $\mathbf{a} = \alpha \mathbb{1}$  e  $A = \alpha I_E$ . Consequentemente  $\alpha$  é o único autovalor e qualquer base ON é composto de autovetores.

**Caso  $\Delta > 0$ .** Neste caso  $\lambda_- < \lambda_+$  são autovalores diferentes de  $[A]_{\mathcal{Y}}$ , assim de  $A$ . Autovetores correspondentes são ortogonais segundo Teorema 11.1.3.  $\square$

**Proposição 11.3.2** (Existência de um autovetor). *Todo operador auto-adjunto  $A: E \rightarrow E$  admite um autovetor  $v$ .*

*Demonstração.* Segundo Teorema C.5.1 na dimensão finita todo operador linear admite um subespaço invariante  $F \subset E$  de dimensão 1 ou 2. (Isso é trabalhoso.)

**Caso  $\dim F = 1$ .** Segundo Lema 8.0.4 existe um elemento  $v \in F$  e um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $Av = \lambda v$ . Não temos usado que  $A$  é auto-adjunto, vamos próximo:

**Caso  $\dim F = 2$ .** Como  $A: E \rightarrow E$  é auto-adjunto a restrição  $A|_F: F \rightarrow F$  também é auto-adjunta segundo Lema 11.0.4. Segundo Proposição 11.3.1 existe uma base ON de  $F$  composto de dois autovetores de  $A|_F$ , assim de  $A$ .  $\square$

**Teorema 11.3.3** (Teorema espectral). *Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$ , então são equivalente*

$$A^* = A \Leftrightarrow \exists \text{ base ON } \mathcal{X} = \{\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n\} \text{ de } E \text{ composto de autovetores de } A.$$

*Neste caso  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec } A} E_\lambda$ , onde os autosubespaços  $E_\lambda$  são dois-a-dois ortogonais, e para todo autovalor as multiplicidades  $\text{alg}_\lambda(A) = g_\lambda(A)$  coincidem.*

Lembra de Exercício 8.1.11 que a matriz de um operador em respeito a uma base composto de autovetores é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são os autovalores.

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” 1) Segundo a *prova* da Proposição 11.3.2 existe um subespaço  $F \subset E$  invariante por  $A$  e de dimensão 1 ou 2 e além disso  $F$  chega com uma base ON composto de autovetores de  $A$ .

2) O complemento ortogonal  $F^\perp$  é invariante por  $A$  segundo Proposição 11.1.2. Assim a restrição  $A|_{F^\perp}: F^\perp \rightarrow F^\perp$  existe e, segundo Lema 11.0.4, é auto-adjunto.

Repetimos 1) para  $\tilde{E} := F^\perp$  e depois 2). Cada vez a dimensão é reduzida por 1 ou 2. Por isso o processo termina em não mais como  $n = \dim E$  iterações.

“ $\Leftarrow$ ” Sejam  $\hat{\xi}_i$  e  $\hat{\xi}_j$  membros da base ON  $\mathcal{X}$  com autovalores  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$ , então

$$\langle \hat{\xi}_i, A^* \hat{\xi}_j \rangle = \langle A \hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j \rangle = \langle \lambda_i \hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \delta_{ij} = \langle \hat{\xi}_i, \lambda_j \hat{\xi}_j \rangle = \langle \hat{\xi}_i, A \hat{\xi}_j \rangle.$$

Então os dois operadores  $A^*$  e  $A$  são iguais segundo Lema 9.1.3.

Proposição 8.2.7 e Teorema 11.1.3 concluem a prova do teorema espectral.  $\square$

## Diagonalização simultânea

**Proposição 11.3.4.** *Para dois operadores auto-adjuntos  $A, B \in \mathcal{L}(E)$  vale*

$$AB = BA \Leftrightarrow \exists \text{ base ON composto de autovetores comuns a } A \text{ e } B.$$

*Demonstração.* '⇒' 1. Como o operador  $A \in \mathcal{L}(E)$  é auto-adjunto ele possui um autovalor  $\lambda_1$  com autosubespaço associado  $E_{\lambda_1}(A) \neq \{\mathcal{O}\}$ , veja Proposição 11.3.2. Para  $\xi \in E_{\lambda_1}(A)$  obtemos que  $\lambda_1(B\xi) = B(\lambda_1\xi) = B(A\xi) = A(B\xi)$  onde o último passo é a hipótese  $AB = BA$ . Mas isso diz que  $B\xi \in E_{\lambda_1}(A)$ . Temos provado que  $E_{\lambda_1}(A)$  é invariante por  $B$ . Assim, segundo Lema 11.0.4, a restrição  $B|_{E_{\lambda_1}(A)} \in \mathcal{L}(E_{\lambda_1}(A))$  é auto-adjunta. Mas neste caso  $B|_{E_{\lambda_1}(A)}$  possui um autovetor  $\xi_1 \in E_{\lambda_1}(A)$  segundo Proposição 11.3.2. O vetor  $\xi_1$  é autovetor de  $B$  e de  $A$ .

2. Como o subespaço  $F := \mathbb{R}\xi_1$  é invariante por  $A$  (e por  $B$ ) a Proposição 11.1.2 diz que o complemento ortogonal  $F^\perp$  é invariante por  $A$  (e por  $B$ ). Como  $A$  e  $B$  são auto-adjuntos as suas restrições a  $F^\perp$  são auto-adjuntas também, conforme Lema 11.0.4. Note que  $\dim F^\perp = (\dim E) - 1$ .

3. Repete 1. e 2. para  $\tilde{E} = F^\perp$  e as restrições de  $A$  e de  $B$  para obter um autovetor  $\xi_2$  comum de  $A$  e de  $B$ . O processo termina depois  $n = \dim E$  passos porque em cada repetição a dimensão diminui por 1.

'⇐' Exercício. □

## 11.4 Operadores não-negativos

**Definição 11.4.1.** Um operador **auto-adjunto**  $A = A^* \in \mathcal{L}(E)$  é chamado de **operador não-negativo**, símbolo  $A \geq \mathbf{0}$ , se

$$\langle Av, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in E.$$

No caso  $\langle Av, v \rangle > 0 \forall v \neq \mathcal{O}$  chama-se  $A$  de **operador positivo**, símbolo  $A > \mathbf{0}$ .

Lembre que o complemento ortogonal  $v^\perp$  de um vetor não-nulo é um hiperplano de  $E$  e assim decompõe  $E$  em dois semi-espacos cuja interseção é  $v^\perp$ . Uma interpretação geométrica do que um operador  $A = A^*$  é não-negativo seria que cada um vetor imagem  $Av$  aponta no mesmo semi-espaco como o vetor  $v$ . Vamos ver que  $Av \in v^\perp$  só é possível no caso do vetor nulo  $Av = \mathcal{O}$ .

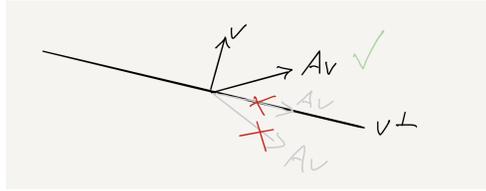


Figura 11.1: Operador não-negativo  $A \geq \mathbf{0}$  não inverte direção “ao passado”

**Exercício 11.4.2** (Quadrado de operadores auto-adjuntos).  $A = A^* \Rightarrow A^2 \geq \mathbf{0}$ .

**Teorema 11.4.3** (Operadores auto-adjuntos). *Seja  $A = A^* \in \mathcal{L}(E)$ . Então positividade de  $A$  é equivalente a positividade de todos os autovalores, em símbolos*

$$A > \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{spec } A \subset (0, \infty).$$

Analogamente  $A \geq 0 \Leftrightarrow \text{spec } A \subset [0, \infty)$ .

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Seja  $Av = \lambda v$  onde  $v \neq \mathcal{O}$ , então  $\lambda \langle v, v \rangle = \langle Av, v \rangle > 0$ .  
 “ $\Leftarrow$ ” Seja  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base ON de  $E$  de autovetores, ou seja  $A\xi_i = \lambda_i \xi_i$  onde  $\lambda_i > 0$ . Nesta base escreve  $v \in E \setminus \{\mathcal{O}\}$  como  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$ , usando  $\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}$  obtemos  $\langle Av, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i A\xi_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i > 0$ .  $\square$

**Corolário 11.4.4.** *Seja  $A \geq 0$  e  $v \in E$ , então*

$$\langle Av, v \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad Av = \mathcal{O}.$$

(Escrito em outros símbolos, se  $A \geq 0$  então vale:  $Av \perp v \Rightarrow v \in N(A)$ .)

*Demonstração.* Como na prova do teorema anterior seja  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base ON de  $E$  composto de autovetores de  $A$ . Suponhamos que os primeiros  $k$  formam uma base  $\mathcal{X}_0 = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  do núcleo  $N(A) = E_0$ ; possivelmente  $\mathcal{X}_0 = \emptyset$ . Escrevemos  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$ . Então a identidade

$$0 = \langle Av, v \rangle = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i^2 \underbrace{\lambda_i}_{>0}$$

implica que  $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$ . Assim

$$Av = \alpha_1 \underbrace{\lambda_1}_0 \xi_1 + \dots + \alpha_k \underbrace{\lambda_k}_0 \xi_k + \underbrace{\alpha_{k+1}}_0 \lambda_{k+1} \xi_{k+1} + \dots + \underbrace{\alpha_n}_0 \lambda_n \xi_n = \mathcal{O}.$$

$\square$

**Corolário 11.4.5.**  $A > 0 \Leftrightarrow A \geq 0$  e  $A$  é invertível.

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Logicamente  $A > 0$  implica  $A \geq 0$ . Segundo Teorema 11.4.3 os autovalores de  $A$  são  $> 0$ , assim  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$ . Consequentemente  $A$  é injetivo, equivalentemente sobrejetivo, então um isomorfismo, assim invertível segundo Proposição 6.4.4.

“ $\Leftarrow$ ” Seja  $A \geq 0$  invertível, particularmente  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$ . Dado  $v \in E$  não-nulo, então  $Av \neq \mathcal{O}$  e daí  $\langle Av, v \rangle \neq 0$  conforme Corolário 11.4.4. De outro lado  $\langle Av, v \rangle \geq 0$  segundo à hipótese  $A \geq 0$ .  $\square$

**Teorema 11.4.6** (Raíz quadrada não-negativa / positiva). *Todo operador não-negativo admite uma única raíz quadrada não-negativa: Dado  $A \geq 0$ , então existe um único  $B \geq 0$ , chamado de **a raíz quadrada não-negativa** de  $A$ , tal que  $B^2 = A$ . Vale  $A > 0 \Leftrightarrow B > 0$  e  $B$  é chamado de raíz quadrada **positiva**.*

Notações comuns para a raíz quadrada não-negativa são  $\sqrt{A}$  ou  $A^{\frac{1}{2}}$ .

*Demonstração.* Seja  $A \geq 0$ . EXISTÊNCIA. Segundo Teorema 11.4.3 sabemos que  $A$  tem autovalores  $\lambda_i \geq 0$ , com efeito

$$\text{spec } A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subset [0, \infty)$$

onde  $r \leq n := \dim E$ . Segundo Teorema 11.3.3 temos a soma ortogonal

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}.$$

Escrevemos  $v \in E$  na forma  $v = v_1 + \cdots + v_r$  para autovetores únicos  $v_i \in E_{\lambda_i}$ , veja Teorema 2.3.4. Assim  $Av = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$ . Definimos o candidato para a raiz quadrada assim

$$B: E \rightarrow E, \quad v \mapsto \sqrt{\lambda_1} v_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_r} v_r.$$

Obtemos imediatamente que  $B^2 = A$ , com efeito

$$B^2 v = B(\sqrt{\lambda_1} v_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_r} v_r) = \sqrt{\lambda_1}^2 v_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_r}^2 v_r = Av.$$

Escrevendo  $w \in E$  analogamente como  $w = w_1 + \cdots + w_r$  segue que  $B = B^*$ :

$$\langle Bv, w \rangle = \sum_{j=1}^r \langle \sqrt{\lambda_j} v_j, w_j \rangle = \sum_{j=1}^r \langle v_j, \sqrt{\lambda_j} w_j \rangle = \langle v, Bw \rangle$$

onde temos usado ortogonalidade  $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$  na igualdade 1 e 3. Similarmente

$$\langle Bv, v \rangle = \sum_{j=1}^r \langle \sqrt{\lambda_j} v_j, v_j \rangle = \sum_{j=1}^r \sqrt{\lambda_j} |v_j|^2 \geq 0$$

o que conclui a prova de  $B \geq 0$ .

UNICIDADE. Suponha que um operador  $C \geq 0$  satisfaz  $C^2 = A$ .

1) Os autosubespaços  $E_{\lambda_i}$  de  $A$  são invariante por  $C$ : Dado  $v \in E_{\lambda_i}$ , segue  $Cv \in E_{\lambda_i}$  da comutatividade  $AC = CA$  a qual vale segundo a hipótese  $C^2 = A$ .  
 2) A restrição  $C_i := C|_{E_{\lambda_i}}$  iguale  $\sqrt{\lambda_i} I$ : A restrição existe segundo 1) e é auto-adjunto segundo Lema 11.0.4 usando a hipótese  $C = C^*$ . Conforme o teorema espectral existe uma base ON do domínio  $E_{\lambda_i}$  de  $C_i$  composto de autovetores de  $C_i$ . Assim resta mostrar que  $C_i$  admite só um autovalor e ele é  $\sqrt{\lambda_i}$ . Existência de um autovalor é garantido por Proposição 11.3.2. Suponha então que  $C_i \xi = \mu \xi$  onde  $\xi \in E_{\lambda_i}$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ . A hipótese  $C \geq 0$  implica que  $\mu \geq 0$ . Como

$$\lambda_i \xi = A\xi = C(C\xi) = C(\mu\xi) = \mu(C\xi) = \mu^2 \xi$$

e como  $\xi \neq \mathcal{O}$  segue que  $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ .

3) Escrevendo  $v \in E$  mais uma vez na forma  $v = v_1 + \cdots + v_r$  obtemos que

$$Cv = Cv_1 + \cdots + Cv_r \stackrel{2)}{=} \sqrt{\lambda_1} v_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_r} v_r \stackrel{\text{def.}}{=} Bv.$$

Prova-se analogamente o caso  $A > 0$ . □

#### Comentário 11.4.7.

- a)  $(R_{90^\circ})^2 = R_{90^\circ} R_{90^\circ} = R_{180^\circ} = -\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} < 0$ . (Não todo quadrado é  $\geq 0$ )  
 ( $R_{90^\circ}$  não é auto-adjunto conforme Exercício 11.4.2)

- b) vale  $\mathbf{c}\mathbf{c} = \mathbb{1}_2 \geq 0$  para (Existência de outras raízes  $\mathbf{c} \not\geq 0$ )
- a matriz  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \not\geq 0$ ; não auto-adjunta e  $\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{7} \not\geq 0$
  - a matriz  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \not\geq 0$ ; auto-adjunta mas  $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \not\geq 0$
  - a matriz  $\mathbf{c} = -\mathbb{1}_2 \not\geq 0$ ; auto-adjunta mas  $\langle \mathbf{c}e_1, e_1 \rangle = -1 \not\geq 0$
  - a matriz  $\mathbf{c} = \mathbb{1}_2 > 0$ . a raiz quadrada não -negativa única

**Teorema 11.4.8.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  onde  $E$  e  $F$  espaços vetoriais de dimensões finitas e munido de produtos internos. Então vale o seguinte.*

- (i)  $A^*A \geq 0$  e  $AA^* \geq 0$ .
- (ii)  $(A^*A > 0$  e  $AA^* > 0) \Leftrightarrow A$  invertível.
- (iii)  $N(A^*A) = N(A)$  e  $N(AA^*) = N(A^*)$ .
- (iv)  $\text{posto}(A^*A) = \text{posto}(A) = \text{posto}(A^*) = \text{posto}(AA^*)$ .

*Demonstração.* (i)  $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$  e  $\langle A^*Av, v \rangle = \langle Av, Av \rangle \geq 0$ .

(ii) Segundo Corolário 11.4.5 temos as equivalências seguintes.

$$\begin{aligned} A^*A > 0 &\Leftrightarrow A^*A \geq 0 \text{ e } A^*A \text{ invertível} \Rightarrow A \text{ injetivo.} \\ AA^* > 0 &\Leftrightarrow AA^* \geq 0 \text{ e } AA^* \text{ invertível} \Rightarrow A \text{ sobrejetivo.} \end{aligned} \quad (11.4.1)$$

As duas implicações reversas valem segundo Proposição 10.2.1.

(iii)  $N(A^*A) = N(A)$ : 'c' Seja  $A^*Av = \mathcal{O}$ , então  $Av \in N(A^*) \stackrel{(10.1.3)}{=} (\text{im}(A))^\perp$ . Assim  $Av \in \text{im}(A) \cap (\text{im}(A))^\perp = \{\mathcal{O}\}$  provando que  $Av = \mathcal{O}$ . 'd' trivial.

(iv)  $\dim \text{im}(A^*A) = \dim E - \dim N(A^*A) \stackrel{(iii)}{=} \dim E - \dim N(A) = \dim \text{im}(A)$  onde temos usado o Teorema 6.5.1 de Núcleo e Imagem no passos um e três. Analogamente obtém-se  $\dim \text{im}(AA^*) = \dim \text{im}(A^*) =: \text{posto}(A^*)$ . Mas  $\text{posto}(A^*) = \text{posto}(A)$  segundo Corolário 10.1.8.

As afirmações cujas provas temos omitidos acima prova-se analogamente.  $\square$

**Corolário 11.4.9.** *Para  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  vale o seguinte.*

- a)  $A$  injetivo  $\Leftrightarrow A^*A$  invertível.
- b)  $A$  sobrejetivo  $\Leftrightarrow AA^*$  invertível.

*Demonstração.* '⇒' Proposição 10.2.1. '⇐' (11.4.1).  $\square$

Note que o máximo posto de uma matriz  $\mathbf{a}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é o mínimo

$$\min\{n, m\} = \begin{cases} n \Leftrightarrow \mathbf{a} \text{ injetivo} & \Leftrightarrow \mathbf{a}^t\mathbf{a} \text{ invertível} \\ m \Leftrightarrow \mathbf{a} \text{ sobrejetivo} & \Leftrightarrow \mathbf{a}\mathbf{a}^t \text{ invertível} \end{cases} \quad (11.4.2)$$

onde as últimas equivalências usam Corolário 11.4.9.

Podemos produzir exemplos de matrizes positivas e não-negativas simplesmente assim: Tome uma matriz  $\mathbf{a}$  de posto máximo. Enquanto ambas  $\mathbf{a}^t\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}\mathbf{a}^t$  são  $\geq 0$ , a menor é  $>$  segundo Corolário 11.4.5 e (11.4.2).

**Exemplo 11.4.10.** A matriz  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é de posto máximo  $m = 2$  como as primeiras duas colunas são LI e assim já geram  $\mathbb{R}^2$ . Assim

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^t = \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 20 & 29 \end{pmatrix} > 0, \quad \mathbf{a}^t\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 8 & 13 & 18 \\ 11 & 18 & 25 \end{pmatrix} \geq 0.$$

## 11.5 Teorema dos valores singulares

No seguinte trata-se de uma extensão do teorema espectral a operadores lineares gerais, auto-adjunto ou não, entre espaços vetoriais com produto interno.

O Teorema dos valores singulares será usado para estabelecer a decomposição polar de operadores não-negativos (Teorema 12.3.1).

**Teorema 11.5.1** (Teorema dos valores singulares). *Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais de dimensões finitas e munido de produtos internos. Seja  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e seja  $r = \text{posto}(A)$ . Então vale o seguinte: Existem bases ONs*

$$\mathcal{X} = \underbrace{\{\xi_1, \dots, \xi_r\}}_{\text{Im}A^*} \underbrace{\{\xi_{r+1}, \dots, \xi_n\}}_{N(A)} \text{ de } E, \quad \mathcal{Y} = \underbrace{\{\eta_1, \dots, \eta_r\}}_{\text{Im}A} \underbrace{\{\eta_{r+1}, \dots, \eta_m\}}_{N(A^*)} \text{ de } F,$$

e os chamados **valores singulares**<sup>2</sup>  $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in (0, \infty)$  de  $A$  tal que

$$\begin{aligned} A\xi_i &= \sigma_i\eta_i, & A^*\eta_i &= \sigma_i\xi_i, & i &= 1, \dots, r, \\ A\xi_j &= \mathcal{O}, & A^*\eta_j &= \mathcal{O}, & j &> r. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Vale  $A^*A \geq 0$  e  $\text{posto}(A^*A) = \text{posto}(A) = r$  segundo Teorema 11.4.8. Conforme o teorema espectral, Teorema 11.3.3, existe uma base ON  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$  tal que  $A^*A\xi_i = \sigma_i^2\xi_i$  com  $\sigma_i > 0$  se  $i \in \{1, \dots, r\}$  e  $\sigma_j = 0$  se  $j > r$ . As imagens

$$\eta_i := \frac{1}{\sigma_i}A\xi_i, \quad i = 1, \dots, r \quad \Rightarrow \quad A^*\eta_i = \frac{1}{\sigma_i}A^*A\xi_i = \sigma_i\xi_i$$

são dois-a-dois ortogonais e de comprimento 1, com efeito

$$\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j} \langle A\xi_i, A\xi_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j} \langle \xi_i, \underbrace{A^*A\xi_j}_{\sigma_j^2\xi_j} \rangle = \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \frac{\sigma_j}{\sigma_i} \delta_{ij} = \delta_{ij}$$

para  $\forall i, j = 1, \dots, r$ . Segundo Teorema 11.4.8 vale  $N(A^*A) = N(A)$ , daí  $A\xi_j = \mathcal{O}$  se  $j > r$ . Escolha uma base ON  $\{\eta_{r+1}, \dots, \eta_m\}$  de  $(\text{Im}A)^\perp = N(A^*)$ .  $\square$

Observe que  $\{\eta_1, \dots, \eta_r, \eta_{r+1}, \dots, \eta_m\}$  é uma base ON de autovetores de  $AA^* : F \rightarrow F$  com autovalores associados  $\sigma_i^2$  se  $i \in \{1, \dots, r\}$  e  $\sigma_j = 0$  se  $j > r$ .

<sup>2</sup> as raízes dos autovalores positivos, contados com multiplicidades, do operador  $A^*A \geq 0$

## 11.6 Exercícios

Para todos os exercícios  $E$  é um espaço vetorial de dimensão  $n < \infty$ , munido de produto interno.

1. Sejam  $A, B \in \mathcal{L}(E)$  auto-adjuntos tais que  $\langle Av, v \rangle = \langle Bv, v \rangle$ , para todo  $v \in E$ . Prove que  $A = B$ .
2. Determine  $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tal que

$$A(2, -1, -2) = (1, 1, 13) \quad \text{e} \quad A(3, -6, -6) = (3, 21, 33),$$

sabendo que o traço de  $A$  é 5.

3. Seja  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tal que  $A(4, 4, -2) = (10, -2, -2)$  e

$$A(4, -2, 4) = (-2, 10, -2), \quad A(1, -2, -2) = (1, 1, -5).$$

Prove que  $A^* = A$ .

4. Sejam  $A, B \in \mathcal{L}(E)$  auto-adjuntos. a) Prove que  $AB + BA$  é auto-adjunto.  
b) Que se pode dizer sobre  $AB - BA$ ?
5. Sejam  $A, B \in \mathcal{L}(E)$  auto-adjuntos tais que  $BA$  é diagonalizável.<sup>3</sup> Prove que  $AB$  também é diagonalizável.

[Dica: Veja §10.5 Exercício 5 (b).]

6. Seja  $P \in \mathcal{L}(E)$  uma projeção ortogonal. Encontre uma raiz quadrada  $B$  não-negativa de  $P$ . É única?

[Dica: Lembre-se que  $2P = I + S$ , onde  $S \in \mathcal{L}(E)$  é a reflexão ortogonal em torno de  $F := \text{Im}(P)$ .]

---

<sup>3</sup> Uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E)$  é chamada **diagonalizável** se, e somente se, existe uma base  $\mathcal{U}$  de  $E$  tal que a matriz  $\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{U}}$  de  $A$  é da forma diagonal. Neste caso, os elementos de  $\mathcal{U}$  são os autovetores de  $A$  e a diagonal da matriz  $\mathbf{a}$  contém os autovalores de  $A$ .



# Capítulo 12

## Operadores ortogonais

Neste<sup>1</sup> Capítulo 12 consideramos operadores lineares

$$A: E \rightarrow F$$

exclusivamente entre espaços vetoriais de dimensão **finita** com produtos internos

$$E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E), \quad F = (F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F),$$

e dimensões  $n = \dim E$  e  $m = \dim F$ . Dévido aos produtos internos o corpo sempre será  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Em vez de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  escrevemos geralmente  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , o contexto vai indicar do qual produto interno trata-se, aquele de  $E$  ou  $F$ .

Vamos estudar aqueles operadores as quais *preservam o produto interno* no sentido que o produto de dois vetores é igual ao produto das imagens deles

$$\langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle$$

para todos os vetores  $v, w \in E$ . Tal operador  $A$  é chamado de **isometria** ou, motivado pelo caso das matrizes, **operador ortogonal**.

### 12.1 Matrizes ortogonais

**Definição 12.1.1.** Uma matriz  $\mathbf{u} = (u_{ij}) \in M(m \times n)$  é chamado de **matriz ortogonal** se suas colunas  $\mathbf{u}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{u}_{\bullet n} \in \mathbb{R}^m$  formam um conjunto ON.<sup>2</sup>

Observe que as  $n$  colunas de uma matriz  $m \times n$  ortogonal formam uma base ON da imagem da matriz no  $\mathbb{R}^m$ .

**Corolário 12.1.2.** Para uma matriz ortogonal  $\mathbf{u} = (u_{ij}) \in M(m \times n)$  vale que

- (i)  $n \leq m$ ; *mais linhas como colunas*

---

<sup>1</sup>Cap. 12 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

<sup>2</sup> como devem ter norma 1 todas as colunas de uma matriz ortogonal são não-nulas

- (ii)  $\text{posto}(\mathbf{u}) = n$ ; *posto é máximo = número de colunas*  
 (iii)  $\mathbf{u}$  é injetiva. *invertível no caso quadrado  $n = m$*

*Demonstração.* (i) ON e não-nulo implica que  $\{\mathbf{u}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{u}_{\bullet n}\}$  é LI, daí o número  $n$  de elementos deve ser menor ou igual à dimensão do espaço ambiente  $\mathbb{R}^m$ .

(ii)  $\text{posto}(\mathbf{u}) := \dim \text{Im}(\mathbf{u}) = \text{pc}(\mathbf{u}) = n$ . (iii) Segundo o teorema de núcleo e imagem  $\dim \mathbb{R}^n = \dim \text{N}(\mathbf{u}) + \dim \text{Im}(\mathbf{u})$ , daí  $\dim \text{N}(\mathbf{u}) = 0$ .  $\square$

**Lema 12.1.3.**  $\mathbf{u}$  matriz ortogonal colunas ON  $\Leftrightarrow \mathbf{u}^t \mathbf{u} = \mathbb{1}_n$

*Demonstração.*  $\mathbf{u} \in \text{M}(m \times n)$  ortogonal  $:\Leftrightarrow \langle \mathbf{u}_{\bullet j}, \mathbf{u}_{\bullet k} \rangle = \delta_{jk} \forall j, k$ , mas

$$\delta_{jk} = \langle \mathbf{u}_{\bullet j}, \mathbf{u}_{\bullet k} \rangle = \sum_{i=1}^m u_{ij} u_{ik} = \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}^t)_{ji} u_{ik} = (\mathbf{u}^t \mathbf{u})_{jk}.$$

$\square$

É interessante observar que o produto matriz de duas matrizes ortogonais multiplicáveis, ou seja  $\mathbf{u} \in \text{M}(m \times k)$  e  $\mathbf{v} \in \text{M}(k \times n)$ , é ortogonal também

$$(\mathbf{u}\mathbf{v})^t(\mathbf{u}\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t \underbrace{\mathbf{u}^t \mathbf{u}}_{\mathbb{1}_k} \mathbf{v} = \mathbf{v}^t \mathbf{v} = \mathbb{1}_n.$$

### Matrizes quadradas – o grupo ortogonal

**Lema 12.1.4** (Matrizes ortogonais quadradas). *Para uma matriz quadrada  $\mathbf{u} \in \text{M}(n \times n)$  são equivalente*

- (i)  $\mathbf{u}$  ortogonal;  
 (ii)  $\mathbf{u}^{-1}$  existe e iguale  $\mathbf{u}^t$ ;  
 (iii) as colunas de  $\mathbf{u}$  formam um conjunto ON;  $\mathbb{1}_n = \mathbf{u}^t \mathbf{u}$   
 (iv) as linhas de  $\mathbf{u}$  formam um conjunto ON;  $\mathbb{1}_n = \mathbf{u} \mathbf{u}^t$   
 (v)  $\mathbf{u}^t$  ortogonal.

*Demonstração.* (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) A identidade  $\mathbf{u}^t \mathbf{u} = \mathbb{1}_n$  entre matrizes quadradas significa que  $\mathbf{u}^t$  e  $\mathbf{u}$  são inversas uma da outra. (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) Definição 12.1.1

(iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) Note que como  $\mathbf{u}^{-1}$  existe  $\mathbf{u}^t \mathbf{u} = \mathbb{1}_n \Leftrightarrow \mathbf{u} \mathbf{u}^t = \mathbb{1}_n$ , mas a segunda identidade significa (analogamente à prova de Lema 12.1.3) que as linhas de  $\mathbf{u}$  são todas não-nulas e formam um conjunto ON.

(iv)  $\Leftrightarrow$  (v) As linhas de  $\mathbf{u}$  são as colunas da transposta.  $\square$

**Exercício 12.1.5** (O grupo ortogonal  $O(n)$ ). Mostre que o conjunto  $O(n)$  das matrizes ortogonais quadradas  $n \times n$  munido do produto matriz é um grupo.

**Exercício 12.1.6.** Matrizes de passagem  $\mathbf{p}$  entre bases ONs são ortogonais.

**Exercício 12.1.7** ( $O(1)$ ). Mostre que  $O(1) = \{-1, +1\} = \mathbb{S}^0$  onde a esfera unitária  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  é composto dos pontos da distancia 1 da origem.

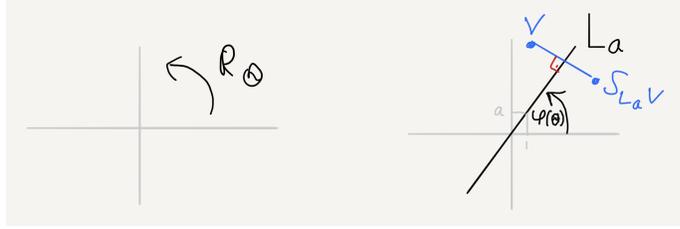


Figura 12.1: Grupo ortogonal  $O(2)$  composto de rotações e reflexões ortogonais

**Exemplo 12.1.8.** O grupo ortogonal  $O(2)$  é composto de dois círculos

$$O(2) = \{\text{rotações } R_\theta\} \cup \{\text{reflexões ortogonais } S_{L_a}\} = \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \quad (12.1.1)$$

onde  $L_a$  é a reta em  $\mathbb{R}^2$  passando  $\mathcal{O}$  e formando o ângulo  $\varphi(\theta)$  com o eixo- $x$ .

Para entender (12.1.1) lembre que as duas colunas de uma matriz  $2 \times 2$  ortogonal  $\mathbf{u}$  são vetores unitários ortogonais. Seja  $\theta \in (-\pi, \pi]$  o ângulo entre o eixo- $x$  no  $\mathbb{R}^2$  e o ponto cujas coordenadas são as entradas da primeira coluna. Assim a primeira coluna é da forma  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . A segunda coluna é ortogonal à primeira - mas isso deixa escolher uma de duas possibilidades como ilustrado na Figura 12.2. Assim a matriz  $\mathbf{u}$  é, ou a matriz  $\mathbf{r}_\theta$  de uma rotação, veja (4.3.1), ou a matriz  $\mathbf{s}_{a(\theta)}$  de uma reflexão ortogonal como vamos mostrar no seguinte. Note que  $\det \mathbf{r}_\theta = 1$ , enquanto  $\det \mathbf{s}_{a(\theta)} = -1$ .

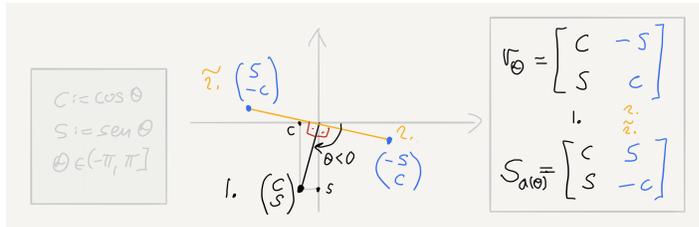


Figura 12.2: Colunas de uma matriz ortogonal são ON e descrito pelo ângulo  $\theta$

**REFLEXÃO ORTOGONAL.** A matriz  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_{a(\theta)}$  é simétrica, assim auto-adjunta, e pelo Teorema Espectral tem 2 autovalores contados com multiplicidade, de fato

$$p_{\mathbf{s}}(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{s}_\theta)\lambda + \det(\mathbf{s}_\theta) = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1.$$

Usando o teorema da adição de seno/coseno e que  $1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} = \sin^2 \frac{\theta}{2}$ , obtemos

$$\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \stackrel{(D.1.2)}{=} \frac{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2}.$$

Calculação mostra que um autovetor para  $\lambda = 1$  é, por exemplo, dado por

$$\xi_1 = \xi_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tan \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad \xi_{-1} = \mathbf{r}_{\pi/2} \xi_1 = \begin{bmatrix} -\tan \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Um autovetor para  $\lambda = -1$  deve ser ortogonal a  $\xi_1$  e por isso temos simplesmente aplicado a rotação. O espectro sendo  $\{\pm 1\}$  e ortogonalidade dos autosubespaços já diz que trata-se de uma reflexão ortogonal sobre a reta  $L$  passando  $\mathcal{O} = (0, 0)$  e contendo o vetor  $\xi_1$  como ilustrado na Figura 12.3.

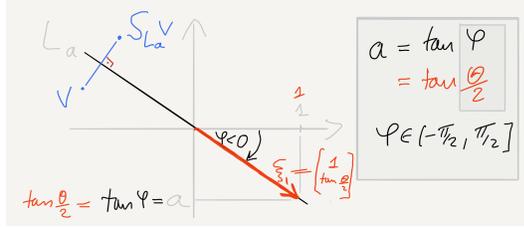


Figura 12.3: Reflexão ortogonal sobre reta  $L_a := \mathbb{R}(1, a) = \mathbb{R}\xi_1$  e ângulo  $\varphi = \frac{\theta}{2}$

A reta  $L$  é da forma  $L_a := \mathbb{R}(1, a)$  onde  $a = \tan \frac{\theta}{2}$ , compare Definição 4.3.8. Seja  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$  o ângulo do eixo- $x$  para a reta  $L_a$ , positivo no sentido contra-horário. Note que

$$\tan \varphi = \frac{a}{1} = \tan \frac{\theta}{2}$$

o que mostra que  $\varphi = \theta/2$  como ilustrado na Figura 12.4.

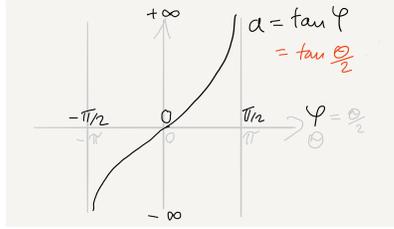


Figura 12.4: Os ângulos  $\theta$  da 1ª coluna (e da rotação) e  $\varphi = \theta/2$  da reta  $L_a$

Relembramos a fórmula (4.3.4) da matriz  $s_a$  da reflexão ortogonal em torno de  $L_a$ . Obtemos que<sup>3</sup>

$$\frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \cos \theta, \quad \frac{2a}{1 + a^2} = \sin \theta.$$

Assim a reflexão ortogonal (4.3.4) iguale a segunda forma da matriz ortogonal

$$s_a \stackrel{(4.3.4)}{=} \frac{1}{1 + a^2} \begin{bmatrix} 1 - a^2 & 2a \\ 2a & -(1 - a^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} = s_{a(\theta)}.$$

Isso conclui nossa análise do grupo ortogonal  $O(2) = \{\mathbf{u} \in M(2) \mid \mathbf{u}^t = \mathbf{u}^{-1}\}$ .

<sup>3</sup> Abreviando  $c = \cos \theta$  e  $s = \sin \theta$ , assim  $a = \frac{1-c}{s}$ , vale  $1 + a^2 = \frac{s^2 + 1 - 2c + c^2}{s^2} = 2 \frac{1-c}{s^2}$ , vale  $1 - a^2 = 2c \frac{1-c}{s^2}$ , e vale  $2a = 2 \frac{1-c}{s}$

## 12.2 Operadores ortogonais

**Teorema 12.2.1.** Para um operador  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  são equivalente

- (i)  $|Av| = |v| \forall v \in E$ ; “A preserva norma”
- (ii)  $|Au - Av| = |u - v| \forall u, v \in E$ ; “A preserva distância”
- (iii)  $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \forall u, v \in E$ ; “A preserva produto interno”
- (iv)  $A^*A = I_E$ ; “ $A^*$  é inversa à esquerda de  $A$ ”
- (v)<sub>1</sub> a matriz  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}$  é ortogonal para todas bases ONs  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ ;
- (v)<sub>2</sub> a matriz  $[A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}$  é ortogonal para um certo par de bases ONs  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ ;
- (vi)<sub>1</sub> o operador  $A$  leva uma certa base ON  $\mathcal{X}$  de  $E$  num subconjunto ON de  $F$ ;
- (vi)<sub>2</sub> o operador  $A$  leva todas bases ONs  $\mathcal{X}$  de  $E$  em subconjuntos ONs de  $F$ .

*Demonstração.* Teorema C.7.1 □

**Definição 12.2.2.** Chama-se  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  um **operador ortogonal** se  $A$  satisfaz uma (portanto todas as) afirmações de Teorema 12.2.1.

### Operadores em $E$

**Lema 12.2.3.**  $A \in \mathcal{L}(E)$  ortogonal  $\Leftrightarrow A^* = A^{-1}$ .

*Demonstração.* ‘ $\Rightarrow$ ’ Existência de uma inversa a esquerda de  $A$  ( $A^*A = I_E$ )  $\Leftrightarrow$   $A$  injetivo (Teorema 6.3.6)  $\Leftrightarrow$   $A$  sobrejetivo (Corolário 6.5.2 como domínio e codomínio são iguais)  $\Leftrightarrow$  existência de uma inversa a direita de  $A$  (Teorema 6.2.3). Pela Definição 6.4.1 a inversa de  $A$  existe e é igual  $A^*$ . ‘ $\Leftarrow$ ’ (iv) é trivial. □

**Lema 12.2.4.** Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$  ortogonal, então

- a)  $\lambda \in \text{spec } A \Rightarrow \lambda \in \{-1, +1\}$ ; “ $\text{spec } A = \emptyset$  é possível:  $A = R_{90^\circ}$ ”
- b)  $E_{-1} \perp E_1$ . “ $E_{\pm 1} = \{O\}$  é possível:  $A = R_{90^\circ}$ ”

*Demonstração.* a) Suponha que  $Av = \lambda v$  onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $v \in E$  não-nulo. Então segundo Teorema 12.2.1 (i) obtemos  $|v| = |Av| = |\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$ . Daí  $|\lambda| = 1$ .  
b) Dado  $u \in E_1$  e  $v \in E_{-1}$ , então segundo Teorema 12.2.1 (iii) obtemos que  $\langle u, v \rangle = \langle Au, Av \rangle = \langle u, -v \rangle = -\langle u, v \rangle$ . □

**Lema 12.2.5.** Seja  $F \subset E$  um subespaço invariante por  $A \in \mathcal{L}(E)$ .

- a)  $A$  ortogonal  $\Rightarrow AF^\perp \subset F^\perp$  e a restrição  $A|: F^\perp \rightarrow F^\perp$  é ortogonal.
- b)  $A$  invertível  $\Rightarrow A^{-1}F \subset F$ .

*Demonstração.* a) Como  $A$  é injetivo, a restrição  $A|: F \rightarrow F$  é injetiva e por isso sobrejetiva (Corolário 6.5.2), daí bijetiva. Assim para todo  $f \in F$  existe  $h_f \in F$  tal que  $Ah_f = f$ . Dado  $g \in F^\perp$ , vale que

$$\langle Ag, f \rangle = \langle Ag, Ah_f \rangle \stackrel{\text{Teor. (iii)}}{=} \langle g, h_f \rangle = 0.$$

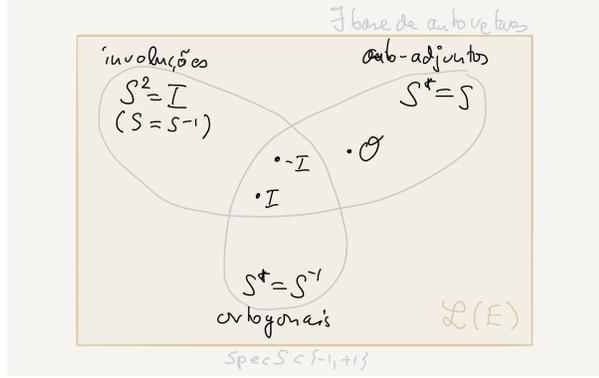


Figura 12.5: Na interseção estão as reflexões ortogonais  $S_{E_1, E_{-1}}$  e  $S_{E_{-1}, E_1}$

Como isso vale  $\forall f \in F$  segue  $Ag \in F^\perp$ . Para  $f \in F^\perp$  vale  $|A|f| = |Af| = |f|$ .  
 b) Como em parte a) concluímos que a restrição  $A|: F \rightarrow F$  é um isomorfismo. Assim para todo  $f \in F$  existe  $h_f \in F$  tal que  $Ah_f = f$ , ou seja  $A^{-1}f = h_f \in F$ . Dado  $f \in F$ , então para todos os  $g \in F^\perp$  vale que

$$\langle A^{-1}f, g \rangle = \underbrace{\langle h_f, g \rangle}_F = 0.$$

Isso prova que  $A^{-1}f \in (F^\perp)^\perp = F$ . □

**Comentário 12.2.6.** Seja  $S \in \mathcal{L}(E)$ . Como ilustrado na Figura 12.5 duas das três propriedades seguintes implicam a terceira

- (i)  $S^2 = I$ ; ( $\Leftrightarrow S = S^{-1}$ ) “involução”
- (ii)  $S^* = S$ ; “auto-adjunto”
- (iii)  $S^* = S^{-1}$ . “ortogonal”

### Caso $\dim E = 2$

**Comentário 12.2.7** (Operadores ortogonais na  $\dim E = 2$ ). Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$  ortogonal. Então o espectro de  $A$  é da forma  $\{1\}$ ,  $\{-1\}$ ,  $\{-1, 1\}$ , ou  $\emptyset$ .

**a) Caso  $\text{spec } A = \{1\}$ .** Neste caso  $A = I_E$ .  
 Para ver isso, observe que segundo hipótese existe  $\xi \neq \mathcal{O}$  tal que  $A\xi = 1 \cdot \xi$ . O complemento ortogonal do subespaço  $F := \langle \xi \rangle$  é de dimensão 1 como  $\dim E = 2$ . Pegue  $\eta \in F^\perp$  tal que  $|\eta| = 1$ . Como  $A\eta \in F^\perp$  (Le. 12.2.5), como  $F^\perp = \langle \eta \rangle$ , e como  $|A\eta| = |\eta| = 1$  segue que  $A\eta = \pm\eta$ . Como  $\text{spec } A = \{1\}$  deve ser  $A\eta = \eta$ . Como  $\xi \perp \eta$  o conjunto  $\{\xi, \eta\}$  forma uma base de  $\mathbb{R}^2$ . Daí  $A = I_E$ .

**b) Caso  $\text{spec } A = \{-1\}$ .** Neste caso  $A = -I_E$ . Análogo caso a).

**c) Caso  $\text{spec } A = \{-1, 1\}$ .** Neste caso  $A$  é uma reflexão ortogonal. Segundo hipótese existem vetores unitários tal que  $A\xi = \xi$  e  $A\eta = -\eta$  e  $\xi \perp \eta$

segundo Lema 12.2.4. Assim  $A$  é a reflexão ortogonal em torno da reta  $\langle \xi \rangle$ . A matriz do operador  $A$  em respeito à base ON  $\mathcal{B} = \{\xi, \eta\}$  é  $[A]_{\mathcal{B}} = \text{diag}[1, -1]$ .

**d) Caso  $\text{spec } A = \emptyset$ .** Neste caso  $A$  é uma rotação.

Escolha uma base ON  $\mathcal{X}$  de  $E$ . Então  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X}}$  é uma matriz ortogonal. Das duas opções  $\mathbf{r}_{\theta}$  e  $\mathbf{s}_{\theta}$  na Figura 12.2 só a matriz da rotação com  $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$  é possível porque as outras matrizes são simétricas e por isso possuem autovalores.

### Forma normal para operadores ortogonais

**Teorema 12.2.8** (Forma normal de operadores ortogonais). *Para  $A \in \mathcal{L}(E)$  ortogonal existe uma base ON  $\mathcal{X}$  de  $E$  tal que a matriz de  $A$  é da forma bloco*

$$[A]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & & & & & \\ & -\mathbb{1}_{\ell} & & & & \\ & & \mathbf{r}_{\theta_1} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \mathbf{r}_{\theta_r} & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{\theta_j} = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix} \quad (12.2.1)$$

onde todas outras entradas são 0 e  $k, \ell, r \geq 0$  satisfazem  $k + \ell + 2r = n = \dim E$ .

*Demonstração.* O subespaço  $F := E_1 \oplus E_{-1}$  é invariante por  $A$ . (Permitimos excepcionalmente  $E_1 = \{\mathcal{O}\}$  e  $E_{-1} = \{\mathcal{O}\}$ .) Por isso  $F^{\perp}$  também é invariante por  $A$  e a restrição  $A|_F: F \rightarrow F$  é ortogonal (Lema 12.2.5). Escolha bases ONs  $\mathcal{X}_1 = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$  de  $E_1$  e  $\mathcal{X}_{-1} = \{\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_{k+\ell}\}$  de  $E_{-1}$ .

Como  $F^{\perp}$  não contém um subespaço invariante por  $A$  da dimensão 1, ele deve conter um subespaço  $G$  invariante por  $A$  da dimensão 2 segundo Teorema C.5.1. Escolha uma base ON  $\mathcal{Z}_1 = \{\xi_1, \eta_1\}$  de  $G$ . Como  $A|_G \in \mathcal{L}(G)$  é ortogonal e  $\dim G = 2$  o Comentário 12.2.7 d) aplica e a matriz  $\mathbf{r}_{\theta_1} := [A]_{\mathcal{Z}_1}$  é uma rotação por um ângulo  $\theta_1 \notin \mathbb{Z}\pi$ .

Agora consideramos o complemento ortogonal  $G^{\perp}$  de  $G$  em  $F^{\perp}$  e repetimos o argumento obtendo  $\mathbf{r}_{\theta_2}$ . Como em cada uma iteração a dimensão diminui por 2 o processo vai terminar depois um número finito  $r \geq 0$  de iterações.

A base ON desejada é  $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_{-1} \cup \mathcal{Z}_1 \cup \dots \cup \mathcal{Z}_r$ .  $\square$

**Corolário 12.2.9.** *No caso de  $\dim E$  ímpar todo operador ortogonal  $A$  em  $E$  possui pelo menos um autovalor, em símbolos  $\emptyset \neq \text{spec } A \subset \{-1, +1\}$ .*

## 12.3 Decomposição polar

Vamos generalizar a representação polar de um número complexo não-nulo  $z = pe^{i\theta}$  como o produto da distância  $p > 0$  da origem e a rotação do eixo- $x$  pelo ângulo  $\theta$ , uma transformação linear ortogonal.

**Teorema 12.3.1** (Decomposição polar). *Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$ . Então existem um operador ortogonal  $U$  em  $E$  e únicos operadores  $P, \tilde{P} \geq 0$  em  $E$  tal que*

$$A = PU, \quad P := \sqrt{AA^*}, \quad A = U\tilde{P}, \quad \tilde{P} := \sqrt{A^*A}.$$

Se  $A$  é invertível, então  $P, \tilde{P} > 0$  ainda são positivos, assim invertíveis, e neste caso  $U = P^{-1}A = A\tilde{P}^{-1}$  é único também.

*Demonstração.* EXISTÊNCIA. Dado  $A \in \mathcal{L}(E)$ , segundo o Teorema 11.5.1 (dos valores singulares) existem duas bases ONs  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  e  $\mathcal{Y} = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$  de  $E$  e números  $\sigma_k \geq 0$  tal que  $A\xi_k = \sigma_k\eta_k$  para  $k = 1, \dots, n$ .<sup>4</sup> Definimos três transformações lineares  $P, U, \tilde{P}: E \rightarrow E$  através de seus valores numa base

$$P\eta_k := \sigma_k\eta_k, \quad U\xi_k := \eta_k, \quad \tilde{P}\xi_k := \sigma_k\xi_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Como as bases  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  são ONs os operadores  $P = P^*$  e  $\tilde{P} = (\tilde{P})^*$  são auto-adjuntos (Teorema 11.3.3). Como os seus autovalores  $\sigma_k$  são não-negativos obtemos que  $P \geq 0$  e  $\tilde{P} \geq 0$  são não-negativos (Teorema 11.4.3). Como  $U$  leva uma base ON num conjunto ON o operador  $U$  é ortogonal segundo Teorema 12.2.1 (v)<sub>1</sub>.

É suficiente checar as identidades  $A = PU$  e  $A = U\tilde{P}$  ao longo da base  $\mathcal{X}$ . Vale

$$\begin{aligned} PU\xi_k &= P\eta_k = \sigma_k\eta_k = A\xi_k, \\ U\tilde{P}\xi_k &= U(\sigma_k\xi_k) = \sigma_k\eta_k = A\xi_k. \end{aligned}$$

UNICIDADE DE  $P$  E DE  $\tilde{P}$ . Como  $A = PU$  obtemos  $A^* = U^*P^* = U^*P$ , e assim  $AA^* = PUU^*P = P^2$  porque  $U$  é ortogonal. Agora o requerimento de não negatividade faz  $P$  único (Teorema 11.4.6). Analogamente para  $\tilde{P}$ .

CASO  $A$  INVERTÍVEL. Neste caso  $P = AU^{-1}$  é invertível, assim  $P > 0$  segundo Corolário 11.4.5. Analogamente para  $\tilde{P}$ . Obtemos  $U = P^{-1}A = A(\tilde{P})^{-1}$ .  $\square$

**Exemplo 12.3.2** (Não-unicidade de  $U$ ). Para  $i = 0, 1, 2$  sejam  $\mathbf{r}_{\theta_i}$  matrizes  $2 \times 2$  de rotação (12.2.1). Definimos matrizes  $4 \times 4$  de blocos  $2 \times 2$  assim

$$\mathbf{a} := \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\theta_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 := \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\theta_0} & 0 \\ 0 & \mathbf{r}_{\theta_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 := \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\theta_0} & 0 \\ 0 & \mathbf{r}_{\theta_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} := \begin{bmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Essas matrizes satisfazem

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}\mathbf{u}_1 = \mathbf{p}\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{a} = \mathbf{u}_1\mathbf{p} = \mathbf{u}_2\mathbf{p}.$$

**Exercício 12.3.3.** Ache a decomposição polar  $\mathbf{a} = \mathbf{p}\mathbf{u}$  da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Uma solução.** O primeiro passo sempre é checar se a matriz é invertível porque neste caso temos unicidade da decomposição polar e fórmulas para a solução, a

<sup>4</sup> De fato  $A^*A \geq 0$  possui, segundo o Teorema Espectral, uma base ON  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  composto de autovetores de  $A^*A$  com autovalores  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_r$  e  $\lambda_j = 0$  para  $j = r + 1, \dots, n$  onde  $r = \text{posto}(A^*A) = \text{posto}(A)$ . Define-se  $\sigma_k := \sqrt{\lambda_k}$  para  $k = 1, \dots, n$  e  $\eta_i := \sigma_i^{-1}A\xi_i$  para  $i = 1, \dots, r$ . Escolhendo uma base ON  $\{\eta_{r+1}, \dots, \eta_n\}$  de  $N(A^*)$  obtemos uma base ON  $\mathcal{Y} = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$  de  $E$ .

saber  $\mathbf{p} := \sqrt{\mathbf{a}\mathbf{a}^t} > 0$  e  $\mathbf{u} := \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}$ . Com efeito, como  $\det \mathbf{a} = -2 - 4 = -6 \neq 0$  a inversa  $\mathbf{a}^{-1}$  existe. A matriz simétrica

$$\mathbf{b} := \mathbf{a}\mathbf{a}^t = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

tem polinômio característico  $p_{\mathbf{b}}(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 36$  e assim  $\text{spec } \mathbf{b} = \{4, 9\}$ . Resolvendo os sistemas lineares  $\mathbf{b}\xi = 4\xi$  e  $\mathbf{b}\xi = 9\xi$  obtemos autovetores

$$\xi_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \xi_9 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A raiz quadrada não-negativa  $\mathbf{p}$  de  $\mathbf{b}$  é **pela definição**

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{p}e_1 - 2\mathbf{p}e_2) &= \mathbf{p}\xi_4 := \sqrt{4}\xi_4 = \frac{2}{\sqrt{5}}(e_1 - 2e_2), \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{p}e_1 + \mathbf{p}e_2) &= \mathbf{p}\xi_9 := \sqrt{9}\xi_9 = \frac{3}{\sqrt{5}}(2e_1 + e_2). \end{aligned}$$

Resolvendo as duas equações para  $\mathbf{p}e_1$  e para  $\mathbf{p}e_2$  obtemos

$$\mathbf{p}e_1 = \frac{14}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2, \quad \mathbf{p}e_2 = \frac{2}{5}e_1 + \frac{11}{5}e_2.$$

Os coeficientes nestas duas equações disponibilizam as duas colunas da matriz

$$\mathbf{p} = [\mathbf{p}]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} > 0 \text{ como } \mathbf{p} = \mathbf{p}^t \text{ e } \text{spec } \mathbf{p} = \{2, 3\} \subset (0, \infty)$$

onde  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Calculamos a inversa, por exemplo usando a fórmula (A.4.1) ou o método de Gauss-Jordan, e obtemos

$$\mathbf{p}^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} := \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a} = \dots = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \in O(2).$$

**Outra solução.** Como na primeira solução definimos  $\mathbf{b} := \mathbf{a}\mathbf{a}^t$  e calculamos os autovalores  $\text{spec } (\mathbf{b}) = \{4, 9\}$  e autovetores  $\xi_4$  e  $\xi_9$  de norma 1 as quais formam uma base ordenada ortonormal  $\mathcal{X}$  de  $\mathbb{R}^2$ . Assim a matriz  $\mathbf{q} := [I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{X}, \mathcal{E}}$  (cujas colunas são  $\xi_4$  e  $\xi_9$ ) é ortogonal, ou seja  $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^t$ . Motivado pela identidade

$$\mathbf{b} = [\mathbf{b}]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}} = [I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{X}, \mathcal{E}} [\mathbf{b}]_{\mathcal{X}, \mathcal{X}} [I_{\mathbb{R}^2}]_{\mathcal{E}, \mathcal{X}} = \mathbf{q} \text{diag}[4, 9] \mathbf{q}^{-1},$$

e usando  $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^t$ , definimos a raiz quadrada positiva da matriz  $\mathbf{b}$  assim

$$\sqrt{\mathbf{b}} := \mathbf{q} \text{diag}[\sqrt{4}, \sqrt{9}] \mathbf{q}^t = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Observe que  $\sqrt{\mathbf{b}}$  é simétrico e positivo e que seu quadrado é  $\mathbf{b}$ .<sup>5</sup> Invertamos  $\mathbf{p} := \sqrt{\mathbf{b}}$  com a fórmula (A.4.1), então obtemos  $\mathbf{u}$  como produto matriz

$$\mathbf{u} := \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \in O(2).$$

<sup>5</sup>  $\sqrt{\mathbf{b}}\sqrt{\mathbf{b}} = \mathbf{q} \text{diag}[\sqrt{4}, \sqrt{9}] \mathbf{q}^{-1} \mathbf{q} \text{diag}[\sqrt{4}, \sqrt{9}] \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q} \text{diag}[\sqrt{4}, \sqrt{9}] \text{diag}[\sqrt{4}, \sqrt{9}] \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{b}$ .

## 12.4 Exercícios

1. Dê os seguintes exemplos:
  - (a) Uma matriz invertível cujas linhas são duas a duas ortogonais mas as colunas não são.
  - (b) Uma matriz (não-quadrada) cujas linhas são ortogonais e têm a mesma norma, mas as colunas não são ortogonais.
  - (c) Uma matriz cujas linhas (e colunas) são duas a duas ortogonais mas as normas das linhas são diferentes.
2. Para quaisquer bases ortonormais  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  e  $\mathcal{Y} = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$  de  $E$ , prove que existe um operador *ortogonal*  $A \in \mathcal{L}(E)$  tal que

$$A\xi_1 = \eta_1, \quad \dots, \quad A\xi_n = \eta_n.$$

No caso  $E = \mathbb{R}^3$  e se as bases dadas são formadas pelos vetores

$$\xi_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2), \quad \xi_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2), \quad \xi_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1),$$

$$\eta_1 = \frac{1}{7}(2, 3, 6), \quad \eta_2 = \frac{1}{7}(6, 2, -3), \quad \eta_3 = \frac{1}{7}(3, -6, 2),$$

determine a matriz de  $A$  na base canônica  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

3. Se uma matriz triangular é ortogonal, prove que ela é diagonal e seu quadrado é igual à matriz identidade.
4. Seja  $\mathbf{a} = [a_1 \ \dots \ a_n] \in M(1 \times n)$  tal que  $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1$ . Prove que  $\mathbf{a}^t \mathbf{a} \in M(n \times n)$  é uma matriz de uma projeção ortogonal. Determine a imagem e o núcleo dessa projeção.
5. Ache uma matriz ortogonal  $4 \times 4$  cujos elementos são todos da forma  $\pm \frac{1}{2}$ .
6. Obtenha a *decomposição polar*<sup>6</sup> da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

---

<sup>6</sup>  $\mathbf{a} = \mathbf{p}\mathbf{u}$  onde  $\mathbf{u}$  é ortogonal e  $\mathbf{p}$  satisfaz  $\mathbf{p}^t = \mathbf{p}$  e  $\langle \mathbf{p}v, v \rangle \geq 0$  para todo vetor  $v$ .

# Capítulo 13

## Produto hermitiano

Neste<sup>1</sup> Capítulo 13 consideramos exclusivamente espaços vetoriais **complexos**

$$Z = (Z, +, \cdot, \mathbb{C}), \quad W = (W, +, \cdot, \mathbb{C}),$$

então o corpo são os números complexos. Suponhamos que as dimensões

$$n = \dim Z < \infty, \quad m = \dim W < \infty,$$

são finitas (exceto quando especificado diferente). Como na dimensão finita produtos hermitianos existem, podemos supor que  $Z = (Z, (\cdot, \cdot))$ , também  $W = (W, (\cdot, \cdot))$ , é munido de um produto hermitiano, notação  $(\cdot, \cdot)$ .

### 13.1 Definições

#### Números complexos

Um **número complexo** é uma expressão da forma  $c = \alpha + i\beta$  onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  são números reais e  $i$  é um símbolo. Os números reais definidos assim

$$\operatorname{Re}(\alpha + i\beta) := \alpha, \quad \operatorname{Im}(\alpha + i\beta) := \beta,$$

chama-se de **parte real** e **parte imaginário** do número complexo. O número

$$\overline{\alpha + i\beta} := \alpha - i\beta$$

é chamado de **complexo conjugado** de um número complexo. Observe que um número complexo igualando seu próprio conjugado é um número real  $c = \bar{c} \in \mathbb{R}$ .

Seja  $\mathbb{C}$  o conjunto de todos os números complexos. Adição e multiplicação de números complexos são definidas assim

$$\begin{aligned}(\alpha + i\beta) + (\gamma + i\delta) &:= (\alpha + \gamma) + i(\beta + \delta), \\(\alpha + i\beta) \cdot (\gamma + i\delta) &:= (\alpha\gamma - \beta\delta) + i(\alpha\delta + \beta\gamma).\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Cap. 13 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

É útil abreviar uns tipos especiais de números complexos como

$$0 + i\beta =: i\beta, \quad \alpha + i0 =: \alpha, \quad \alpha + i1 =: \alpha + i.$$

Assim  $i$  abrevia o número complexo  $0 + i1$ . E conseqüentemente

$$i^2 \text{ abrevia } (0 + i1)^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0^2 - 1^2) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1.$$

### Matrizes complexas

A **complexa conjugada** de uma matriz  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{C})$  é a matriz  $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_{ij})$  cujas entradas são os complexos conjugados das entradas de  $\mathbf{a}$ .

Uma **matriz hermitiana** é uma matriz quadrada  $\mathbf{a} \in M(n \times n; \mathbb{C})$  tal que  $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}^t$ . A diagonal de uma matriz hermitiana tem entradas reais  $a_{ii} = \bar{a}_{ii}$ .

### Produto hermitiano

**Definição 13.1.1** (Produto hermitiano). Um **produto hermitiano**, ou **produto  $\mathbb{C}$ -interno**, num espaço vetorial complexo  $Z$  (a dimensão pode ser infinita) é uma função de duas variáveis vetoriais

$$(\cdot, \cdot): Z \times Z \rightarrow \mathbb{C}$$

a qual satisfaz três axiomas para todos os  $z, w, \tilde{z}, \tilde{w} \in Z$  e  $c \in \mathbb{C}$ , isto é

$$\overline{(\text{SIM})} \quad (z, w) = \overline{(w, z)} \quad (\text{simetria-cc})$$

$$\begin{aligned} \text{(SL)} \quad (z + \tilde{z}, w) &= (z, w) + (\tilde{z}, w) && (\text{sesquilinearidade}) \\ (z, w + \tilde{w}) &= (z, w) + (z, \tilde{w}) \\ (cz, w) &= c(z, w) \\ (z, cw) &= \bar{c}(z, w) \end{aligned}$$

$$\text{(POS)} \quad z \neq \mathcal{O} \Rightarrow (z, z) > 0. \quad (\text{positividade})$$

As duas identidades em cinza seguem da identidade anterior junto com  $\overline{(\text{SIM})}$ . Neste caso  $Z$  é chamado de **espaço vetorial com produto hermitiano**.

Do axioma  $\overline{(\text{SIM})}$  obtemos  $(z, z) = \overline{(z, z)}$ , daí  $(z, z) \in \mathbb{R}$  deve ser real. Sesquilinearidade é necessário para obter positividade, a saber com linearidade íamos obter a contradição  $0 < (iz, iz) = i^2(z, z) = -(z, z) < 0$ .

**Exemplo 13.1.2** (Produtos hermitianos).

$$(a) \quad \mathbb{C}^n \quad \text{munido de } (z, w) := z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n.$$

$$(b) \quad C^0([a, b], \mathbb{C}) \quad \text{munido de } (f, g) := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

**Exercício 13.1.3.** Todo espaço vetorial complexo de dimensão finita possui um produto hermitiano.

[Dica: Pegue uma base ordenada  $\mathcal{B}$  de  $E$ , exprime  $z \in Z$  nesta base, Exemplo 13.1.2 (a).]

## 13.2 Adjunta complexa $A^\dagger$

**Definição 13.2.1.** A adjunta complexa de um operador linear  $A: Z \rightarrow W$  entre espaços vetoriais complexos é o único operador linear  $A^\dagger: W \rightarrow Z$  tal que

$$(Az, w) = (z, A^\dagger w)$$

para todos os  $z \in Z$  e  $w \in W$ .

**Teorema 13.2.2** (Regras básicas para a adjunta complexa).

- (i)  $I = I^\dagger$
- (ii)  $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$
- (iii)  $(cA)^\dagger = \bar{c}A^\dagger$
- (iv)  $(BA)^\dagger = A^\dagger B^\dagger$
- (v)  $(A^\dagger)^\dagger = A$

*Demonstração.* Analogamente como Teorema 10.1.5. □

**Exercício 13.2.3** (A matriz da adjunta complexa  $A^\dagger$ ). Dado  $A \in \mathcal{L}(Z, W)$  e bases ONs  $\mathcal{X}$  de  $Z$  e  $\mathcal{Y}$  de  $W$ , mostre que  $\mathbf{a}$  é a matriz de  $A$  se, e somente se a matriz da adjunta complexa é a matriz transposta complexo conjugada, em símbolos

$$\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}} \Leftrightarrow \bar{\mathbf{a}}^t = [A^\dagger]_{\mathcal{Y}, \mathcal{X}}.$$

**Exercício 13.2.4** (A adjunta complexa  $\mathbf{a}^\dagger$  de uma matriz). Considere uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{C})$  como transformação linear  $\mathbf{a}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ . Mostre que a adjunta complexa é a matriz transposta complexo conjugada, em símbolos

$$\mathbf{a}^\dagger = \bar{\mathbf{a}}^t.$$

### 13.2.1 Operadores complexos são triangularizáveis

O seguinte teorema é o fundamento para o teorema espectral complexo, o Teorema 13.2.9 embaixo.

**Teorema 13.2.5** (Operadores complexos são triangularizáveis). *Todo operador linear num espaço vetorial complexo  $Z$  de dimensão finita é triangularizável, ou seja, existe uma base na qual a matriz do operador é triangular. A base pode ser obtida ON se  $Z$  é munido de um produto hermitiano.*

*Demonstração.* Compare Teorema 8.2.9. □

**Exercício 13.2.6.** Dado  $A \in \mathcal{L}(Z)$ , mostre que se  $A^k = \mathcal{O}$  para algum  $k > n = \dim Z$ , então  $A^n = \mathcal{O}$ . [Dica: Teorema 13.2.5.]

**Exercício 13.2.7.** Mostre que um operador  $A \in \mathcal{L}(Z)$  é **nilpotente** (a saber  $A^k = \mathcal{O}$  para algum  $k \in \mathbb{N}$ ) se, e somente se, todos os autovalores são nulos.

### 13.2.2 Operadores normais

**Definição 13.2.8.** Um operador  $A \in \mathcal{L}(Z)$  que comuta  $A^\dagger A = AA^\dagger$  com sua adjunta complexa é chamado de **operador normal**.

**Teorema 13.2.9** (Teorema espectral complexo). *Um operador  $A \in \mathcal{L}(Z)$  é normal  $A^\dagger A = AA^\dagger$  se e somente se existe uma base ON  $\mathcal{X} = (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n)$  de  $E$  composto de autovetores  $\xi_j$  de  $A$ .*

Então operadores normais são diagonalizáveis. No seguinte estudamos duas classes de operadores, hermitianos (generalizando auto-adjunto) e unitários (generalizando ortogonal), ambos as quais são normais e assim herdaram o teorema espectral complexo, então diagonalizabilidade.

### 13.2.3 Operadores hermitianos (complexo auto-adjuntos)

**Definição 13.2.10.** Um operador  $A \in \mathcal{L}(Z)$  que iguale  $A = A^\dagger$  a sua adjunta complexa é chamado de **operador hermitiano** ou **complexo auto-adjunto**.

Como hermitiano implica normal  $AA^\dagger = AA = A^\dagger A$  o teorema espectral complexo vale.

**Corolário 13.2.11.** *Para operadores hermitianos vale o teorema espectral complexo, Teorema 13.2.9, e assim eles são diagonalizáveis.*

**Exercício 13.2.12.** Mostre que operadores hermitianos tem autovalores reais.

**Teorema 13.2.13.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(Z)$ , então*

$$A^\dagger = A \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X}} = \bar{\mathbf{a}}^t \text{ para todas bases ONs } \mathcal{X} \text{ de } Z.$$

### 13.2.4 Operadores unitários (complexo ortogonais)

**Definição 13.2.14.** Um operador  $U \in \mathcal{L}(Z)$  tal que  $U^\dagger = U^{-1}$  é chamado de **operador unitário** ou **complexo ortogonal**. Como caso especial, uma **matriz unitária** é uma matriz quadrada complexa tal que  $\mathbf{u}^{-1} = \bar{\mathbf{u}}^t$ .

Como unitário implica normal  $UU^\dagger = UU^{-1} = I = U^{-1}U = U^\dagger U$  o teorema espectral complexo vale.

**Corolário 13.2.15.** *Para operadores unitários vale o teorema espectral complexo, Teorema 13.2.9, e assim eles são diagonalizáveis.*

**Exercício 13.2.16.** Seja  $U \in \mathcal{L}(Z)$ . Mostre que são equivalente:

- (i)  $U^\dagger = U^{-1}$
- (ii)  $(Uz, U\tilde{z}) = (z, \tilde{z}) \forall z, \tilde{z} \in Z$
- (iii)  $|Uz| = |z|$

[Dica: (iii) $\Rightarrow$ (i) Verifique e depois use a **fórmula de polarização complexa**

$$(z, w) = \frac{1}{4} \left( |z+w|^2 - |z-w|^2 + i|z+iw|^2 - i|z-iw|^2 \right).$$

## Parte IV

# Teoria das transformações lineares 2



# Capítulo 14

## Formas quadráticas

Nas<sup>1</sup> Seções 14.1 e 14.2 denotamos de  $E$  e  $F$  espaços vetoriais

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \quad \dim E = n, \quad F = (F, +, \cdot, \mathbb{K}), \quad \dim F = m,$$

de dimensão finita e sobre o mesmo corpo infinito  $\mathbb{K}$ . Na Seção 14.2 supomos que o corpo infinito não tem característica 2 e pode-se dividir por 2 em  $\mathbb{K}$ .

Na Seção 14.3 consideramos o caso de um espaço vetorial real  $E = (E, +, \cdot, \mathbb{R})$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

### 14.1 Formas bilineares $\mathfrak{b}: E \times F \rightarrow \mathbb{K}$

**Definição 14.1.1** (Forma bilinear e matriz dela). Chama-se uma aplicação

$$\mathfrak{b}: E \times F \rightarrow \mathbb{K}, \quad (u, v) \mapsto \mathfrak{b}(u, v)$$

de **forma bilinear em  $E \times F$**  se é linear (4.1.1) em cada uma das duas variáveis  $u$  e  $v$ . O conjunto de todas as formas bilineares em  $E \times F$ , notação

$$\mathfrak{B}(E \times F, \mathbb{K}) = (\mathfrak{B}(E \times F, \mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$$

é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  sob adição de funções e multiplicação com escalares.

**Definição 14.1.2** (Matriz de uma forma bilinear). Dado bases  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$  e  $\mathcal{V} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$  de  $F$  a matriz  $m \times n$  denotado por

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} = [\mathfrak{b}]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \quad \text{e cujas entradas são } b_{ij} := \mathfrak{b}(\xi_i, \eta_j) \in \mathbb{K}$$

é chamada de **a matriz da forma bilinear** em respeito às bases  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ . No caso  $E = F$  e  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$  escrevemos simplesmente  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\mathcal{U}} = [\mathfrak{b}]_{\mathcal{U}}$ .

---

<sup>1</sup>Cap. 14 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

**Teorema 14.1.3.** *Levar uma forma bilinear para a matriz dela*

$$\begin{aligned}\Phi = \Phi_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}: \mathfrak{B}(E \times F, \mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K}) \\ \mathfrak{b} &\mapsto [\mathfrak{b}]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}\end{aligned}$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Daí  $\dim \mathfrak{B}(E \times F, \mathbb{K}) = \dim E \cdot \dim F$ .

*Demonstração.* Deixamos linearidade e injetividade de  $\Phi$  como exercício. Sobrejetividade: Dado uma matriz  $\mathfrak{b} = (b_{ij}) \in \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K})$  e vetores  $u \in E$  e  $v \in F$ , escrevemos  $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$  e  $v = \sum_{j=1}^m \beta_j \eta_j$ . Defina  $\mathfrak{b}(u, v) := \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j b_{ij}$ .  $\square$

**Teorema 14.1.4** (Mudança da base). *Seja  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(E \times F, \mathbb{K})$ . Seja  $\mathfrak{p} = [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$  a matriz de passagem entre bases de  $E$  e  $\mathfrak{q} = [I_F]_{\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}}$  entre bases de  $F$ . Então*

$$\tilde{\mathfrak{b}} = \mathfrak{p}^t \mathfrak{b} \mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{b} \mathfrak{q} \text{ caso } \mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}} \text{ são bases ONs} \quad (14.1.1)$$

onde  $\tilde{\mathfrak{b}} = [\mathfrak{b}]_{\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{V}}}$  e  $\mathfrak{b} = [\mathfrak{b}]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$ .

*Demonstração.* Teorema C.8.1.  $\square$

Lembre-se do espaço dual  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

**Exemplo 14.1.5** (Produto tensorial). Dado funcionais lineares  $\varphi \in E^*, \psi \in F^*$

$$\varphi \otimes \psi: E \times F \rightarrow \mathbb{K}, \quad (u, v) \mapsto \varphi(u)\psi(v)$$

é uma forma bilinear em  $E \times F$ , chamado de **produto tensorial** de  $\varphi$  e  $\psi$ .

## 14.2 Formas quadráticas $\mathfrak{q}: E \rightarrow \mathbb{K}$

Nesta Seção 14.2 suponhamos que

- o corpo  $\mathbb{K}$  é infinito;
- o corpo  $\mathbb{K}$  não tem característica 2;
- para cada um elemento  $\alpha \in \mathbb{K}$  existe um único elemento  $\beta \in \mathbb{K}$  tal que  $\beta + \beta = \alpha$ , notação  $\frac{1}{2}\alpha := \beta$ .

### Formas bilineares em $E$

Agora consideramos formas bilineares  $\mathfrak{b}: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  em  $E$  só. Dado duas bases  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  e  $\tilde{\mathcal{U}}$  de  $E$  mudança da base (14.1.1) toma a forma

$$\tilde{\mathfrak{b}} = \mathfrak{p}^t \mathfrak{b} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{-1} \mathfrak{b} \mathfrak{p} \text{ caso } \mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}} \text{ são bases ONs} \quad (14.2.1)$$

onde  $\tilde{\mathfrak{b}} = [\mathfrak{b}]_{\tilde{\mathcal{U}}}$  e  $\mathfrak{b} = [\mathfrak{b}]_{\mathcal{U}}$ . A matriz de passagem é  $\mathfrak{p} = [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$ . Dado  $u, v \in E$ ,

$$\mathfrak{b}(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j b_{ij}, \quad b_{ij} := \mathfrak{b}(\xi_i, \xi_j),$$

onde  $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$  e  $v = \sum_{j=1}^n \beta_j \xi_j$ .

**Definição 14.2.1** (Autovalores e autovetores). Os **autovalores** de uma forma bilinear  $\mathfrak{b}: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  são os autovalores de (qualquer) matriz dela, a saber

$$\text{spec } \mathfrak{b} := \text{spec } \mathbf{b} = \text{spec } \tilde{\mathfrak{b}} \quad (14.2.2)$$

onde  $\mathbf{b} = [\mathfrak{b}]_{\mathcal{U}}$  e  $\tilde{\mathfrak{b}} = [\mathfrak{b}]_{\tilde{\mathcal{U}}}$ . Mas para  $\lambda \in \text{spec } \mathfrak{b}$  só vale  $E_{\lambda}(\mathbf{b}) = \mathbf{p}E_{\lambda}(\tilde{\mathfrak{b}})$ .

**Definição 14.2.2** (Anti/simetria). Uma forma bilinear  $\mathfrak{b}: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  tal que

$$\mathfrak{b}(u, v) = \pm \mathfrak{b}(v, u) \quad \forall u, v \in E$$

chama-se de **simétrica** '+' , respectivamente, **anti-simétrica** '-'. Chama-se

$$\mathfrak{b}^{\text{sim}}(u, v) := \frac{1}{2} (\mathfrak{b}(u, v) + \mathfrak{b}(v, u)), \quad \mathfrak{b}^{\text{asim}}(u, v) := \frac{1}{2} (\mathfrak{b}(u, v) - \mathfrak{b}(v, u)),$$

a **parte simétrica**, respectivamente, **anti-simétrica**. Denota-se de

$$\mathfrak{B}^{\text{sim}}(E \times E; \mathbb{K}), \quad \mathfrak{B}^{\text{asim}}(E \times E; \mathbb{K}),$$

os espaços vetoriais das formas bilineares simétricas/anti-simétricas em  $E$ .

**Comentário 14.2.3.** Note os seguintes:

1. anti/simetria de uma forma bilinear é equivalente a anti/simetria da sua matriz em respeito a qualquer base;  $b_{ij} := \mathfrak{b}(\xi_i, \xi_j)$
2. para toda forma bilinear vale  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{\text{sim}} + \mathfrak{b}^{\text{asim}}$ ;
3. como a característica do corpo  $\mathbb{K}$  **não é 2**, uma forma bilinear simétrica e anti-simétrica é nula e por isso a soma seguinte é direta

$$\mathfrak{B}(E \times E; \mathbb{K}) = \mathfrak{B}^{\text{sim}}(E \times E; \mathbb{K}) \oplus \mathfrak{B}^{\text{asim}}(E \times E; \mathbb{K}).$$

**Exemplo 14.2.4** (Produto tensorial anti/simétrico). Dado  $\varphi \in E^*, \psi \in E^*$

$$\varphi \bullet \psi: E \times E \rightarrow \mathbb{K}, \quad (u, v) \mapsto \varphi(u)\psi(v) + \varphi(v)\psi(u)$$

é uma forma bilinear simétrica, o **produto tensorial simétrico** de  $\varphi$  e  $\psi$ , e

$$\varphi \wedge \psi: E \times E \rightarrow \mathbb{K}, \quad (u, v) \mapsto \varphi(u)\psi(v) - \varphi(v)\psi(u)$$

é anti-simétrico, o **produto tensorial anti-simétrico** de  $\varphi$  e  $\psi$ .

**Definição 14.2.5** (Forma quadrática). Uma função  $\mathfrak{q}: E \rightarrow \mathbb{K}$  da forma

$$\mathfrak{q}(v) = \mathfrak{b}(v, v), \quad \text{notação } \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{b}},$$

onde  $\mathfrak{b}$  é uma forma bilinear chama-se **forma quadrática** em  $E$ .

Observe que  $\mathfrak{q}(v) = \mathfrak{b}(v, v) = \mathfrak{b}^{\text{sim}}(v, v), \forall v \in E$ .

### Formas bilineares simétricas

No seguinte  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{\text{sim}}$  denota uma forma bilinear *simétrica* em  $E$ . Simetria de  $\mathfrak{b}$  tem a vantagem que é equivalente à validade da **fórmula de polarização**

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(u, v) &= \frac{1}{2} (\mathfrak{b}(u+v, u+v) - \mathfrak{b}(u, u) - \mathfrak{b}(v, v)) \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2} (\mathfrak{q}_{\mathfrak{b}}(u+v) - \mathfrak{q}_{\mathfrak{b}}(u) - \mathfrak{q}_{\mathfrak{b}}(v)). \end{aligned} \quad (14.2.3)$$

Assim pode-se recuperar todos os valores de  $\mathfrak{b}(u, v)$  a partir dos valores  $\mathfrak{b}(v, v) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{b}}(v)$  da forma quadrática.

**Definição 14.2.6.** A **matriz** de uma forma quadrática  $\mathfrak{q}_{\mathfrak{b}}$  em respeito a uma base  $\mathcal{U}$  de  $E$  é a matriz  $\mathbf{b} := [\mathfrak{b}]_{\mathcal{U}} = (b_{ij})$  da forma bilinear (simétrica)  $\mathfrak{b}$ .

Os **autovalores**, assim o **spectro**, de uma forma quadrática  $\mathfrak{q}_{\mathfrak{b}}$  são os autovalores da sua forma bilinear (simétrica)  $\mathfrak{b}$ , daí conforme (14.2.2) os autovalores de qualquer matriz de  $\mathbf{b}$ . O **posto** de uma forma quadrática é o posto da matriz em respeito a uma base.<sup>2</sup>

Dado uma base  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$ , obtemos a fórmula

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{b}}(v) = \mathfrak{b}(v, v) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j b_{ij}$$

onde  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$  e  $b_{ij} := \mathfrak{b}(\xi_i, \xi_j)$ .

**Lema 14.2.7.** *Seja  $\mathfrak{q}$  uma forma quadrática. Se existe uma base  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$  e escalares não-nulos  $\lambda_i \neq 0$  tal que vale a fórmula simples*

$$\mathfrak{q}(v) = \alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_r^2 \lambda_r$$

para todos os vetores  $v = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$  de  $E$ , então  $r = \text{posto}(\mathfrak{q})$ .

*Demonstração.* A matriz  $[\mathfrak{q}]_{\mathcal{U}} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0]$  tem posto  $r$ .  $\square$

## 14.3 Produto interno

Nesta Seção 14.3 consideramos o caso de um espaço vetorial real  $E$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Teorema 14.3.1.** *É um isomorfismo a aplicação seguinte*

$$\mathfrak{B}(E \times E, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(E), \quad \mathfrak{b} \mapsto B_{\mathfrak{b}}$$

onde o operador  $B = B_{\mathfrak{b}}$  é unicamente determinado pela identidade

$$\mathfrak{b}(v, w) = \langle v, Bw \rangle \quad \forall v, w \in E. \quad (14.3.1)$$

Além disso  $\mathfrak{b}$  é anti/simétrico se e somente se  $B^* = \mp B$ .

<sup>2</sup> outra base:  $\text{posto}(\tilde{\mathbf{b}}) \stackrel{(14.2.1)}{=} \text{posto}(\mathbf{p}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{p}) = \text{posto}(\mathbf{b})$ , isomorfismo  $\mathbf{p}$  preserva dimensão

*Demonstração.* Seja  $D: E \rightarrow E^*$  o isomorfismo dualidade (10.1.1). Num ponto  $w \in E$  definimos  $\varphi_w := \mathfrak{b}(\cdot, w) \in E^*$  e  $Bw := D^{-1} \circ \varphi_w \in E$ . Como composição de operadores lineares o  $B$  é linear e  $\langle \cdot, Bw \rangle = \langle Bw, \cdot \rangle = DBw = \varphi_w = \mathfrak{b}(\cdot, w)$ .

Injetivo: Suponha que  $B_{\mathfrak{b}} = \mathcal{O}$ . Assim a aplicação  $\mathfrak{b}(v, w) = \langle v, \mathcal{O}w \rangle = \langle v, \mathcal{O} \rangle = 0$  anula-se para todos os vetores  $v, w \in E$ . Daí  $\mathfrak{b}$  é a forma nula. Sobrejetivo: Como domínio contra-domínio são da mesma dimensão  $(\dim E)^2$  (Teor. 14.1.3 e Cor. 4.1.15) injetivo é equivalente a sobrejetivo (Cor. 6.5.2).  $\square$

**Corolário 14.3.2.** *Seja  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  uma base ON de  $E$ . Então a matriz  $\mathfrak{b}$  da forma  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}(E \times E; \mathbb{R})$  coincide com a matriz  $\mathfrak{b}'$  do operador  $B_{\mathfrak{b}} \in \mathcal{L}(E)$ .*

*Demonstração.*  $b_{ij} := \mathfrak{b}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \stackrel{(14.3.1)}{=} \langle \varepsilon_i, B_{\mathfrak{b}}\varepsilon_j \rangle \stackrel{\text{def. } \mathfrak{b}'}{=} \langle \varepsilon_i, \sum_k \varepsilon_k b'_{kj} \rangle \stackrel{\mathcal{Z} \text{ ON}}{=} b'_{ij}$ .  $\square$

## Formas bilineares simétricas

No seguinte  $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{\text{sim}}$  denota uma forma bilinear *simétrica* em  $E$ .

**Teorema 14.3.3** (Teorema Espectral para formas bilineares simétricas). *Dado  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}^{\text{sim}}(E \times E; \mathbb{R})$ , seja  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  uma base ON de  $E$  composto de autovetores do operador auto-adjunto  $B_{\mathfrak{b}}$  (Teor. Esp. 11.3.3). Então vale que*

$$[\mathfrak{b}]_{\mathcal{Z}} = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = [B_{\mathfrak{b}}]_{\mathcal{Z}}$$

onde os reais  $\lambda_i$  são os autovalores do operador  $B_{\mathfrak{b}}$ .

*Demonstração.*  $\mathfrak{b}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \langle \varepsilon_i, B_{\mathfrak{b}}\varepsilon_j \rangle = \langle \varepsilon_i, \lambda_j \varepsilon_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij}$ .  $\square$

**Comentário 14.3.4** (Sumário). Dado  $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}^{\text{sim}}(E \times E; \mathbb{R})$  e uma base ON  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  de  $E$  composto de autovetores de  $B_{\mathfrak{b}}$ . Sejam enumerados subindo

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$$

os autovalores. Escrevendo  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i$  e  $w = \sum_{j=1}^n \beta_j \varepsilon_j$  valem as formulas

$$\mathfrak{b}(v, w) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \lambda_i, \quad \mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{b}}(v) = \alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n. \quad (14.3.2)$$

**Definição 14.3.5.** Uma forma quadrática  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{b}}$  chama-se de

**não-negativa / positiva / não-positiva / negativa**

se para todo vetor não-nulo  $v$  vale

$$\mathfrak{q}(v) \geq 0 / > 0 / \leq 0 / < 0 \quad (14.3.3)$$

notação  $\mathfrak{q}|_F \geq 0 / > 0 / \leq 0 / < 0$

o que é equivalente a

todos os autovalores de  $B_{\mathfrak{b}}$  são  $\geq 0 / > 0 / \leq 0 / < 0$ .

Chama-se  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_{\mathfrak{b}}$  de **indefinida** se existem vetores  $u, v$  tal que  $\mathfrak{q}(u) < 0 < \mathfrak{q}(v)$ . Isso é equivalente a  $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$ .

**Lema 14.3.6.** *Sejam  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  os autovalores, contados com multiplicidade, da forma quadrática  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_b$ . Então vale  $\lambda_1 \leq \mathfrak{q}(\hat{v}) \leq \lambda_n$  para todos os vetores unitários  $\hat{v} \in E$ . Ademais  $\lambda_1 = \mathfrak{q}(\varepsilon_1)$  e  $\lambda_n = \mathfrak{q}(\varepsilon_n)$  onde  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  é a base ON do Teorema Espectral 14.3.3.*

*Demonstração.* Escrevendo  $\hat{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i$ , vale  $1 = |\hat{v}|^2 = \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$  e

$$\lambda_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_1 \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i}_{(14.3.2) \mathfrak{q}(\hat{v})} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_n = \lambda_n.$$

Segue de (14.3.2) que  $\mathfrak{q}(\varepsilon_i) = \lambda_i$  para todos os  $i$ . □

**Definição 14.3.7** (Índice de uma forma quadrática). O **índice**  $\text{ind}(\mathfrak{q})$  de uma forma quadrática  $\mathfrak{q}$  é a maior dimensão de um subespaço de  $E$  no qual a forma é negativa ( $< 0$ ). No caso  $\mathfrak{q}(v) \geq 0 \forall v \in E$  definimos  $\text{ind}(\mathfrak{q}) := 0$ .

**Teorema 14.3.8** (Lei da inércia de Sylvester). *Seja  $\mathfrak{q}$  uma forma quadrática. Se existe uma base  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$  tal que vale a fórmula simples*

$$\mathfrak{q}(v) = -\alpha_1^2 - \dots - \alpha_i^2 + \alpha_{i+1}^2 + \dots + \alpha_r^2$$

para todos os vetores  $v = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$  de  $E$ , então

$$\text{ind}(\mathfrak{q}) = i, \quad \text{posto}(\mathfrak{q}) = r.$$

*Demonstração.* Lema 14.2.7 com  $\lambda_1 = \dots = \lambda_i = -1$  e  $\lambda_{i+1} = \dots = \lambda_r = 1$  diz que  $\text{posto}(\mathfrak{q}) = r$ .

Vamos mostrar que  $i = \text{ind}(\mathfrak{q}) := \max\{\dim F \mid F \text{ subespaço de } E \text{ e } \mathfrak{q}|_F < 0\}$ :

CASO  $i = 0$ . Então  $\mathfrak{q} \geq 0$  e  $\text{ind}(\mathfrak{q}) := 0 = i$ .

CASO  $i \geq 1$ . Suponha que  $F \subset E$  é um subespaço tal que  $\mathfrak{q}(v) < 0$ . Vamos mostrar que neste caso  $\dim F \leq i$ : Seja  $v \in F$  não-nulo, então concluímos de

$$\underbrace{-\alpha_1^2 - \dots - \alpha_i^2}_{< 0 \leftarrow} + \underbrace{\alpha_{i+1}^2 + \dots + \alpha_r^2}_{\geq 0} = \mathfrak{q}(v) < 0$$

que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_i) \neq \mathcal{O}$ . Consequentemente a transformação linear

$$A: F \rightarrow \mathbb{R}^i, \quad v \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_i)$$

é injetiva. Daí  $\dim F \leq i$ .

Neste momento já sabemos que  $\text{ind}(\mathfrak{q}) \leq i$ . Assim só precisamos um exemplo de um subespaço, dizemos  $G := \langle \xi_1, \dots, \xi_i \rangle$ , de dimensão  $i$  e tal que  $\mathfrak{q}|_G < 0$ . Mas isso vale, com efeito  $\mathfrak{q}|_G(v) = -\alpha_1^2 - \dots - \alpha_i^2 < 0$  para  $v \neq \mathcal{O}$ . □

Parte V

Apêndices



# Apêndice A

## Revisão de matrizes e sistemas lineares

Seja<sup>1</sup>  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais.

**Comentário A.0.9** (Corpos gerais  $\mathbb{K}$ ). As construções neste Apêndice A para matrizes e listas cujas entradas são números reais funcionam do mesmo jeito para entradas num corpo geral  $\mathbb{K}$ . Veja por exemplo [Lan93, Chap. VIII].

### A.1 Matrizes

Para alunos da matemática recomendo o tratamento excelente [Art91, Chapter 1], para os outros alunos recomendo [San12, Capítulos 1 e 2].

**Definição A.1.1** (Matrizes  $m \times n$ ). Uma **matriz**, mais detalhado uma **matriz**  $m \times n$ , é um quadro numérico de  $m$  linhas e  $n$  colunas

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde os  $a_{ij}$  são números reais chamado de **entradas da matriz**. Por definição a entrada  $a_{ij}$  está localizada na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna, para memorizar

$a_{\text{linha} \text{coluna}}$ .

Uma **matriz quadrada** é uma matriz do tipo  $n \times n$ . Denotamos de

$$M(m \times n) := \left\{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \right\}$$

---

<sup>1</sup>Ap. A de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

o conjunto de todas as matrizes reais  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  do tipo  $m \times n$ . Definimos a **adição** de duas matrizes entrada por entrada, ou seja

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}.$$

Definimos a **multiplicação escalar** de uma matriz por um número real  $\gamma$ , chamado de **escalar** por tradição, também entrada por entrada, ou seja

$$\gamma \mathbf{a} = \gamma (a_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := \gamma a_{ij}.$$

A matriz cujas entradas todas são o número nulo 0 é chamada de **matriz nula**, símbolo  $\mathbf{0}$ . Se na matriz nula  $n \times n$  colocamos o número 1 ao longo da diagonal obtemos a **matriz identidade**  $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n$ . Denotamos de  $-\mathbf{a} := (-1)\mathbf{a}$  a matriz cujas entradas são os negativos  $-a_{ij}$  das entradas  $a_{ij}$  da matriz  $\mathbf{a}$ . Como  $-\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$  dizemos que  $-\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}$  são **inversos aditivos** um do outro.

**Definição A.1.2** (Matriz transposta). A **transposta** de uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n)$  é a matriz  $\mathbf{a}^t$  com entradas  $(\mathbf{a}^t)_{ij} = a_{ji}$ . Ou seja, a transposta de uma matriz tem como linhas as colunas da matriz original.

**Definição A.1.3** (Linhas e colunas de matrizes). Seja  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n)$  uma matriz  $m \times n$ . Note-se que o primeiro índice  $i$  de uma entrada  $a_{ij}$  indica a linha e o segundo  $j$  a coluna dela. Tendo isso na vista vamos denotar a  **$k$ -ésima coluna**, respectivamente a  **$\ell$ -ésima linha**, de uma matriz  $\mathbf{a}$  com os símbolos

$$\mathbf{a}_{\bullet k} := \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\ell \bullet} := [a_{\ell 1} \quad \dots \quad a_{\ell n}]. \quad (\text{A.1.1})$$

Temos escolhido o símbolo  $\bullet$  para sugerir “este índice é aberto” – ele corre e assim gera uma lista, ou vertical ou horizontal dependendo se  $\bullet$  fica no primeiro ou no segundo lugar. Assim podemos escrever a matriz  $\mathbf{a}$  nas formas seguintes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_{\bullet 1} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{\bullet n}].$$

**Definição A.1.4** (Espaço-coluna e espaço-linha). Seja  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n)$  uma matriz  $m \times n$ . O **espaço-coluna** é o conjunto de todas as somas das colunas  $\mathbf{a}_{\bullet k}$  da matriz decorado com fatores escalares  $\gamma_k \in \mathbb{R}$ , em símbolos

$$\text{Esp-col}(\mathbf{a}) := \{\gamma_1 \mathbf{a}_{\bullet 1} + \dots + \gamma_n \mathbf{a}_{\bullet n} \mid \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}\} \subset M(m \times 1).$$

Analogamente no **espaço-linha** usa-se as linhas da matriz  $\mathbf{a}$ , ou seja

$$\text{Esp-lin}(\mathbf{a}) := \{\gamma_1 \mathbf{a}_{1\bullet} + \dots + \gamma_n \mathbf{a}_{n\bullet} \mid \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}\} \subset M(1 \times n).$$

**Produto matriz**

Para duas matrizes  $\mathbf{a}$  de tipo  $m \times n$  e  $\mathbf{b}$  de tipo  $n \times p$  pode-se definir o chamado **produto matriz** no caso que os índices  $n = k$  coincidem:

$$M(m \times n) \times M(n \times p) \rightarrow M(m \times p), \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{ab} := (c_{ij}) \quad (\text{A.1.2})$$

onde

$$c_{ij} := \underbrace{\mathbf{a}_{i\bullet}}_{1 \times n} \underbrace{\mathbf{b}_{\bullet j}}_{n \times 1} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

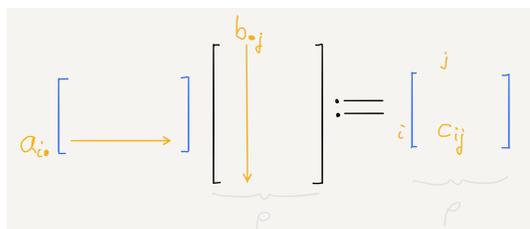


Figura A.1: Produto matriz – o número de colunas de  $\mathbf{a}$  iguale o de linhas de  $\mathbf{b}$

**Lema A.1.5** (Propriedades do produto matriz). *Vale o seguinte*

- (i)  $(\mathbf{cb})\mathbf{a} = \mathbf{c}(\mathbf{ba})$
- (ii)  $\mathbf{c}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{ca} + \mathbf{cb}$  e  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$
- (iii)  $\mathbf{a}\mathbb{1}_n = \mathbf{a}$  e  $\mathbb{1}_m\mathbf{a} = \mathbf{a}$   $\mathbf{a} \in M(m \times n)$
- (iv)  $\mathbf{b}(\gamma\mathbf{a}) = \gamma(\mathbf{ba})$

para todos  $\gamma \in \mathbb{R}$  e matrizes  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  tal que as operacoes fazem sentido.

*Demonstração.* O isomorfismo (5.2.5) traduz para matrizes as propriedades de transformações lineares do Comentário 4.4.3. □

**Definição A.1.6** (Matriz inversa). Uma matriz *quadrada*  $\mathbf{a} \in M(n \times n)$  admite uma inversa se existe uma matriz quadrada  $\mathbf{b}$  tal que  $\mathbf{ab} = \mathbb{1}_n$ .<sup>2</sup> Neste caso tal  $\mathbf{b}$  é único e usa-se o símbolo  $\mathbf{a}^{-1}$  para denotar  $\mathbf{b}$ ; veja Seção 6.4.1.

**Definição A.1.7** (Matrizes quadradas comutando). Dizemos que duas matrizes quadradas  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M(n \times n)$  **comutam** se  $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ .

<sup>2</sup> No caso se matrizes *quadrada* a condição  $\mathbf{ab} = \mathbb{1}_n$  é equivalente à condição  $\mathbf{ba} = \mathbb{1}_n$ .

## A.2 Escalonamento de matrizes segundo Gauss

**Definição A.2.1** (Operações elementares (oe)). Pode-se aplicar para as linhas de uma matriz três tipos de operações, as chamadas **operações elementares**:

- (oe1)<sub>†</sub> trocar duas linhas;
- (oe2) multiplicar uma linha com um escalar  $\alpha$ ;
- (oe3)<sub>+</sub> adicionar uma linha para uma outra.

**Teorema A.2.2.** *O espaço linha não muda quando aplicar (oe) 's a uma matriz.*

*Demonstração.* Óbvio da Definição A.1.4 de Esp-lin. □

### Processo de escalonamento – método de Gauss (\*1777 †1855)

Chama-se uma matriz **escalonada** se em cada linha o **primeiro elemento não-nulo está à esquerda** do primeiro elemento não-nulo da próxima linha. Exemplos

$$\text{escalonadas: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{não é: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Numa matriz *escalonada* os primeiros elementos não-nulos das linhas são chamados de **pivôs** da matriz escalonada.

**Definição A.2.3.** Uma matriz pode ser transformada numa matriz escalonada aplicando operações elementares. O processo é repetir os três passos seguintes:

1. Localiza a primeira coluna não-nula e nela o primeiro elemento não-nulo, dizemos  $a$ . Troca a linha de  $a$  e a primeira linha.
2. Embaixo de  $a$  anulamos todo elemento não-nulo, dizemos  $b$ : Multiplica a linha de  $b$  com  $-a/b$ , depois adiciona a linha de  $a$ . Continue até todos os elementos embaixo de  $a$  são nulos.
3. Esqueça a linha e a coluna de  $a$  e trata a matriz restante começando de novo com passo 1.

O processo de escalonar uma matriz  $\mathbf{a}$  termina com *uma* matriz escalonada – não é única – denotada  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  e ilustrada na Figura 3.1 onde \* simboliza entradas quaisquer, nulos ou não-nulos.

**Exemplo A.2.4.** Ilustramos o escalonamento. Seja  $L_i$  a  $i$ -ésima linha, então

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{4}L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2.naL_3 \\ \text{adic. } L_1}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{3.esq.linha \\ \text{e col. de } 2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{\text{esc}} = \begin{bmatrix} \boxed{p_1} & \boxed{p_2} & \dots & \cancel{p_d} \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Figura A.2: Uma matriz escalonada  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  com pivôs  $p_1, \dots, p_d \neq 0$

e agora começamos de novo com passo 1 tratando a matriz reduzida

$$\xrightarrow[1.]{L2 \leftrightarrow L2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2.]{-\frac{1}{1}L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2.]{\text{na } L3, \text{ adic. } L2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### A matriz escalonada reduzida

O processo de escalonar uma matriz  $\mathbf{a}$  não lida a um resultado único: por exemplo, se  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  é uma matriz escalonada, então  $7\mathbf{a}_{\text{esc}}$  também é.

**Definição A.2.5** (A matriz escalonada reduzida). Chama-se uma matriz escalonada **reduzida**, símbolo  $\mathbf{a}_{\text{esc-red}}$ , se cada um pivô é 1 e as entradas acima dele são nulos. A matriz nula já é escalonada reduzida.

A matriz escalonada reduzida é única: Se uma matriz  $\mathbf{a}$  não possui pivô, então trata-se da matriz nula e

$$\mathbf{0}_{\text{esc}} = \mathbf{0}_{\text{esc-red}} = \mathbf{0}.$$

Dado então uma matriz não-nula  $\mathbf{a}$ . Calcule uma forma escalonada  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ . Na matriz  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  multiplique a primeira linha com  $1/p_1$  onde  $p_1$  é o pivô da primeira linha. Se a linha 2 não é nula, então faça o mesmo na linha 2. Depois aplique operações elementares à linha 2 para anular cada uma entrada acima do pivô dois. Continue até não tem mais linhas não-nulas.

$$\mathbf{a}_{\text{esc-red}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Figura A.3: A matriz escalonada reduzida  $\mathbf{a}_{\text{esc-red}}$

**Exercício A.2.6.** Suponha que  $\mathbf{a}$  é uma matriz quadrada  $n \times n$  e uma matriz escalonada  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  possui  $n$  pivôs. Neste caso a matriz escalonada reduzida  $\mathbf{a}_{\text{esc-red}} = \mathbb{1}_n$  é a matriz identidade.

## A.2.1 Aplicações de escalonamento

### Matrizes

- (i) **Base e dimensão do subespaço gerado por  $m$  vetores.** Seção 3.1.3

Dado  $m$  vetores  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ , colocamo-los como as linhas de uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n)$  e calculamos uma forma escalonada  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ . As linhas não-nulas, dizemos  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_d$  como na Figura 3.1, formam uma base do espaço-linha de  $\mathbf{a}$  cuja dimensão é consequentemente  $d$ . Assim o subespaço

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}) \stackrel{\text{Teor.A.2.2}}{=} \text{Esp-lin}(\mathbf{a}_{\text{esc}}) \subset \mathbb{R}^n$$

tem como base as linhas não-nulas  $\{\ell_1, \dots, \ell_d\}$  da matriz escalonada  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ .

- (ii) **Base e dimensão da imagem de uma matriz  $\mathbf{a}$ .** Seção 4.2

A imagem de uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n)$  é igual, veja (4.2.2), a seu espaço-coluna o que coincide com o espaço-linha da matriz transposta  $\mathbf{a}^t$  ou seja

$$\text{Im}(\mathbf{a}) = \text{Esp-col}(\mathbf{a}) = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}^t) \stackrel{\text{Teor.A.2.2}}{=} \text{Esp-lin}(\mathbf{a}^t_{\text{esc}}) \subset \mathbb{R}^n.$$

Assim as linhas não-nulas de  $\mathbf{a}^t_{\text{esc}}$  formam uma base de  $\text{Im}(\mathbf{a})$ . A dimensão da imagem é chamado de **posto** da matriz.

- (iii) **Resolução de sistemas lineares  $\mathbf{a}x = b$ .** Seções A.3 e 6.6

Existência de uma solução  $x$  é equivalente a  $b$  sendo uma CL das colunas da matriz  $\mathbf{a}$ . Neste caso segue os passos descrito no Comentário A.3.5.

- (iv) **Núcleo de uma matriz  $\mathbf{a}$ .** Seção 6.6.2

Escalone a matriz estendida  $[\mathbf{a} : \mathcal{O}]$  e resolva  $[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\text{esc}} = [\mathbf{a}_{\text{esc}} : \mathcal{O}]$  “de baixo para cima”, veja Comentário A.3.5.

- (v) **Cálculo da matriz inversa (Gauss-Jordan).** Seção A.4

### Transformações lineares gerais

Se  $A: E \rightarrow F$  é uma transformação linear entre espaços vetoriais da dimensão finita escolha bases e calcule a matriz de  $A$  correspondente. Aplique as técnicas para matrizes descritos acima.

- Cálculo do posto de uma transformação linear; Seção 6.1
- Cálculo do núcleo e da imagem de uma transformação linear; Seção 6.6
- Resolução de sistemas lineares; Seções A.3 e 6.6
- Cálculo da transformação linear inversa (Gauss-Jordan). Seção A.4

### A.3 Sistemas Lineares

Seja  $\mathbf{a}$  uma matriz  $m \times n$  e  $b = (b_1, \dots, b_m)$  uma lista ordenada de  $m$  números reais. Agora mesclamos às  $n$  colunas de  $\mathbf{a}$  a lista  $b$  como a  $(n+1)$ -ésima coluna para obter a chamada **matriz aumentada**, notação

$$[\mathbf{a} : b] := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

**Definição A.3.1.** Suponha uma matriz  $\mathbf{a}$  tipo  $m \times n$  e uma lista  $b = (b_1, \dots, b_m)$  são dadas. Queremos saber se existe uma solução  $x = (x_1, \dots, x_n)$  do **sistema linear (SL) de  $m$  equações a  $n$  incógnitas  $x_1, \dots, x_n$**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (\text{A.3.1})$$

ou, equivalentemente, da equação correspondente  $\mathbf{a}x = b$  entre matrizes.<sup>3</sup>

É útil chamar a matriz aumentada  $[\mathbf{a} : b]$  o **sistema linear** definido por (A.3.1). A lista  $b = (b_1, \dots, b_m)$  é chamada de **inogeneidade** do sistema linear. O caso  $b = \mathcal{O} = (0, \dots, 0)$  chama-se de **sistema linear homogêneo (SLH)**.

O sistema linear (A.3.1) pode ser escrito equivalentemente na forma

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3.2})$$

O lado esquerdo é um exemplo de uma chamada “combinação linear” das colunas  $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}$  da matriz  $\mathbf{a}$ , veja (A.1.1), representando o vetor  $b$  – um conceito fundamental o qual vamos tratar no próximo parágrafo.

**Comentário A.3.2.** Note-se que o lado esquerdo de (A.3.2) corre sobre toda a imagem da matriz  $\mathbf{a}$  se variamos  $x$  sobre todas as listas. Então um SL  $[\mathbf{a} : b]$  tem uma solução se e somente se a lista  $b$  é elemento da imagem da matriz  $\mathbf{a}$ .

Lembramos do curso MA141 “Geometria Analítica” o seguinte

**Lema A.3.3.** *Uma lista  $x$  é solução do sistema linear  $[\mathbf{a} : b]$  se e somente se  $x$  é solução do sistema linear associado à matriz escalonada  $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$ .*

*Ideia de demonstração.* (Veja por exemplo Artin “Algebra” (1991), p. 13.)

As operações elementares podem ser escrito como matrizes invertíveis  $\mathbf{e}$ . O resultado de uma operação elementar numa matriz  $\mathbf{a}$  então é a matriz  $\mathbf{ea}$ . Assim  $\mathbf{a}_{\text{esc}} = \mathbf{pa}$  onde  $\mathbf{p}$  é da forma  $\mathbf{p} := \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_k$ . Além disso  $\mathbf{e}[\mathbf{a} : b] = [\mathbf{ea} : \mathbf{eb}]$ , então  $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}} = [\mathbf{pa} : \mathbf{pb}]$ . ‘ $\Rightarrow$ ’ Se  $\mathbf{a}x = b$ , então  $\mathbf{pax} = \mathbf{pb}$ . ‘ $\Leftarrow$ ’ Use  $\mathbf{p}^{-1}$ .  $\square$

<sup>3</sup> Sempre se escrevemos  $\mathbf{a}x = b$  consideramos  $x$  e  $b$  como matrizes colunas  $n \times 1$  e  $m \times 1$ , respectivamente, e  $\mathbf{a}x$  é o produto matriz.

Note-se que no caso especial quando um sistema linear é *homogêneo*, ou seja  $b = \mathcal{O}$ , vale a relação seguinte

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\text{esc}} = [\mathbf{a}_{\text{esc}} : \mathcal{O}].$$

**Corolário A.3.4** (Núcleo).  $N(\mathbf{a}) = N(\mathbf{a}_{\text{esc}})$ .

*Demonstração.* As soluções de  $[\mathbf{a} : \mathcal{O}]$  e  $[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\text{esc}}$  são iguais (Lema A.3.3).  $\square$

### Resolução de um sistema linear usando escalonamento

**Comentário A.3.5.** Para resolver o SL  $\mathbf{a}x = b$

- escalone a matriz aumentada  $[\mathbf{a} : b]$
- para obter uma matriz escalonada  $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}} =: [\tilde{\mathbf{a}} : \tilde{b}]$ .
- Resolva o SL  $\tilde{\mathbf{a}}x = \tilde{b}$  "de baixo para cima", veja Exemplo A.3.6 embaixo.
- Uma lista  $x$  é solução de  $\tilde{\mathbf{a}}x = \tilde{b}$  se e somente se  $x$  é solução de  $\mathbf{a}x = b$ .

**Exemplo A.3.6.** Para encontrar as soluções  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  do sistema linear

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases}$$

primeiro, formamos a matriz aumentada  $[\mathbf{a} : b]$  onde  $b = (0, 0, 0) =: \mathcal{O}$ , segundo, escalonamos ela, e terceiro, **resolvemos "de baixo para cima"**. Segundo Lema A.3.3 uma solução de  $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$  também resolve  $[\mathbf{a} : b]$ , e vice versa.

Exemplo A.2.4 mostra as matrizes  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ .

No Exemplo A.2.4 o lado direito  $= [\mathbf{a}_{\text{esc}} : \mathcal{O}]$  desta fórmula representa o SLH

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

### Resolução "de baixo para cima":

LINHA 3. Começamos embaixo com a última linha  $0x + 0y + 0z = 0$  a qual não representa nenhuma restrição para  $x, y, z$ .

LINHA 2. Progredimos para cima, ou seja para a linha dois  $y + 2z = 0$ . Escolha uma variável para ser a variável dependente da(s) outra(s) variáveis, as quais variam livremente no corpo. No nosso caso só tem uma outra e o corpo é  $\mathbb{R}$ . Escolhemos por exemplo como variável dependente  $y = y(z) = -2z$  como função da variável  $z$  a qual varia livremente sobre os números reais, ou seja  $z \in \mathbb{R}$ .

LINHA 1. Progredimos para cima, ou seja para a primeira linha

$$0 = 2x + y(z) + z = 2x - 2z + z = 2x - z$$

lembrando que  $z \in \mathbb{R}$  é livre. Então  $x = x(z) = \frac{1}{2}z$  para qualquer  $z \in \mathbb{R}$ .

**Conclusão.** Toda solução do SL é da forma

$$\begin{bmatrix} x(z) \\ y(z) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde  $z \in \mathbb{R}$  é um número real arbitrário. Então o SL não tem só uma solução – tem uma para cada um número real  $z$ . Isso conclui o Exemplo A.3.6.

## A.4 Cálculo da matriz inversa – Gauss-Jordan

Esta Seção A.4 aplica só para matrizes *quadradas*.

**Proposição A.4.1.** *Caso uma matriz  $n \times n$  (quadrada)  $\mathbf{a}$  admite uma inversa, encontra-se a inversa assim: Considere a matriz  $[\mathbf{a} : \mathbb{1}]$  obtida por escrever a matriz identidade  $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n$  à direita de  $\mathbf{a}$ . Aplique as três operações elementares (oe1 – oe3), veja Definição A.2.1, até a matriz modificada tem a forma  $[\mathbb{1} : \mathbf{c}]$  para uma matriz  $\mathbf{c}$ . Neste caso  $\mathbf{c} = \mathbf{a}^{-1}$  é a inversa buscada.*

$$[\mathbf{a} : \mathbb{1}] \xrightarrow{\text{(oe)}} \dots \xrightarrow{\text{(oe)}} [\mathbb{1} : \underbrace{\mathbf{c}}_{\mathbf{a}^{-1}}]$$

**Dica:** É aconselhável escalonar a matriz  $\mathbf{a}$  como passo intermediário e chegar numa matriz da forma  $[\mathbf{a}_{\text{esc}} : \mathbf{d}]$  onde  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  é um escalonamento de  $\mathbf{a}$ . Depois elimine todas as entradas acima da diagonal para ao fim chegar em  $[\mathbb{1} : \mathbf{c}]$ .

*Ideia de demonstração.* (Veja por exemplo Artin “Álgebra” (1991), p. 17.)

As operações elementares podem ser escrito como matrizes invertíveis  $\mathbf{e}$ . O resultado de uma operação elementar numa matriz  $\mathbf{a}$  então é a matriz  $\mathbf{ea}$ . Assim reduzir  $\mathbf{a}$  para a matriz identidade  $\mathbb{1}$  traduz num produto matriz  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_k \mathbf{a} = \mathbb{1}$ . Aplicando  $\mathbf{a}^{-1}$  da direita obtemos  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_k \mathbb{1} = \mathbf{a}^{-1}$ . Esta identidade diz que aplicando as mesmas operações elementares na mesma ordem à matriz identidade  $\mathbb{1}$  obtém-se a matriz inversa  $\mathbf{a}^{-1}$ .  $\square$

**Comentário A.4.2** (Matrizes  $2 \times 2$ ). Se  $ad - bc \neq 0$  a matriz inversa é

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{A.4.1}$$

### A.4.1 O determinante de matrizes quadradas

Antes de começar o processo descrito na Proposição A.4.1, devemos saber que aquela matriz  $\mathbf{a}$  é invertível. Nas dimensões 2 e 3 a ferramenta mais útil para checar é o determinante.

**Definição A.4.3** (Matrizes). Nas dimensões 1, 2, 3 define-se  $\det[a_{11}] = a_{11}$  e

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \overbrace{a_{11}a_{22}}^{\text{diagonal}} - \overbrace{a_{21}a_{12}}^{\text{anti-diagonal}}$$

e

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \overbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}^{\text{diagonal}} - \overbrace{a_{31}a_{22}a_{13}}^{\text{anti-diagonal}} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Note como o primeiro índice dos  $a_{ij}$ 's embaixo do produto da diagonal / anti-diagonal fica constante e o segundo índice muda ciclicamente.

**Exercício A.4.4.** Seja  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ . Prove que

1.  $\det(\mathbf{am}) = \det \mathbf{a} \cdot \det \mathbf{m}$  [cálculo direto];
2.  $\det \mathbf{a} \neq 0 \iff \mathbf{a}$  é invertível;
3.  $\det(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{am}) = \det \mathbf{a}$ , para todo  $\mathbf{m}$  invertível.

Pode-se definir o determinante de matrizes quadradas

$$\det: M(n \times n; \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

de qualquer tamanho  $n \times n$ ; veja por exemplo [San12, § 2.2].

**Teorema A.4.5.** *Seja  $\mathbf{a}$  uma matriz  $n \times n$  (quadrada), então são equivalente*

$$\det \mathbf{a} \neq 0 \iff \mathbf{a} \text{ invertível (} \mathbf{a}^{-1} \text{ existe).}$$

*O determinante respeita transposta e produto matriz, ou seja*

$$\det \mathbf{a}^t = \det \mathbf{a}, \quad \det \mathbf{ba} = (\det \mathbf{b})(\det \mathbf{a}) = \det \mathbf{ab}. \quad (\text{A.4.2})$$

*Em geral não respeita adição nem multiplicação escalar. De fato, para escalares  $\alpha \in \mathbb{K}$  vale  $\det(\alpha \mathbf{a}) = \alpha^n \det \mathbf{a}$ .*

*Para matrizes  $\mathbf{c}$  tipo  $k \times k$ ,  $\mathbf{d}$  tipo  $(n-k) \times (n-k)$ , e tipo  $k \times (n-k)$ , vale*

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{e} \\ \mathbf{0} & \mathbf{d} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{c}) \cdot \det(\mathbf{d}). \quad (\text{A.4.3})$$

*Demonstração.* Veja por exemplo [San12, Teor.2.14 e 2.15] e [Sal19, Thm. D.3.5]. Para matrizes sobre um corpo veja [Lan93, VIII Prop. 4.16].  $\square$

### O determinante de Vandermonde

**Teorema A.4.6** (Vandermonde 1771 ( $n = 3$ ), Cauchy 1815 (caso geral)). *Dado elementos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  de um corpo  $\mathbb{K}$ , então vale*

$$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \det \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

*Demonstração.* Para  $k = n, n-1, \dots, 3, 2$  adicione  $-\alpha_1$  vezes a  $(k-1)$ -ésima coluna à  $k$ -ésima coluna. Obtemos uma matriz  $n \times n$  com  $(1, 0, \dots, 0)$  como primeira linha e

$$(1, \alpha_j - \alpha_1, \alpha_j^2 - \alpha_1 \alpha_j, \dots, \alpha_j^{n-1} - \alpha_1 \alpha_j^{n-2})$$

como  $j$ -ésima coluna ( $j > 1$ ). Desenvolvemos o determinante desta matriz segunda sua primeira linha  $(1, 0, \dots, 0)$  obtemos

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} (\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (\alpha_n - \alpha_1) & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{bmatrix} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1) \cdots (\alpha_n - \alpha_1) \cdot \Delta(\alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Agora indução finaliza a demonstração.  $\square$

## A.5 Exercícios

1. Use escalonamento para resolver o sistema linear

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 6y + 9z &= 7 \\ 2x + 8y + 8z &= 6 \end{aligned}$$

nas incógnitas  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

2. Determine a inversa da matriz  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  caso existir.<sup>4</sup>
3. Decida quais das matrizes possuem inversa e calcule quando existir:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

---

<sup>4</sup>  $\det \mathbf{a} = 1 \neq 0$  então  $\mathbf{a}^{-1}$  existe, resultado  $\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$



# Apêndice B

## Polinômios

Suponhamos<sup>1</sup> durante todo o Apêndice B que

$$\mathbb{K} \text{ é um corpo infinito (em símbolos } |\mathbb{K}| = \infty) \quad (\text{B.0.1})$$

ou seja, o número de elementos de  $\mathbb{K}$ , denotado por  $|\mathbb{K}|$ , dever ser infinito. Esta hipótese garante que os monômios formam uma base para o espaço vetorial  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  de polinômios; veja Teorema B.1.2.<sup>2</sup> Corpos infinitos incluem corpos mais importantes como os números reais e os números complexos

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

mas não incluem os corpos  $\mathbb{Z}_p$  com  $p$  primo.

Neste Apêndice B seguimos o livro texto excelente [Koe85].

**Definição B.0.1** (Polinômio). Uma função  $p: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  dada por uma soma finita

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k$$

onde os coeficientes  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$  são elementos do corpo  $\mathbb{K}$ , uma tal função  $p$  é chamada de **polinômio** com coeficientes em  $\mathbb{K}$  ou **polinômio sobre  $\mathbb{K}$** .

No caso  $\alpha_k = 1$  o polinômio  $p$  é chamado de **mônico**. No caso  $\alpha_k \neq 0$  o expoente  $k$  é chamado de **grau do polinômio**, símbolo  $\deg(p) := k$ . Seja

$$\mathcal{P}(\mathbb{K})$$

o conjunto composto de todos os polinômios sobre  $\mathbb{K}$ .<sup>3</sup>

Os polinômios constantes correspondem aos elementos do corpo  $\mathbb{K}$ . Por isso faz sentido considerar o corpo  $\mathbb{K}$  como subconjunto de  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ .

<sup>1</sup>Ap. B de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

<sup>2</sup>Em  $\mathbb{Z}_3$ , os polinômios  $2x^2 + x^3$  e  $2x + 2x^2 + 2x^3$ , visto como funções  $\mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$  na variável  $x$ , são iguais (ambos tomam valor 0 em  $x = 0$ , 1 e valor 1 em  $x = 2$ ) ainda que os coeficientes são diferentes (0, 2, 1 e 2, 2, 2). Claramente tal ambiguidade não é desejável. Em  $\mathbb{Z}_2$  o polinômio  $x + x^2$  é constantemente nulo ainda que os coeficientes em frente dos monômios não são nulos.

<sup>3</sup>Tem-se uma inclusão  $\mathcal{P}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{K})$  no espaço vetorial das funções  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  graças à infinidade de  $\mathbb{K}$  a qual evita o problema exposto no rodapé anterior.

## B.1 Espaço vetorial

**Lema B.1.1.**  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  é subespaço do espaço vetorial  $\mathcal{F}(\mathbb{K})$  em Exercício 1.2.10.

*Demonstração.*  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  é fechado sob adição e sob multiplicação escalar.  $\square$

**Teorema B.1.2.** Os monômios  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  formam uma base de  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ .

*Demonstração.* Gera: Verdadeiro por definição de polinômio. LI: Escolha uma CL de monômios e suponha que é igual ao polinômio nulo. Adicionando termos da forma  $0 \cdot x^i$ , se necessário, temos a hipótese

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_k x^k = 0$$

para todos os  $x \in \mathbb{K}$ . Como o corpo  $\mathbb{K}$  é infinito conforme hipótese B.0.1, podemos escolher  $k+1$  elementos dois-a-dois diferentes  $x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathbb{K}$ . Temos

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 x_j^2 + \dots + \alpha_k x_j^k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k+1.$$

Consideramos isto como um sistema linear de  $k+1$  equações nas  $k+1$  incógnitas  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ . O determinante da matriz  $A$  de coeficientes é o determinante de Vandermonde, em símbolos  $\det A = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$ , a qual não é nula conforme Teorema A.4.6. Assim o sistema linear  $A\alpha = \mathcal{O}$ , onde  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ , admite a solução única  $\alpha = A^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}$  trivial.  $\square$

## B.2 Anel

Definimos o produto de dois polinômios

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_k x^k, \quad q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_\ell x^\ell,$$

através de calculação distributiva, ou seja

$$(pq)(x) := p(x)q(x) := \gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_{k+\ell} x^{k+\ell} \quad (\text{B.2.1})$$

onde  $\gamma_0 = \alpha_0 \beta_0$ ,  $\gamma_1 = \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0$ ,  $\dots$ ,  $\gamma_{k+\ell} = \alpha_k \beta_\ell$ . O coeficiente geral  $\gamma_m$  é a soma de todos produtos  $\alpha_i \beta_j$  com  $0 \leq i \leq k$ ,  $0 \leq j \leq \ell$  e  $i + j = m$ . A fórmula (B.2.1) define um produto

$$\cdot : \mathcal{P}(\mathbb{K}) \times \mathcal{P}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{K}), \quad (p, q) \mapsto pq$$

o qual é comutativo e associativo (porque a multiplicação em  $\mathbb{K}$  é). O elemento neutro multiplicativo 1 de  $\mathbb{K}$  é o elemento neutro da multiplicação ”.”. Assim  $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot)$  é um anel comutativo e associativo com unidade  $1 \in \mathbb{K} \subset \mathcal{P}(\mathbb{K})$ . Ele é chamado de **anel polinomial sobre  $\mathbb{K}$** . Definição (B.2.1) prova o

**Teorema B.2.1** (Grau). Se  $p \neq \mathcal{O}$  e  $q \neq \mathcal{O}$  são polinômios, então o produto  $pq \neq \mathcal{O}$  também não é o polinômio nulo e vale  $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$ .

Este teorema diz que o anel  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  não tem **divisores nulos** ( $p \neq \mathcal{O}$  e  $q \neq \mathcal{O}$  com  $pq = \mathcal{O}$ ). Um anel sem divisores nulos é chamado de **anel de integridade**.

**Teorema B.2.2** (Divisão com resto). *Dado dois polinômios  $p$  e  $q \neq \mathcal{O}$ , então existem polinômios únicos  $s$  e  $r$  tal que*

$$\begin{aligned} p &= qs + r \\ r &= 0 \quad \text{ou} \quad \deg(r) < \deg(q). \end{aligned}$$

*Demonstração.* Nos casos  $p = \mathcal{O}$  ou  $\deg(p) < \deg(q)$  escolhe  $s = \mathcal{O}$ . Assim podemos supor  $\deg(p) \geq \deg(q)$ . Na terminologia em cima podemos supor  $\alpha_k, \beta_\ell \neq 0$ , assim  $k \geq \ell$ . Então o polinômio definido assim

$$r_1(x) := p(x) - \frac{\alpha_k}{\beta_\ell} \cdot x^{k-\ell} \cdot q(x)$$

é nulo ou tem grau  $k_1 < k$ . Se também vale  $k_1 < \ell$  definimos  $s(x) := \frac{\alpha_k}{\beta_\ell} \cdot x^{k-\ell}$  e a prova é completa. No outro caso  $k_1 \geq \ell$  repetimos o processo com  $r_1$  em lugar de  $p$  e chegamos no destino depois finito muitos passos. Para unicidade veja Exercício B.2.7.  $\square$

**Corolário B.2.3.** *Seja  $p$  um polinômio, então para cada um ponto  $\alpha \in \mathbb{K}$  existe um único polinômio  $s_\alpha$  tal que  $p(x) = (x - \alpha)s_\alpha(x) + p(\alpha)$ ,  $\forall x \in \mathbb{K}$ .*

*Demonstração.* Na divisão com resto escolha  $q(x) := x - \alpha$  para obter  $p = qs + r$  onde  $r$  é nulo ou possui grau nulo, assim é constante  $r \equiv \text{const}$ . No ponto  $x = \alpha$  obtemos  $p(\alpha) = 0 \cdot s(\alpha) + \text{const}$ . Para unicidade veja Exercício B.2.7.  $\square$

Se escolhamos para o ponto  $\alpha \in \mathbb{K}$  uma raiz de  $p$ , caso tem raízes, obtemos

**Corolário B.2.4.** *Seja  $p \neq \text{const}$  um polinômio não-constante, então para toda raiz  $\alpha \in \mathbb{K}$  de  $p$  existe um único polinômio  $s_\alpha$  com  $p(x) = (x - \alpha)s_\alpha(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{K}$ .*

Se  $s = s_\alpha$  possui uma raiz em  $\mathbb{K}$ , então podemos continuar o processo e obtemos a representação em Teorema B.3.1.

**Corolário B.2.5.** *Um polinômio não-nulo  $p \neq \mathcal{O}$  não tem mais raízes como seu grau marca, em símbolos  $|p^{-1}(0)| \leq \deg(p)$ .*

Como o grau de um polinômio é finito o Corolário precedente implica

**Corolário B.2.6.** *Se  $p$  é um polinômio e vale  $p(\alpha) = 0$  para infinito muitos  $\alpha \in \mathbb{K}$ , então  $p = \mathcal{O}$  é o polinômio nulo.*

**Exercício B.2.7.** Mostre os seguintes.

- (i) Em Teorema B.2.2 os polinômios  $s$  e  $r$  são únicos.
- (ii) Em Corolário B.2.3 o polinômio  $s_\alpha$  é único.

[Dicas: Corolários B.2.5 e B.2.6.]

### B.3 Fatorização

**Teorema B.3.1** (Fatorização de polinômios). *Um polinômio não-constante  $p$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  possui uma representação única<sup>4</sup> da forma*

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \dots (x - \alpha_r)^{m_r} \cdot t(x) \quad (\text{B.3.1})$$

com pontos  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$  dois-a-dois diferentes, um polinômio  $t$  sem raiz em  $\mathbb{K}$ , e expoentes  $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$  tal que  $m_1 + \dots + m_r + \deg(t) = \deg(p)$ . Além disso, os pontos  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  são exatamente as raízes de  $p$  em  $\mathbb{K}$ .

*Demonstração.* Corolário B.2.4. □

**Definição B.3.2.** Chama-se o expoente  $m_k$  na representação (B.3.1) de **ordem** ou de **multiplicidade algébrica** da raiz  $\alpha_k$  do polinômio  $p$ .

**Definição B.3.3.** Um polinômio não-constante  $p$  de  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  é chamado de **irreduzível** se não é um produto

$$p \neq p_1 \dots p_k$$

de polinômios  $p_i$  de grau  $< \deg(p)$  e é chamado de **reduzível** no caso contrário.

**Observação B.3.4.**

1. Todo polinômio de grau 1 – chamado de **fator linear** – é irreduzível.
2. Ser irreduzível depende do corpo. Por exemplo, os polinômios de grau dois

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1), \quad x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

são reduzível como polinômios complexos, elementos de  $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ , mas só o primeiro é reduzível como polinômio real, elemento de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Em  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  o polinômio quadrático  $x^2 + 1$  é irreduzível.

3. Como polinômio real  $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$  é composto de três fatores irreduzíveis, dois fatores lineares e um quadrático.

Como polinômio complexo  $(x^2 - 1)(x^2 + 1)$  é composto de quatro fatores lineares irreduzíveis.

### B.4 Teorema fundamental da álgebra

**Teorema B.4.1** (Teorema fundamental da álgebra –  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). *Valem e são equivalente:* a) *Um polinômio complexo não-constante  $p$  possui uma raiz.*<sup>5</sup> b) *Um polinômio complexo  $p$  de grau  $k$  fatora em  $k$  fatores lineares, ou seja*

$$p(x) = c(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k) \quad (\text{B.4.1})$$

<sup>4</sup> única até alternar a ordem no produto

<sup>5</sup> Este teorema famoso tem uma história de séculos – desde o primeiro aparecimento até o bem entendido de hoje: Girard (1595-1632), Descartes (1596-1650), Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783) formulou a primeira vez “*todo polinômio real de grau  $n$  possui exatamente  $n$  raízes complexas*” e provou para  $n \leq 6$ , D’Alembert (1717-1783), Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855) deu 4 provas, Argand (1768-1822), Cauchy (1789-1857). A quem maneja a língua alemão recomendo muito o livro [EHH<sup>+</sup>92], Capítulo 4.

onde  $c, \alpha_1, \dots, \alpha_k$  são números complexos, não necessariamente diferentes.

*Demonstração.* a) Uma prova ao longo da abordagem de D'Alembert e Argand, isto é minimizar o absoluto  $|p(z)|$  em  $\mathbb{C}$ , é dada no livro [Art91, Thm. 9.1, p. 527].  
b) Aplique iterativamente Corolário B.2.4 usando existência de uma raiz conforme parte a). Alternativamente, na fórmula (B.3.1) o polinômio  $t$  sem raiz deve ser constante, porque no caso contrário ele ia ter uma raiz segundo parte a).  $\square$

**Corolário B.4.2** (Polinômios reais –  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). *Um polinômio mônico real  $p$  de grau  $n \geq 1$  fatoriza como produto  $p = p_1 \dots p_k$  de polinômios mônicos reais irredutíveis  $p_i$  de grau 1 ou 2.*

*Demonstração.* Um polinômio real é complexo e assim  $p$  tem a forma (B.4.1) no teorema fundamental acima onde  $c = 1$  porque  $p$  é mônico. Os  $\alpha_i$  são complexos o que não impede real. Se um  $\alpha_i$  não é real o complexo conjugado  $\bar{\alpha}_i$  também é uma raiz – assim igual a um dos  $\alpha_j$  – porque  $p$  é um polinômio real. Mas o produto  $(x - \alpha_i)(x - \bar{\alpha}_i) = x^2 - (\alpha_i + \bar{\alpha}_i)x + \alpha_i\bar{\alpha}_i$  é um polinômio real. Assim os fatores em (B.4.1) ou são linear e real ou são complexos mas combinam em pares cujo produto é um polinômio quadrático real irredutível.  $\square$



## Apêndice C

# Demonstrações restantes

### C.1 Espaços vetoriais

**Lema C.1.1** (Lema 1.1.5). *Seja<sup>1</sup>  $(G, *)$  um grupo. Então vale o seguinte.*

- 1) *O elemento neutro é único.*
- 2) *Os elementos inversos são únicos.*
- 3) *Para todos os elementos  $f, g, h \in G$  vale:*
  - a)  $f * g = f * h \Rightarrow g = h$  *(lei da corte)*
  - b)  $f * g = f \Rightarrow g = e$
  - c)  $f * g = e \Rightarrow g = \bar{f}$

*Demonstração.* 1) Se  $e, \tilde{e} \in G$  satisfazem o axioma (elemento neutro), então usando o axioma para  $e$  e depois para  $\tilde{e}$  obtemos que  $e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$ .

2) Seja  $g \in G$ . Se  $\bar{g}, \tilde{g} \in G$  satisfazem o axioma (inverso) para  $g$ , então obtemos

$$\bar{g} = e * \bar{g} = \underbrace{(\tilde{g} * g)}_{=e} * \bar{g} = \tilde{g} * \underbrace{(g * \bar{g})}_{=e} = \tilde{g} * e = \tilde{g}$$

usando (elem. neutro) no início e fim, (inverso) $_{\tilde{g}}$ , (associatividade), (inverso) $_{\bar{g}}$ .

- 3) a)  $g = e * g = (\bar{f} * f) * g = \bar{f} * (f * g) \stackrel{\text{hip.}}{=} \bar{f} * (f * h) = (\bar{f} * f) * h = e * h = h$ .
- b) Use a) com  $h = e$ . c) Use a) com  $h = \bar{f}$ . □

**Lema C.1.2** (Lema 1.1.10). *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $0 \in K$  é o elemento neutro da adição. Então  $0\beta = 0$  e  $\beta 0 = 0$  para todos os elementos  $\beta \in \mathbb{K}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\beta \in \mathbb{K}$ , denotamos o inverso aditivo de  $-\beta$ . Então

$$\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} 1\beta \stackrel{(\text{el.n.})+}{=} (1+0)\beta \stackrel{(\text{distr.})}{=} 1\beta + 0\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} \beta + 0\beta.$$

Usamos esta identidade para obter a segunda igualdade no seguinte

$$0 \stackrel{(\text{inv.})}{=} (-\beta) + \beta = -\beta + (\beta + 0\beta) \stackrel{(\text{ass.})+}{=} (-\beta + \beta) + 0\beta \stackrel{(\text{inv.})}{=} 0 + 0\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} 0\beta.$$

<sup>1</sup>Ap. C de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024

□

**Lema C.1.3** (Lema 1.1.20). *Para o vetor nulo  $\mathcal{O} \in E$  de um espaço vetorial e o elemento neutro aditivo  $0 \in \mathbb{K}$  do corpo vale o seguinte.*

- (i)  $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$  para todos os escalares  $\alpha \in \mathbb{K}$ .
- (ii)  $0v = \mathcal{O}$  para todos os vetores  $v \in E$ .
- (iii) Para todo o escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo o vetor  $w \in E$  são equivalentes:

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}.$$

*Demonstração.* (i) CASO  $\alpha = 0$ . Como  $\alpha\mathcal{O} + 0\mathcal{O} = (\alpha + 0)\mathcal{O} = \alpha\mathcal{O}$ , então  $0\mathcal{O} = \mathcal{O}$  pela lei da corte (Lema C.1.1 3b) para  $(G, *) = (E, +)$ .

CASO  $\alpha \neq 0$ . Tal  $\alpha$  tem um inverso aditivo, notação  $\alpha^{-1}$ . Seja  $v \in E$ , então

$$v \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1v \stackrel{(\text{inv.})_{\mathbb{K}}}{=} (\alpha\alpha^{-1})v \stackrel{(\text{comp.})}{=} \alpha(\alpha^{-1}v).$$

Usando este resultado no início e no fim do seguinte obtemos que

$$v + \alpha\mathcal{O} = \alpha(\alpha^{-1}v) + \alpha\mathcal{O} \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} \alpha((\alpha^{-1}v) + \mathcal{O}) \stackrel{(\text{el.n.})_{E,+}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v) = v.$$

Então  $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$  pela lei da corte (Lema C.1.1 3b) para  $(G, *) = (E, +)$ .

- (ii) Como  $v + 0v = 1v + 0v = (1 + 0)v = 1v = v$  a lei da corte diz que  $0v = \mathcal{O}$ .
- (iii) '⇒' Suponha  $\alpha w = \mathcal{O}$ . Caso  $\alpha = 0$ , pronto. Caso  $\alpha \neq 0$  concluímos que

$$w \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1w \stackrel{(\text{el.n.})_{\mathbb{K}}}{=} (\alpha^{-1}\alpha)w \stackrel{(\text{comp.})}{=} \alpha^{-1}(\alpha w) \stackrel{\text{hip.}}{=} \alpha^{-1}\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}.$$

'⇐' Se  $w = \mathcal{O}$ , então  $\alpha\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}$ , pronto. Se  $\alpha = 0$ , então  $0w \stackrel{(ii)}{=} \mathcal{O}$ , pronto. □

**Corolário C.1.4** (Corolário 1.1.21). *Para todos os  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $w \in E$  vale:*

- a)  $\alpha(-w) = -(\alpha w)$ ;
- b)  $(-\alpha)w = -(\alpha w)$ .

*Demonstração.* a) Temos que mostrar que a soma de  $\alpha w$  e o candidato para ser seu inverso aditivo iguale o vetor nulo. Com efeito

$$\alpha w + \alpha(-w) \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} \alpha(w + (-w)) \stackrel{(\text{el.n.})_{E,+}}{=} \alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (i) de Lema C.1.3.

b) Temos o objetivo análogo de chegar ao vetor nulo, com efeito

$$\alpha w + (-\alpha)w \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} (\alpha + (-\alpha))w \stackrel{(\text{el.n.})_{\mathbb{K},+}}{=} 0w = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (ii) de Lema C.1.3. □

## C.2 Subespaços

**Lema C.2.1** (Lema 2.2.4). *Todo subconjunto LI  $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$  gera  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* Vai ter 4 passos. I. Os vetores  $u, v$  não são múltiplos um do outro: Suponha por absurdo que  $u = \alpha v$  para um  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então  $1u + (-\alpha)v = 1\alpha v - (\alpha v) = \mathcal{O}$  contradizendo LI. II.  $u \neq \mathcal{O}$ : Caso contrario  $u = \mathcal{O} = 0v$  contradizendo I. III.  $v \neq \mathcal{O}$ : Análogo. IV. Seja  $v \in \mathbb{R}^2$ . Caso  $w = \mathcal{O}$  escrevemos  $w = 0u$ , pronto. Caso  $v \neq \mathcal{O}$ : Agora identificamos  $\mathbb{R}^2$  com o plano usando dois eixos  $OXY$ , veja Figura 2. Segundo II. e III. temos duas retas  $\mathbb{R}u$  e  $\mathbb{R}v$  passando ambas a origem  $O$ , mas não são iguais segundo I. Recebemos um paralelogramo com dois lados parte das retas e dois vértices sendo  $\mathcal{O}$  e  $v$ ; pensa Figura 2 com  $OX$  e  $OY$  substituído para  $Ou$  e  $Ov$ . Então a flecha  $v$  é a soma de duas flechas do paralelogramo, uma flecha sendo um múltiplo de  $u$  e a outra de  $v$ . Pronto.  $\square$

**Teorema C.2.2** (Teorema 2.3.4). *Sejam  $F_1, F_2 \subset F$  três subespaços de um espaço vetorial  $E$ , então são equivalentes*

$$F = F_1 \oplus F_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in F, \exists! f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \text{ tal que } f = f_1 + f_2.$$

*Demonstração.* ' $\Rightarrow$ ' Seja  $f \in F$ . Como hipótese temos duas informações, a saber (i)  $F = F_1 + F_2$  e (ii)  $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ , dando existência e unicidade.

EXISTÊNCIA: De (i) sabemos que  $f = f_1 + f_2$  para um  $f_1 \in F_1$  e um  $f_2 \in F_2$ .

UNICIDADE. Suponha que  $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$  também para um  $\tilde{f}_1 \in F_1$  e um  $\tilde{f}_2 \in F_2$ . Então  $F_1 \ni f_1 - \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 - f_2 \in F_2$ . Assim cada um lado pertence a ambos espaços, então a  $F_1 \cap F_2$  o qual segundo (ii) iguale  $\{\mathcal{O}\}$ . Como não tem outro elemento, cada um lado deve ser o vetor nulo.

' $\Leftarrow$ '  $F_1 + F_2 = F$ : A hipótese *existência* disponibiliza a primeira inclusão  $F \subset F_1 + F_2 \subset F$  e a segunda vale como  $F_1, F_2 \subset F$ .

$F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ : Seja  $f \in F_1 \cap F_2$ , a mostrar  $f = \mathcal{O}$ . Note que  $f \in F$  como  $F_1, F_2 \subset F$ . Então segundo a propriedade do vetor nulo

$$\underbrace{f}_{\in F_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_2} = f = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_1} + \underbrace{f}_{\in F_2}. \quad (\text{C.2.1})$$

Mas pela hipótese *unicidade* escrever  $f$  como soma de um elemento de  $F_1$  e um elemento de  $F_2$  é único, então  $f = \mathcal{O}$  e  $\mathcal{O} = f$ .  $\square$



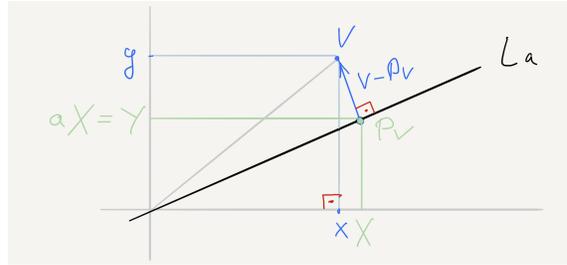


Figura C.1: Dois ângulos retângulos - usando Pitágoras duas vezes

## C.4 Transformações lineares

**Lema C.4.1** (Lema 4.3.10). *Trabalhamos no plano  $\Pi$  identificado com  $\mathbb{R}^2$  mediante um sistema ortogonal de coordenadas. A projeção ortogonal sobre a reta  $L_a$  é denotada de  $P = P_{L_a}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e dada por (4.3.2). Sua matriz é*

$$\mathbf{p}_a := [P_{L_a}] = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4.1})$$

onde  $[P_{L_a}] := [P_{L_a}]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$  denota a matriz em respeito à base canônica.

*Demonstração.* Seja  $a \in \mathbb{R}$ . Dado um elemento  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , denota sua imagem sob  $P$  de  $(X, Y) := Pv \in L_a = \{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Assim  $X$  e  $Y$  são funções de  $(x, y)$  e  $Y = aX$ . Resta determinar a função  $X(x, y)$ . Vamos provar

$$X(x, y) = \frac{1}{1+a^2} x + \frac{a}{1+a^2} y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{C.4.2})$$

Segundo o Teorema de Pitágoras a distância  $\text{dist}(\mathcal{O}, v)$  entre a origem  $\mathcal{O} = (0, 0)$  e o vetor  $v = (x, y)$  é dada por  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Assim, usando Pitágoras de novo na igualdade dois, veja Figura C.1, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \text{dist}(\mathcal{O}, v)^2 \\ &= \text{dist}(\mathcal{O}, Pv)^2 + \text{dist}(v, Pv)^2 \\ &= X^2 + (aX)^2 + (\text{comprimento}^2 \text{ do vetor } v - Pv = (x - X, y - aX)) \\ &= X^2 + (aX)^2 + (x - X)^2 + (y - aX)^2 \\ &= X^2 + (aX)^2 + x^2 - 2xX + X^2 + y^2 - 2aYX + a^2X^2 \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$X(x, y)^2(1+a^2) = X(x, y)(x+ay).$$

**Caso**  $X(x, y) \neq 0$ . Divida por  $X(x, y)$  e  $1+a^2$  para obter (C.4.2).

**Caso**  $X(x, y) = 0$ . Então  $Y(x, y) = aX(x, y) = 0$  e assim  $Pv = (X, Y) = \mathcal{O}$ .

Como a projeção é ortogonal o ponto  $v$  deve ser localizado na reta  $(L_a)_{\mathcal{O}}^{\perp}$  ortogonal a  $L_a$  e passando a origem. Mas esta reta resulta de  $L_a$  mediante uma rotação por  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ), em símbolos

$$(L_a)_{\mathcal{O}}^{\perp} = R_{\pi/2}L_a = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ at \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \{(-at, t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Então  $v$  é da forma  $(-at, t)$  para um  $t \in \mathbb{R}$  e tal par satisfaz (C.4.2) também.

Para concluir note-se que os coeficientes na última identidade de

$$Pe_1 = P(1, 0) = (X(1, 0), Y(1, 0)) = X(1, 0)e_1 + Y(1, 0)e_2$$

disponibiliza a primeira coluna da matriz (C.4.1) e analogamente

$$Pe_2 = X(0, 1)e_1 + Y(0, 1)e_2$$

disponibiliza a segunda coluna. Para obter os valores de  $X$  e  $Y$  nos pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  usa-se a fórmula (C.4.2).  $\square$

## C.5 Existência de subespaço invariante ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )

Nesta seção suponhamos que  $A$  é um operador linear num espaço vetorial real  $E$  de dimensão finita  $n \geq 1$ .

**Teorema C.5.1** (Teorema 8.3.1). *Um operador linear  $A$  em  $E$  admite um subespaço invariante  $F$  de dimensão 1 ou 2.*

**Definição C.5.2.** Dado um operador linear  $A \in \mathcal{L}(E)$  e um polinômio real

$$p = p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

definimos um operador linear em  $E$  assim

$$p(A) := a_0I_E + a_1A + \cdots + a_nA^n \in \mathcal{L}(E).$$

**Lema C.5.3.** *Dado  $A \in \mathcal{L}(E)$ , então existe um polinômio mônico irreduzível  $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  de grau 1 ou 2 e existe um vetor não-nulo  $v \in E$  tal que  $q(A)v = \mathcal{O}$ .*

*Demonstração.* Seja  $n = \dim E \geq 1$ , então como o espaço vetorial  $\mathcal{L}(E)$  tem dimensão  $n^2$ , veja Corolário 4.1.15, o conjunto de  $n^2 + 1$  elementos

$$\{I_E, A, A^2, \dots, A^{n^2}\}$$

é LD. Por isso existem coeficientes reais  $\alpha_i$ , não todos nulos, tal que

$$\mathcal{O} = \alpha_0I_E + \alpha_1A + \cdots + \alpha_{n^2}A^{n^2}.$$

Seja  $\alpha_m$  o coeficiente não nulo do maior índice. O caso  $m = 0$  é impossível como  $\alpha_0I_E = \mathcal{O}$  implicaria o absurdo  $I_E = \alpha_0^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}$ . Então  $m \geq 1$  e definindo  $\beta_j := \alpha_j/\alpha_m$  obtemos que

$$\mathcal{O} = \beta_0I_E + \beta_1A + \cdots + \beta_{m-1}A^{m-1} + A^m =: p(A) \in \mathcal{L}(E).$$

O correspondente polinômio real

$$p(\lambda) := \beta_0 + \beta_1x + \cdots + \beta_{m-1}x^{m-1} + x^m$$

é mônico e de grau  $m \geq 1$ . Segundo Corolário B.4.2 obtemos que

$$p = p_1 \cdots p_k$$

onde os  $p_i$  são polinômios mônicos reais irreduzíveis de grau 1 ou 2. Como

$$\mathcal{O} = p(A) = p_1(A) \cdots p_k(A)$$

pelo menos um dos operadores na direita não é invertível, dizemos  $p_i(A)$ . (Caso contrário o operador nulo  $\mathcal{O}$  é invertível – absurdo.) Daí  $q(A) := p_i(A): E \rightarrow E$  não é bijetivo, assim não injetivo, ou seja  $N(q(A)) \neq \{\mathcal{O}\}$ .  $\square$

*Demonstração de Teorema C.5.1 (Existe subespaço invariante de dim. 1 ou 2).* Dado  $A \in \mathcal{L}(E)$ , segundo Lema C.5.3 existe um polinômio mônico irreduzível  $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  de grau 1 ou 2 e existe um vetor não-nulo  $v \in E$  tal que

$$\mathcal{O} = q(A)v. \quad (*)$$

**Caso  $q$  tem grau 1.** Então  $q$  é da forma  $q(x) = x - \lambda$  para um  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Daí segue de (\*) que  $\mathcal{O} = q(A)v = (A - \lambda I_E)v = Av - \lambda v$ . Por linearidade de  $A$  a reta  $F := \mathbb{R}v$  é um subespaço invariante por  $A$ .

**Caso  $q$  tem grau 2.** O polinômio é da forma  $q(x) = x^2 + \alpha x + \beta$  para constantes  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  onde  $\beta \neq 0$  como  $q$  é irreduzível (no caso contrário  $q(x) = x(x + a)$  é redutível). Então

$$\mathcal{O} \stackrel{(*)}{=} q(A)v = AA v + \alpha A v + \beta v. \quad (**)$$

Se  $Av = \mathcal{O}$  obtemos a contradição  $\mathcal{O} = \beta v$ .

•  $\{v, Av\}$  é LI: Suponha por absurdo que  $Av = \mu v$  para um  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Então obtemos que

$$\mathcal{O} \stackrel{(**)}{=} \mu^2 v + \alpha \mu v + \beta v = \underbrace{(\mu^2 + \alpha \mu + \beta)}_{=q(\mu)} \underbrace{v}_{\neq \mathcal{O}} \Rightarrow q(\mu) = 0$$

mas um polinômio irreduzível de grau 2 não pode ter uma raiz real.

• O subespaço  $F$  gerado por  $\{v, Av\}$  tem dimensão 2 e é invariante por  $A$ : Como  $A$  é linear é suficiente mostrar  $Av \in F$  e  $A(Av) \in F$ . Com efeito

$$Av \in F, \quad A(Av) \stackrel{(**)}{=} -\alpha(Av) - \beta v \in F.$$

Isso finaliza a prova de Teorema C.5.1. □

## C.6 Projeção ortogonal

Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno e  $F$  um subespaço.

**Teorema C.6.1** (Teorema 9.5.7 – Projeção ortogonal (9.5.3)).

1.  $\text{pr}_F$  é linear e bem definido (independente da base ON  $\mathcal{Y}$ ).
2.  $(\text{pr}_F)^2 = \text{pr}_F$ .
3.  $\text{Im}(\text{pr}_F) = \text{Fix}(\text{pr}_F)$  e  $E = \text{Im}(\text{pr}_F) \oplus \text{N}(\text{pr}_F)$ .
4.  $\text{Im}(\text{pr}_F) = F$ .
5.  $\text{pr}_F|_F = I_F \in \mathcal{L}(F)$ .
6.  $w := (v - \text{pr}_F v) \perp f \quad \forall f \in F$ .
7.  $\forall v \in E$  vale<sup>2</sup>  $\text{dist}(v, F) := \inf_{f \in F} \underbrace{\text{dist}(v, f)}_{:=|v-f|} = |v - \text{pr}_F v|$ .

*Demonstração.* Sejam  $k \leq n$  as dimensões de  $F \subset E$ . 1. O axioma (BL) causa linearidade. Sejam  $\mathcal{Y} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$  e  $\tilde{\mathcal{Y}} = \{\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_k\}$  bases ONs de  $F$ . Escrevemos os vetores  $\tilde{\varepsilon}_j \in F$  na base  $\mathcal{Y}$  de  $F$  com coeficientes  $\alpha_{ij}$ , em símbolos

$$\tilde{\varepsilon}_j = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \alpha_{ij}, \quad \text{note que } \langle \varepsilon_i, \tilde{\varepsilon}_j \rangle = \alpha_{ij},$$

onde  $j = 1, \dots, k$ . Conforme Proposição 9.5.5 podemos estender a base ON  $\mathcal{Y}$  de  $F$  tal que obtemos uma base ON  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n\}$  de  $E$ . Usando a mesma extensão obtemos a base ON  $\tilde{\mathcal{Z}} := \{\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n\}$  de  $E$ . Escrevendo  $v \in E$  na base  $\tilde{\mathcal{Z}}$  de  $E$  na forma

$$v = \sum_{j=1}^k \tilde{\varepsilon}_j \tilde{v}_j + \sum_{J=k+1}^n \varepsilon_J v_J \quad (\text{C.6.1})$$

e abreviamos  $\sum_i = \sum_{i=1}^k$  para chegamos no nosso destino assim

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \langle \varepsilon_i, v \rangle \varepsilon_i &= \sum_i \left\langle \varepsilon_i \sum_j \tilde{\varepsilon}_j \tilde{v}_j + \sum_{J=k+1}^n \varepsilon_J v_J \right\rangle \varepsilon_i \\ &\stackrel{(\text{BL})}{=} \sum_i \left( \sum_j \underbrace{\langle \varepsilon_i, \tilde{\varepsilon}_j \rangle}_{\alpha_{ij}} \tilde{v}_j + \sum_{J=k+1}^n \underbrace{\langle \varepsilon_i, \varepsilon_J \rangle}_0 v_J \right) \varepsilon_i \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} \tilde{v}_j \varepsilon_i \\ &= \sum_j \tilde{v}_j \tilde{\varepsilon}_j \\ &\stackrel{(9.3.2)}{=} \sum_{j=1}^k \langle \tilde{\varepsilon}_j, v \rangle \tilde{\varepsilon}_j. \end{aligned}$$

<sup>2</sup> como  $\dim F < \infty$  um ínfimo é um mínimo

2. Dado  $v \in E$ , use a definição (9.5.3) duas vezes para obter

$$\begin{aligned} \text{pr}_F(\text{pr}_F v) &= \sum_{j=1}^k \left\langle \varepsilon_j, \sum_{i=1}^k \langle \varepsilon_i, v \rangle \varepsilon_i \right\rangle \varepsilon_j \\ &= \sum_{i,j=1}^k \langle \varepsilon_i, v \rangle \underbrace{\langle \varepsilon_j, \varepsilon_i \rangle}_{\delta_{ij}} \varepsilon_j \\ &= \sum_{i,j=1}^k \langle \varepsilon_i, v \rangle \varepsilon_i \stackrel{\text{def.}}{=} \text{pr}_F v. \end{aligned}$$

3. Lema 7.1.2.

4. “C” Óbvio. “D” Escreve  $f \in F$  como CL na base ON  $\mathcal{Y}$ , ou seja

$$\begin{aligned} f &= f_1 \varepsilon_1 + \cdots + f_k \varepsilon_k \stackrel{\text{ON}}{=} f_1 \sum_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_i + \cdots + f_k \sum_i \langle \varepsilon_i, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_i \\ &= f_1 \text{pr}_F \varepsilon_1 + \cdots + f_k \text{pr}_F \varepsilon_k \\ &\stackrel{\text{lin.}}{=} \text{pr}_F (f_1 \varepsilon_1 + \cdots + f_k \varepsilon_k) \\ &= \text{pr}_F f \in \text{Im}(\text{pr}_F). \end{aligned}$$

5. São exatamente os pontos fixos  $\text{Fix}(\text{pr}_F) \stackrel{3.}{=} \text{Im}(\text{pr}_F) \stackrel{4.}{=} F$  nos quais uma aplicação age como a identidade.

6. Escrevendo  $v \in E$  na forma (C.6.1) obtemos

$$v - \text{pr}_F v = \sum_j \varepsilon_j v_j + \sum_J \varepsilon_J v_J - \sum_j \underbrace{\langle \varepsilon_j, v \rangle}_{v_j} \varepsilon_j = \sum_J \varepsilon_J v_J.$$

Escrevendo  $f \in F$  na forma  $f = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i f_i$  obtemos

$$\langle v - \text{pr}_F v, f \rangle = \sum_{J=k+1}^n \sum_{i=1}^k v_J \underbrace{\langle \varepsilon_J, \varepsilon_i \rangle}_0 f_i = 0.$$

7. Dado  $v \in E$  e  $f \in F$ , definindo  $w := v - \text{pr}_F v$  e  $\tilde{f} := \text{pr}_F v - f \in F$  obtemos que  $v - f = w + \tilde{f}$ . Como  $w \perp \tilde{f}$  segundo item 6 o Pitágoras generalizado diz

$$|v - f|^2 \stackrel{(9.3.3)}{=} |v - \text{pr}_F v|^2 + |\text{pr}_F v - f|^2 \geq |v - \text{pr}_F v|^2.$$

Assim  $\inf_{f \in F} |v - f| \geq |v - \text{pr}_F v|$ . Mas a desigualdade oposta vale também porque  $\text{pr}_F v$  é elemento de  $F$ .  $\square$

**Exercício C.6.2** (Exercício 9.6.2). Seja  $X \subset E$  um subconjunto não-vazio.

(i) O complemento ortogonal  $X^\perp$  é um subespaço de  $E$ .

- (ii) Ou  $X^\perp$  é disjunto a  $X$ , ou  $X^\perp \cap X = \{\mathcal{O}\}$ .
- (iii)  $Y \subset X \Rightarrow X^\perp \subset Y^\perp$ .
- (iv)  $X^\perp = \langle X \rangle^\perp$ .

*Solução.* (i) A condição para um  $v \in E$  de ser elemento de  $X^\perp$  é linear. Consequentemente  $X^\perp$  é fechado sob adição e multiplicação linear.

(ii) Caso  $X \cap X^\perp = \emptyset$ : Este caso aparece, por exemplo  $X = \{x\}$  onde  $x \neq \mathcal{O}$ .

Caso  $X \cap X^\perp \neq \emptyset$ : Seja  $y \in X \cap X^\perp$ . Como  $y \in X^\perp$  vale que  $\langle x, y \rangle = 0 \forall x \in X$ . Escolha  $x = y \in X$  para obter  $0 = \langle y, y \rangle$ , assim  $y = \mathcal{O}$  segundo axioma ((POS)).

(iii) Dado  $v \in X^\perp$ , então  $\langle v, x \rangle = 0 \forall x \in X$ . Obviamente esta condição é satisfeita para os elementos  $y$  de um subconjunto  $Y$  de  $X$ .

(iv) “ $\subset$ ” Seja  $v \in X^\perp$ , então  $\langle v, x \rangle = 0 \forall x \in X$ . Mas esta condição é linear em  $x$  e por isso fica válida para combinações lineares em  $X$ . ” $\supset$ ” Item (iii) para a inclusão  $X \subset \langle X \rangle$ .  $\square$

## C.7 Operadores ortogonais

**Teorema C.7.1** (Teorema 12.2.1). *Para  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  são equivalente*

- (i)  $|Av| = |v| \forall v \in E$ ; “A preserva norma”
- (ii)  $|Au - Av| = |u - v| \forall u, v \in E$ ; “A preserva distância”
- (iii)  $\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \forall u, v \in E$ ; “A preserva produto interno”
- (iv)  $A^*A = I_E$ ; “ $A^*$  é inversa à esquerda de  $A$ ”
- (v)<sub>1</sub> a matriz  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}$  é ortogonal para todas bases ONs  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ ;
- (v)<sub>2</sub> a matriz  $[A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}$  é ortogonal para um certo par de bases ONs  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ ;
- (vi)<sub>1</sub> A leva uma certa base ON  $\mathcal{X}$  de  $E$  num subconjunto ON de  $F$ ;
- (vi)<sub>2</sub> A leva todas bases ONs  $\mathcal{X}$  de  $E$  em subconjuntos ONs de  $F$ .

*Demonstração.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Linearidade de  $A$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii).  $\langle Au, Av \rangle = \frac{1}{2} (|Au|^2 + |Av|^2 - |Au - Av|^2)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv).  $\langle u, v \rangle = \langle Au, Av \rangle = \langle A^*Au, v \rangle \forall u, v \Rightarrow A^*A = I_E$  (Le. 9.1.3)

(iv)  $\Rightarrow$  (v)<sub>1</sub>.  $A^*A = I_E \Rightarrow \mathbf{a}^t \mathbf{a} = \mathbf{1}_n$  (Teor. 10.1.11)  $\Rightarrow \mathbf{a}$  ortogonal (Le. 12.1.3)

(v)<sub>1</sub>  $\Rightarrow$  (v)<sub>2</sub>. Trivial.

(v)<sub>2</sub>  $\Rightarrow$  (vi)<sub>1</sub>. Sejam  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  e  $\mathcal{Y} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$  bases ONs tal que a matriz  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}$  é ortogonal. Então

$$\langle A\xi_i, A\xi_j \rangle \stackrel{[A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}}{=} \left\langle \sum_{k=1}^m \eta_k a_{ki}, \sum_{\ell=1}^m \eta_\ell a_{\ell j} \right\rangle \stackrel{\mathcal{Y} \text{ ON}}{=} \sum_{k=1}^m \underbrace{a_{ki}}_{(\mathbf{a}^t)_{ik}} a_{kj} = (\mathbf{a}^t \mathbf{a})_{ij} = \delta_{ij}.$$

(vi)<sub>1</sub>  $\Rightarrow$  (vi)<sub>2</sub>. Seja  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base ON de  $E$  tal que  $X := A\mathcal{X}$  é um subconjunto ON de  $F$ . Seja  $\mathcal{X}'$  qualquer base ON de  $E$  e seja  $\mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{X}', \mathcal{X}}$  a matriz de passagem de  $\mathcal{X}'$  para  $\mathcal{X}$ , veja (5.3.1). Vale  $\mathbf{p} \in O(n)$  segundo Exc. 12.1.7. Do fato que

$$A\xi'_i \stackrel{(5.3.1)}{=} A \sum_{k=1}^n \xi_k p_{ki} = \sum_{k=1}^n (A\xi_k) p_{ki}$$

obtemos que

$$\langle A\xi'_i, A\xi'_j \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n p_{ki} p_{\ell j} \langle A\xi_k, A\xi_\ell \rangle = \sum_{k=1}^n \underbrace{p_{ki}}_{(\mathbf{p}^t)_{ik}} p_{kj} = (\mathbf{p}^t \mathbf{p})_{ij} = \delta_{ij}.$$

(vi)<sub>2</sub>  $\Rightarrow$  (i) Seja  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base ON de  $E$ . Escrevemos  $v \in E$  na base  $\mathcal{X}$  como  $v = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n$ . Da hipótese  $\langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}$  obtemos que  $|v|^2 = \langle v, v \rangle = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2$ . Como o conjunto  $A\mathcal{X}$  é ON pela hipótese obtemos que  $|Av|^2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle A\xi_i, A\xi_j \rangle = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2$ .  $\square$

## C.8 Formas bilineares

**Teorema C.8.1** (Teorema 14.1.4). *Seja  $\mathbf{b} \in \mathfrak{B}(E \times F, \mathbb{K})$ . Seja  $\mathbf{p} = [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$  a matriz de passagem entre bases de  $E$  e  $\mathbf{q} = [I_F]_{\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}}$  entre bases de  $F$ . Então*

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{p}^t \mathbf{b} \mathbf{q} = \mathbf{p}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{q} \text{ caso } \mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}} \text{ s\~ao bases ONs}$$

onde  $\tilde{\mathbf{b}} = [\mathbf{b}]_{\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{V}}}$  e  $\mathbf{b} = [\mathbf{b}]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$ .

*Demonstra\~ao.* Sejam  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  e  $\tilde{\mathcal{U}}$  bases de  $E$  e sejam  $\mathcal{V} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$  e  $\tilde{\mathcal{V}}$  bases de  $F$ . Ent\~ao vale que

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{ij} &:= \mathbf{b}(\tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_j) \\ &= \mathbf{b}\left(\sum_{r=1}^n \xi_r p_{ri}, \sum_{s=1}^m \eta_s q_{sj}\right) \\ &= \sum_{r,s} p_{ri} q_{sj} \mathbf{b}(\xi_r, \eta_s) \\ &= \sum_{r,s} p_{ri} q_{sj} b_{rs} \\ &= \sum_{r,s} (p^t)_{ir} b_{rs} q_{sj} \\ &= (\mathbf{p}^t \mathbf{b} \mathbf{q})_{ij}. \end{aligned}$$

A matriz de passagem entre bases ONs \u00e9 ortogonal  $\mathbf{p}^t = \mathbf{p}^{-1}$  (Exc. 12.1.6).  $\square$



# Apêndice D

## Vários – Allerlei

### D.1 Teorema de adição de seno e coseno

**Teorema D.1.1** (Teorema de adição). *Para<sup>1</sup> todos os reais  $\theta$  e  $\varphi$  vale*

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \varphi) &= \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi, \\ \sin(\theta + \varphi) &= \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi.\end{aligned}\tag{D.1.1}$$

*Escrevendo  $\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}$  as duas fórmulas tomam a forma*

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ \sin \theta &= 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}.\end{aligned}\tag{D.1.2}$$

*Demonstração.* Pela fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  obtemos que

$$\begin{aligned}&\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi) \\ &= e^{i(\theta + \varphi)} \\ &= e^{i\theta} e^{i\varphi} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i (\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi).\end{aligned}$$

Agora só precisa-se comparar as partes reais e as partes imaginárias. □

---

<sup>1</sup>Ap. D de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 11 de julho de 2024



# Referências Bibliográficas

- [Art91] Michael Artin. *Algebra*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [EHH<sup>+</sup>92] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, and R. Remmert. *Zahlen*, volume 1 of *Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1992. Edited and with an introduction by K. Lamotke.
- [Hir21] Oliver Hirsch. Die Psychologie der Gedankenkontrolle, des Mentizids und der Gehirnwäsche. [Zugang pdf](#), January 2021.
- [Koe85] Max Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Grundwissen Mathematik 2. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, Zweite Auflage,
- [Lan93] Serge Lang. *Algebra*. 3rd ed. Reading, MA: Addison Wesley, 1993.
- [Lim05] Elon Lages Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Segunda Edição, 2005.
- [Lim11] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Oitava Edição, 2011.
- [Mee56] Joost A.M. Meerloo. *The Rape of the Mind. The Psychology of Thought Control, Menticide, and Brainwashing*. 1956. [access pdf](#).
- [Pul12] Petronio Pulino. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. Notas da Aula, UNICAMP, 2012. Acessível no site [www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA](http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA).
- [Sal19] Dietmar A. Salamon. *Análise em dimensões superiores*. Tradução de J. Weber de Alemão para Português. 2019. ix+376p. [pdf](#)
- [San12] Reginaldo J. Santos. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. Manuscrito, UFMG, 03 2012.



# Índice Remissivo

- $A > 0$  operador positivo, 148  
 $A \geq 0$  operador não-negativo, 148  
 $A|_F$  restrição de  $A \in (X)$ , 98  
 $A^*$  adjunta, 136  
 $A^\dagger$  adjunta complexa, 167  
 $A^{-1}$  inversa, 46, 81  
 $Av := A(v)$  operador linear, 43  
 $A = \mathcal{A}(n)$  matrizes anti-simétricas, 28, 39, 140  
 $\sqrt{A}$  raiz quadrada positiva de  $A > 0$ , 149  
 $A_f^B = A_f \in \mathcal{L}(E, F)$ , 47  
 $AX := \{Ax \mid x \in X\}$  imagem do conjunto  $X$  sob  $A$ , 75  
 $\mathfrak{B}(E \times F, \mathbb{K})$  espaço das formas bilineares, 171  
 $\mathfrak{B}^{a/sim}(E \times E, \mathbb{K})$  anti/simétricas, 173  
 $\mathfrak{b}(u, v)$  forma bilinear, 171  
 $\mathfrak{b}_{u,v} = [\mathfrak{b}]_{u,v}$  matriz da forma bilinear  $\mathfrak{b}$ , 171  
 $\mathfrak{b}_u = [\mathfrak{b}]_u$  matriz da forma bilinear  $\mathfrak{b}$ , 171  
 $\mathbb{C} \ni c = \alpha + i\beta$  números complexos, 165  
 $C^0(\mathbb{R})$  funções contínuas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 24  
 $C^k(\mathbb{R})$  funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis, 24  
 $C^\infty(\mathbb{R})$  funções suaves  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 24  
 CL combinação linear, 18  
 $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  espaço vetorial, 13  
 $E_\lambda$  autosubespaço, 99  
 $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\}$  base canônica, 15, 26, 30  
 $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$  base canônica, 15, 26, 30  
 $\mathcal{E}^{m \times n} := \{e^{ij}\}_{i,j}$  base canônica, 30  
 Esp-col( $\mathbf{a}$ ), 17, 180  
 $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K}\}$ , 17  
 $\mathcal{F}(\mathbb{K}) := \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ , 17  
 Fix( $r$ ) conjunto dos pontos fixos, 90  
 aFix( $r$ ) conjunto dos pontos anti-fixos, 90  
 $(G, *)$  grupo, 8  
 $H_\alpha$  hiperplano no  $\mathbb{R}^n$ , 24, 31, 85  
 ind( $\mathfrak{q}$ ) índice da forma quadrática  $\mathfrak{q}$ , 176  
 Im( $A$ ) imagem, 75  
 Im( $\alpha + i\beta$ ) :=  $\beta$  parte imaginário, 165  
 $I = I_E$  operador identidade, 45  
 $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  corpo, 9  
 $\mathbb{K}v$  reta passando  $v$  e  $\mathcal{O}$ , 24  
 LI/LD linearmente in/dep., 19  
 $\mathcal{L}(E, F)$  operadores lineares, 45  
 $\mathcal{L}(E)$  operadores lineares em  $E$ , 45  
 $M(m \times n; \mathbb{K})$  matrizes  $m \times n$ , 16, 30  
 $M(m \times n)$  matrizes reais  $m \times n$ , 16, 179  
 $M(n; \mathbb{K})$  matrizes quadradas, 16  
 $M(n)$  matrizes reais quadradas, 16  
 $\mathcal{A}, \mathcal{S}$  matrizes anti-/simétricas, 28, 39, 140  
 $N(A)$  núcleo, 75  
 $O(n)$  grupo ortogonal, 156  
 $\mathcal{O}$  vetor nulo, 13  
 (oe) operações elementares, 182  
 $\mathcal{P}(\mathbb{C})$  polinômios complexos, 18  
 $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  polinômios sobre  $\mathbb{K}$ , 191  
 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  polinômios reais, 18, 31  
 $\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  polinômios reais e aqueles do grau  $\leq n$ , 24  
 $P = P_{L_a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  projeção ortogonal sobre a reta  $L_a$ , 57

- $\mathbf{p}_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  matriz da projeção ortogonal, 58  
 $P_{F,G} : E \rightarrow E$  projeção sobre  $F$ , 91  
 $\mathbf{q} = \mathbf{q}_b$  forma quadrática, 173  
 $\operatorname{Re}(\alpha + i\beta) := \alpha$  parte real, 165  
 $\mathbb{R}^n$  listas ordenadas de  $n$  reais, 15, 30  
 $\mathbb{R}^\infty$  seqüências reais, 15  
 $\mathbb{R}_0^\infty$  quase todos membros nulos, 15, 24, 30  
 $R_\theta \in \mathcal{L}(\Pi_O)$  rotação no plano, 55  
 $\mathbf{r}_\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  matriz da rotação, 56  
 $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  esfera unitária, 156  
 $\mathcal{S} = \mathcal{S}(n)$  matrizes simétricas, 28, 39, 140, 144  
 $\mathcal{S}^+(n)$  matrizes simétricas e positivas, 121  
 $S = S_{L_a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  reflexão em torno da reta  $L_a$ , 58  
 $\mathbf{s}_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  matriz da reflexão, 58  
 $S^2 = I_E : E \rightarrow E$  involução, 89  
 $S_{F,G} := P_{F,G} - P_{G,F}$  involução (ou reflexão), 94  
 $\mathcal{SC}(E) = \{(F, G) \mid F \oplus G = E\}$ , 89  
 SL sistema linear, 77, 86, 185  
 SLH sistema linear homogêneo, 34, 185, 200  
 TL transformação (ou operador) linear, 43  
 $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n = \operatorname{diag}(1, \dots, 1) \in M(n \times n; \mathbb{K})$  matriz identidade, 16, 180  
 $\forall, \exists, \exists!$  “para todos”, “existe”, “existe unicamente”, 3  
 $\operatorname{alg}_\lambda(A)$  multiplicidade algébrica, 104  
 $\rightarrow$  injetivo, 89  
 $\rightarrow$  sobrejetivo, 89  
 $:=$  “definido por”, 4  
 $\simeq$  isomorfismo, 81  
 $\langle X \rangle$  subespaço gerado por  $X$ , 25  
 $\langle v_1, \dots, v_\ell \rangle := \langle \{v_1\} \cup \dots \cup \{v_\ell\} \rangle$ , 25  
 $|X|$  número de elementos de um conjunto  $X$ , 7  
 $|\alpha|$  absoluto de um número  $\alpha$ , 3  
 $\mathbf{a} = (a_{ij})$  matriz, 16, 180  
 $\mathbf{a}^t = ((\mathbf{a}^t)_{ij} = a_{ji})$  matriz transposta, 180  
 $\mathbf{a}_{\bullet k}, \mathbf{a}_{k \bullet}$   $k$ -ésima coluna, linha, 16, 180  
 $\mathbf{a}_{\text{esc-red}}$  matriz escalonada reduzida, 183  
 $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  matriz escalonada, 182  
 $a_{ij}$   $i$ -ésima linha,  $j$ -ésima coluna, 16, 179  
 $\deg(p)$  grau do polinômio  $p$ , 191  
 $\det A$  onde  $A \in \mathcal{L}(E)$ , 68  
 $\det \mathbf{a}$  determinante da matriz quadrada  $\mathbf{a}$ , 187  
 $\operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  matriz diagonal, 97  
 $\delta_{ij}$  símbolo de Kronecker, 48  
 $e_i \in \mathbb{K}^n$   $i$ -ésimo vetor canônico, 15  
 $\mathbf{e}_{ij}^\mp = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{ij} \mp (\mathbf{e}^{ij})^t) \in \mathcal{A}/\mathcal{S}$ ,  $i \leq j$ , 39  
 $E^*$  espaço dual de  $E$ , 48  
 $\mathbf{g}_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}}$  matriz do produto interno, 120  
 $g_\lambda(A) := \dim E_\lambda$  multiplicidade geométrica, 99, 105  
 $[a, b], (a, b)$  intervalo fechado, aberto, 3  
 $[\mathbf{a} : b]$  matriz aumentada, 185  
 $[v]_{\mathcal{B}}$  vetor coordenada do vetor  $v$  na base  $\mathcal{B}$ , 33  
 $[v]_{\mathcal{B}}$  vetor coordenada do vetor  $v$  na base  $\mathcal{B}$ , 62  
 $[v] := [v]_{\mathcal{E}^m}$  na base canônica, 33  
 $[v] := [v]_{\mathcal{E}^m}$  na base canônica, 62  
 $[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$  matriz de  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , 63  
 $[A] = [A]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m}$  nas bases canôn., 51  
 $[A]_{\mathcal{U}} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{U}}$ , 63  
 $[A] := [A]_{\mathcal{E}}$  na base canônica, 63  
 $p_A(\lambda)$  caso  $\dim E = 2$ , 108  
 $p_A(\lambda)$  polinômio característico de  $A$ , 104  
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  produto euclidiano em  $\mathbb{R}^n$ , 116  
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  produto interno em  $E^*$ , 119  
 $\operatorname{posto}(A) := \dim \operatorname{Im}(A)$ , 76  
 $\operatorname{pr}_F$  projeção ortogonal sobre subespaço  $F$ , 130  
 $\operatorname{pr}_u \cdot$  projeção ortogonal sobre reta  $\mathbb{R}u$ , 126  
 $\operatorname{pc}(\mathbf{a})$  posto-coluna, 50  
 $\operatorname{pl}(\mathbf{a})$  posto-linha, 50  
 $p(A)$  polinômio do operador  $A$ , 110, 203  
 $\times, v \times w$  produto vetorial, 72  
 $\times, X \times Y$  produto cartesiano, 8

- $Y^{\times k} := Y \times \dots \times Y$ , 8, 31
- spec  $A$  espectro de  $A \in \mathcal{L}$ , 99
- $F \oplus G$  soma direta, 27
- $X + Y$  soma de subconjuntos, 27
- tr  $A$  onde  $A \in \mathcal{L}(E)$ , 69
- tr  $\mathbf{a}$  onde  $\mathbf{a} \in M(n \times n; \mathbb{K})$ , 69
- tr  $A^*B$ , 140
- tr  $\mathbf{a}^t \mathbf{b}$ , 140
- tr  $\mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii}$  traço, 40, 73
- $\dot{\cup}$  união de conjuntos disjuntos, 7
- $\hat{v}$  vetor unitário, 117
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  absoluto de  $z = a + ib$ , 10
- $\bar{z}$  complexo conjugado, 165
- $\bar{z} = a - ib$  complexo conjugado de  $z = a + ib$ , 10
- ( $\Delta$ ) desigualdade triangular, 117
- (POS) positividade, 117
- (SIM) simetria, 117
- ( $\Delta$ ) desigualdade triangular, 117
- (HOM) homogeneidade, 117
- (POS) positividade, 117
- (SIM) simetria-cc, 166
- (BL) bi-linearidade, 115
- (POS) positividade, 115, 166
- (SIM) simetria, 115
- (SL) sesquilinearidade, 166
- índice
  - de forma quadrática, 176
- absoluto
  - de um número complexo, 10
- adição
  - de funções, 17
- adjunta, 136
  - complexa  $A^\dagger$ , 167
- anel
  - de integridade, 193
  - divisores nulos, 193
  - polinomial, 192
- auto-adjunto, 143
- autovalor, 99
  - multiplicidade algébrica, 104
  - multiplicidade geométrica, 99
- autovetor, 99
- base, 29
  - canônica, 15, 26, 30
    - das matrizes  $m \times n$ , 30
  - dual, 48
  - extensão, 130
  - ordenada, 29, 46
  - ortonormal (ON), 125
- bijetivo, 46, 81
- canônico, 118
- caraterística de um corpo, 10
- combinação linear, 18
  - trivial, 18
- complemento ortogonal, 131
- complexo conjugado, 10, 165
- composição
  - de funções, 13
- comutam
  - operadores  $-$ , 143
- comutar
  - matrizes, 181
- comutativo
  - diagrama  $-$ , 61
- conjunto, 7
  - composto de elementos  $x_1, \dots, x_\ell$ , 4, 7
  - finito, 7
  - gerando um subespaço, 25
  - linearmente independente LI, 19
  - ordenado, 7
- conjuntos
  - interseção de  $-$ , 7
  - união de  $-$ , 7
- convolução, 45
- coordenadas
  - de um vetor, 33
  - no plano, 2
- corpo, 9
  - caraterística do  $-$ , 10
  - infinito, 191
- decomposição
  - de vetores, 27
- decomposição polar, 161
- Descartes, 3, 122
- determinante

- de uma matriz quadrada, 187
- de uma transformação linear, 68
- de Vandermonde, 188
- diagonalizável, 98, 102, 153
- diagonalização, 147
  - simultânea, 147
- diagrama
  - comutativo, 61
- dimensão, 30
- distância, 117
  - entre dois pontos, 118
- divisores
  - nulos, 193
- dualidade, 118
- eixo, 2
- elemento neutro
  - aditivo, 9
  - multiplicativo, 9
- escalar, 180
- escalares, 14
- espaço dual  $E^*$ , 48
- espaço métrico, 118
- espaço vetorial, 13
  - base, 29
  - com produto hermitiano, 166
  - com produto interno, 115
  - dimensão, 30
  - normado, 117
  - real ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), 49
  - subespaço, 23
  - trivial, 14
- espaço-coluna, 17, 180
- espaço-linha, 17, 180
- Euclides, 122
- extensão
  - base ON, 130
- fórmula
  - de polarização, 174
  - complexa, 168
- fechado sob uma operação, 23
- flechas
  - equipolentes, 1
- flechas equipolentes, 1
- forma
  - bilinear, 171
    - anti-simétrica, 173
    - autovalores, 173
    - simétrica, 173
  - quadrática, 173
- forma normal
  - operadores auto-adjuntos, 147
  - operadores ortogonais, 161
    - simultânea, 147
- forma quadrática
  - índice, 176
  - positiva/negativa, 175
- funções
  - adição de  $-$ , 17
  - composição de  $-$ , 13
  - multiplicação de  $-$ , 13
- funcional
  - $\mathbb{K}$ -linear, 48
  - linear, 48
    - real, 48
- Gauss-Jordan
  - calcular inversa conforme  $-$ , 187
- gráfico, 96
- Gram-Schmidt (GS), 128
- grau de um
  - polinômio, 191
- grupo, 8
  - abeliano, 9
  - ortogonal, 156
- hermitiano, 168
- hiper, 31
- hiperplano, 24, 31, 85
- homomorfismo, 43
- homotetia, 64
- imagem, 75
- independência linear, 19
- injetivo, 46, 89
- interseção de conjuntos, 7
- invariante
  - subespaço  $-$ , 98
- inversa, 81
  - à direita, 78
  - à esquerda, 80

- de um operador linear, 46
- invertível, 81
  - matriz  $-$ , 17
  - transformação linear, 46
- involução, 89
  - $S_{F,G}$ , 94
  - $S_{F,G}$  em torno de  $F$ , 94
  - linear, 92
- isometria, 155
- isomorfismo, 46, 81
  - inversa, 46
- Kronecker
  - símbolo de  $-$ , 48
- lei
  - da corte, 8
- linearidade, 43
- linearmente in/dependente, 19
- métrica, 117
  - induzida, 118
- Matemáticos
  - Jacobi, Carl Gustav Jacob, 68
  - Leibniz, Gottfried Wilhelm, 68
- matriz, 179
  - adição, 180
  - anti-/simétrica, 28, 39
  - aumentada, 185
  - complexa conjugada, 166
  - de passagem, 65
  - de passagem entre bases, 61
  - de uma forma bilinear, 171
  - de uma transformação linear, 51, 63
  - diagonalizável, 98
  - entradas da  $-$ , 16, 179
  - escalonada, 182
    - pivôs, 182
  - escalonada reduzida, 183
  - hermitiana, 166
  - identidade  $\mathbb{1}$ , 16, 180
  - invertível, 17
  - linhas e colunas, 16, 180
  - multiplicação escalar, 180
  - operações elementares numa  $-$ , 182
  - positiva, 120
  - produto  $-$ , 181
  - projeção ortogonal, 58
  - quadrada, 179
  - reflexão, 58
  - rotação, 56
  - traço de uma  $-$  quadrada, 40, 73
  - transposta  $\mathbf{a}^t$ , 180
  - triangular
    - inferior, 40
    - superior, 98
  - triangularizável, 98
  - unitária, 168
- matriz ortogonal, 155
- matrizes
  - anti-simétricas, 28, 39, 140
  - comutam, 181
  - semelhante, 67
  - simétricas, 28, 39, 140, 144
- monômios, 26
- mudança da base
  - forma bilinear, 172
- multiplicação
  - de funções, 13
- multiplicação escalar, 13
- multiplicidade
  - algébrica  $\text{alg}_\lambda$ , 105
  - geométrica  $g_\lambda$ , 99, 105
  - raíz, 194
- núcleo, 75
- número
  - complexo, 10, 165
- não-negativo
  - operador auto-adjunto  $-$ , 148
- nilpotente
  - operador  $-$ , 167
- norma, 117
  - euclidiana, 122
  - induzida, 117
- normal
  - operador  $-$ , 168

- operações elementares numa matriz, 182
- operador
  - auto-adjunto
    - não-negativo, 148
    - positivo, 148
  - hermitiano, 168
  - identidade, 45
  - normal, 140, 168
  - ortogonal, 155
  - unitário, 168
- operador (linear)
  - = transformação linear, 4
- operador linear, 43
  - auto-adjunto, 143
  - em  $E$ , 45
  - inversa, 46
- operador linear – veja **transformação linear**, 97
- operador ortogonal, 159
- ordem
  - raíz, 194
- origem, 15
- ortogonal
  - complemento –, 131
  - matriz –, 155
  - operador –, 155, 159
  - subconjunto –, 125
  - vetores, 125
- ortonormal (ON)
  - base –, 125
  - subconjunto –, 125
- par
  - de subespaços complementares, 89, 91
- parte
  - imaginária, 10
  - real, 10
- perpendicular
  - vetores, 125
- Pitágoras, 122
- pivôs, 182
- polarização, 174
  - complexa, 168
- polinômio, 18, 24, 191
  - de grau  $\leq n$ , 24
  - grau, 191
  - irredutível, 194
  - mônico, 191
  - raíz, 104
    - determinar, 108
    - multiplicidade algébrica, 194
    - ordem, 194
- polinômio característico, 104, 108
- polinômios
  - reais, 31
- ponto
  - anti-fixo, 90
  - fixo, 90
- positiva
  - matriz –, 120
- positivo
  - operador auto-adjunto –, 148
- posto
  - coluna, 50
  - linha, 50
  - matriz, 184
  - transformação linear, 76
- produto
  - cartesiano, 8, 31
  - escalar (= interno), 115
  - euclidiano, 116
  - hermitiano ( $\mathbb{C}$ -interno), 166
  - interno, 115
  - matriz, 181
  - tensorial, 172
    - anti-simétrico, 173
    - simétrico, 173
  - vetorial  $\times$ , 72
- produto interno
  - euclidiano, 122
  - induzido em  $E^*$ , 119
  - traço, 140
- projeção, 89, 91
  - $P_{F,G}$  sobre  $F$ , 91, 144
  - ortogonal, 57, 144
    - sobre reta, 126
    - sobre subespaço, 130
- projeção ortogonal
  - matriz da –, 58

- raiz de um polinômio, 104
  - determinar, 108
- raiz quadrada positiva de  $A \geq 0$ , 149
- reflexão
  - $S_{F,G}$ , 94
  - em torno de uma reta, 58
  - matriz da  $-$ , 58
- relação
  - de equivalência, 82
- restrição, 98
- Riesz
  - teorema de  $-$ , 135
- rotação, 55
  - matriz de  $-$ , 56
  - no plano, 2
- semelhante
  - matrizes  $-$ , 67
- sistema de
  - coordenadas
    - no plano, 2
- sistema de coordenadas, 62
  - Cartesianas, 3, 55
  - ortogonais, 55
- sistema linear (SL), 77, 86, 185
  - inogeneidade, 185
  - resolver “de baixo para cima”, 186
- sistema linear homogêneo (SLH), 34, 185
- sobrejetivo, 46, 89
- soma
  - de subconjuntos, 27
  - direta, 27
- spectro, 99
- subconjunto
  - ortogonal, 125
  - ortonormal (ON), 125
  - translação de  $-$ , 27
- subconjuntos
  - herdam LI, 32
  - soma de  $-$ , 27
- subespaço
  - gerado por um conjunto, 25
  - invariante, 98
  - vetorial, 23
- subespaços
  - complementares, 89, 91
  - soma direta de  $-$ , 27
- Sylvester
  - lei da inércia, 176
- teorema
  - de Riesz, 135
  - decomposição única de vetores, 27
- traço, 40, 73
  - de uma transformação linear, 69
  - matriz, 69
  - produto interno em  $M(m \times n)$ , 140
- transformação linear
  - = operador (linear), 4
  - adjunta, 136
  - auto-adjunto, 143
  - diagonalizável, 98
  - gráfico, 96
  - inversa, 81
  - invertível, 81
  - matriz de uma  $-$ , 63
  - produto, 59
  - restrição, 98
  - triangularizável, 98
- transformação linear (TL), 43
- translação, 27
- transposta, 180
- triangularizável, 98, 107
- união de conjuntos, 7
- unitária
  - matriz  $-$ , 168
- unitário
  - operador  $-$ , 168
- Vandermonde, 188
- verdade vazia, 19
- vetor
  - como coleção de flechas, 1
  - decomposição, 27
  - unitário, 117
- vetor coordenada, 33, 62
- vetor nulo, 13
- vetores, 14
  - ortogonais/perpendicular, 125