# Capítulo 12

# Operadores ortogonais

Neste[1] Capítulo 12 consideramos operadores lineares

$$A\colon E \to F$$

exclusivamente entre espaços vetoriais de dimensão finita com produtos internos

$$E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)\,, \qquad F = (F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)\,,$$

e dimensões $n = \dim E$ e $m = \dim F$. Dévido aos produtos internos o corpo sempre será $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Em vez de $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ ou $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ escrevemos geralmente $\langle\cdot,\cdot\rangle$, o contexto vai indicar do qual produto interno trata-se, aquele de $E$ ou $F$.

Vamos estudar aqueles operadores as quais *preservam o produto interno* no sentido que o produto de dois vetores é igual ao produto das imagens deles

$$\langle v, w\rangle = \langle Av, Aw\rangle$$

para todos os vetores $v, w \in E$. Tal operador $A$ é chamado de **isometria** ou, motivado pelo caso das matrizes, **operador ortogonal**.

## 12.1 Matrizes ortogonais

**Definição 12.1.1.** Uma matriz $\mathbf{u} = (u_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n)$ é chamado de **matriz ortogonal** se suas colunas $\mathbf{u}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{u}_{\bullet n} \in \mathbb{R}^m$ formam um conjunto ON.[2]

Observe que as $n$ colunas de uma matriz $m \times n$ ortogonal formam uma base ON da imagem da matriz no $\mathbb{R}^m$.

**Corolário 12.1.2.** *Para uma matriz ortogonal* $\mathbf{u} = (u_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n)$ *vale que*

(i) $n \leq m$; *mais linhas como colunas*

[1] Cap. 12 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 8 de junho de 2024

[2] como devem ter norma 1 todas as colunas de uma matriz ortogonal são não-nulas

(ii) posto$(\mathbf{u}) = n$; *posto é máximo = número de colunas*

(iii) $\mathbf{u}$ *é injetiva.* *invertível no caso quadrado $n = m$*

*Demonstração.* (i) ON e não-nulo implica que $\{\mathbf{u}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{u}_{\bullet n}\}$ é LI, daí o número $n$ de elementos deve ser menor ou igual à dimensão do espaço ambiente $\mathbb{R}^m$.
(ii) $\operatorname{posto}(\mathbf{u}) := \dim \operatorname{Im}(\mathbf{u}) = \operatorname{pc}(\mathbf{u}) = n$. (iii) Segundo o teorema de núcleo e imagem $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathrm{N}(\mathbf{u}) + \dim \operatorname{Im}(\mathbf{u})$, daí $\dim \mathrm{N}(\mathbf{u}) = 0$. □

**Lema 12.1.3.** $\mathbf{u}$ *matriz ortogonal* *colunas ON* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{u}^t\mathbf{u} = \mathbb{1}_n$

*Demonstração.* $\mathbf{u} \in \mathrm{M}(m \times n)$ ortogonal $:\Leftrightarrow$ $\langle \mathbf{u}_{\bullet j}, \mathbf{u}_{\bullet k}\rangle = \delta_{jk}$ $\forall j, k$, mas

$$\delta_{jk} = \langle \mathbf{u}_{\bullet j}, \mathbf{u}_{\bullet k}\rangle = \sum_{i=1}^m u_{ij} u_{ik} = \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}^t)_{ji} u_{ik} = (\mathbf{u}^t\mathbf{u})_{jk}.$$

□

É interessante observar que o produto matriz de duas matrizes ortogonais multiplicáveis, ou seja $\mathbf{u} \in \mathrm{M}(m \times k)$ e $\mathbf{v} \in \mathrm{M}(k \times n)$, é ortogonal também

$$(\mathbf{u}\mathbf{v})^t(\mathbf{u}\mathbf{v}) = \mathbf{v}^t \underbrace{\mathbf{u}^t\mathbf{u}}_{\mathbb{1}_k} \mathbf{v} = \mathbf{v}^t\mathbf{v} = \mathbb{1}_n.$$

### Matrizes quadradas – o grupo ortogonal

**Lema 12.1.4** (Matrizes ortogonais quadradas)**.** *Para uma matriz quadrada* $\mathbf{u} \in \mathrm{M}(n \times n)$ *são equivalente*

(i) $\mathbf{u}$ *ortogonal;*

(ii) $\mathbf{u}^{-1}$ *existe e iguale* $\mathbf{u}^t$*;*

(iii) *as colunas de* $\mathbf{u}$ *formam um conjunto ON;* $\mathbb{1}_n = \mathbf{u}^t\mathbf{u}$

(iv) *as linhas de* $\mathbf{u}$ *formam um conjunto ON;* $\mathbb{1}_n = \mathbf{u}\mathbf{u}^t$

(v) $\mathbf{u}^t$ *ortogonal.*

*Demonstração.* (i) $\Leftrightarrow$ (ii) A identidade $\mathbf{u}^t\mathbf{u} = \mathbb{1}_n$ entre matrizes *quadradas* significa que $\mathbf{u}^t$ e $\mathbf{u}$ são inversas uma da outra. (i) $\Leftrightarrow$ (iii) Definição 12.1.1
(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) Note que como $\mathbf{u}^{-1}$ existe $\mathbf{u}^t\mathbf{u} = \mathbb{1}_n \Leftrightarrow \mathbf{u}\mathbf{u}^t = \mathbb{1}_n$, mas a segunda identidade significa (analogamente à prova de Lema 12.1.3) que as linhas de $\mathbf{u}$ são todas não-nulas e formam um conjunto ON.
(iv) $\Leftrightarrow$ (v) As linhas de $\mathbf{u}$ são as colunas da transposta. □

**Exercício 12.1.5** (**O grupo ortogonal** $\mathrm{O}(n)$)**.** Mostre que o conjunto $\mathrm{O}(n)$ das matrizes ortogonais quadradas $n \times n$ munido do produto matriz é um grupo.

**Exercício 12.1.6.** Matrizes de passagem $\mathbf{p}$ entre bases ONs são ortogonais.

**Exercício 12.1.7** ($\mathrm{O}(1)$)**.** Mostre que $\mathrm{O}(1) = \{-1, +1\} = \mathbb{S}^0$ onde a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é composto dos pontos da distancia 1 da origem.

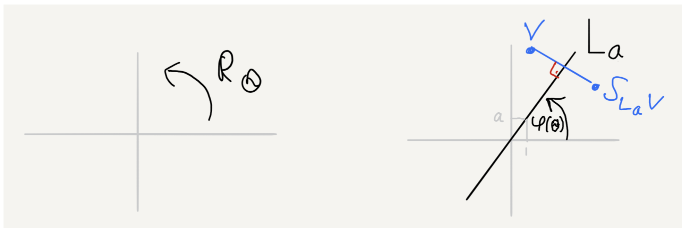


Figura 12.1: Grupo ortogonal O(2) composto de rotações e reflexões ortogonais

**Exemplo 12.1.8.** O grupo ortogonal O(2) é composto de dois círculos

$$\mathrm{O}(2) = \{\text{rotações } R_\theta\} \,\dot\cup\, \{\text{reflexões ortogonais } S_{L_a}\} = \mathbb{S}^1 \,\dot\cup\, \mathbb{S}^1 \tag{12.1.1}$$

onde $L_a$ é a reta em $\mathbb{R}^2$ passando $\mathcal{O}$ e formando o ângulo $\varphi(\theta)$ com o eixo-$x$.

Para entender (12.1.1) relembre que as duas colunas de uma matriz $2 \times 2$ ortogonal $\mathbf{u}$ são vetores unitários ortogonais. Seja $\theta \in (-\pi, \pi]$ o ângulo entre o eixo-$x$ no $\mathbb{R}^2$ e o ponto cujas coordenadas são as entradas da primeira coluna. Assim a primeira coluna é da forma $(\cos\theta, \sin\theta)$. A segunda coluna é ortogonal à primeira - mas isso deixa escolher uma de duas possibilidades como ilustrado na Figura 12.2. Assim a matriz $\mathbf{u}$ é, ou a matriz $\mathbf{r}_\theta$ de uma rotação, veja (4.3.1), ou a matriz $\mathbf{s}_{a(\theta)}$ de uma reflexão ortogonal como vamos mostrar no seguinte. Note que $\det \mathbf{r}_\theta = 1$, enquanto $\det \mathbf{s}_{a(\theta)} = -1$.

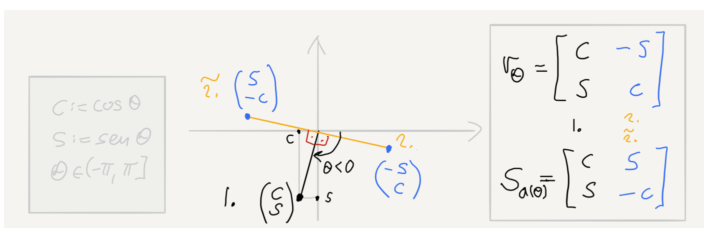


Figura 12.2: Colunas de uma matriz ortogonal são ON e descrito pelo ângulo $\theta$

Reflexão ortogonal. A matriz $\mathbf{s} = \mathbf{s}_{a(\theta)}$ é simétrica, assim auto-adjunta, e pelo Teorema Espectral tem 2 autovalores contados com multiplicidade, de fato

$$p_{\mathbf{s}}(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}\,(\mathbf{s}_\theta)\lambda + \det(\mathbf{s}_\theta) = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 1.$$

Usando o teorema da adição de seno/coseno e que $1 - \cos^2\frac{\theta}{2} = \sin^2\frac{\theta}{2}$, obtemos

$$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \overset{(\mathrm{D.1.2})}{=} \frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \tan\frac{\theta}{2}.$$

Calculação mostra que um autovetor para $\lambda = 1$ é, por exemplo, dado por

$$\xi_1 = \xi_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tan\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \qquad \xi_{-1} = \mathbf{r}_{\pi/2}\xi_1 = \begin{bmatrix} -\tan\frac{\theta}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Um autovetor para $\lambda = -1$ deve ser ortogonal a $\xi_1$ e por isso temos simplesmente aplicado a rotação. O spectro sendo $\{\pm 1\}$ e ortogonalidade dos autosubespaços já diz que trata-se de uma reflexão ortogonal sobre a reta $L$ passando $\mathcal{O} = (0,0)$ e contendo o vetor $\xi_1$ como ilustrado na Figura 12.3.

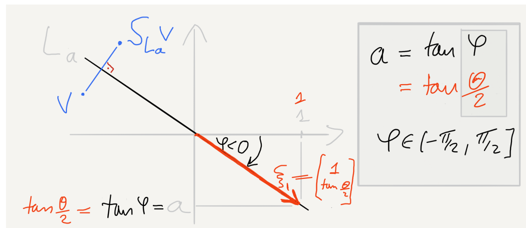


Figura 12.3: Reflexão ortogonal sobre reta $L_a := \mathbb{R}(1,a)) = \mathbb{R}\xi_1$ e ângulo $\varphi = \frac{\theta}{2}$

A reta $L$ é da forma $L_a := \mathbb{R}(1,a)$ onde $a = \tan\frac{\theta}{2}$, compare Definição 4.3.8. Seja $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$ o ângulo do eixo-$x$ para a reta $L_a$, positivo no sentido contra-horário. Note que

$$\tan\varphi = \frac{a}{1} = \tan\frac{\theta}{2}$$

o que mostra que $\varphi = \theta/2$ como ilustrado na Figura 12.4.

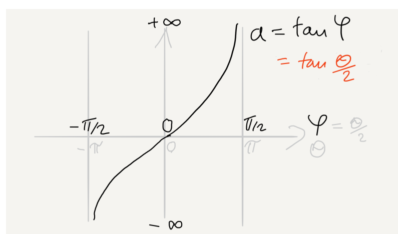


Figura 12.4: Os ângulos $\theta$ da 1ª coluna (e da rotação) e $\varphi = \theta/2$ da reta $L_a$

Relembramos a fórmula (4.3.4) da matriz $\mathbf{s}_a$ da reflexão ortogonal em torno de $L_a$. Obtemos que[3]

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} = \cos\theta, \qquad \frac{2a}{1+a^2} = \sin\theta.$$

Assim a reflexão ortogonal (4.3.4) iguale a segunda forma da matriz ortogonal

$$\mathbf{s}_a \overset{(4.3.4)}{=} \frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -(1-a^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} = \mathbf{s}_{a(\theta)}.$$

Isso conclui nossa análise do grupo ortogonal $\mathrm{O}(2) = \{\mathbf{u} \in \mathrm{M}(2) \mid \mathbf{u}^t = \mathbf{u}^{-1}\}$.

[3] Abreviando $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$, assim $a = \frac{1-c}{s}$, vale $1 + a^2 = \frac{s^2+1-2c+c^2}{s^2} = 2\frac{1-c}{s^2}$, vale $1 - a^2 = 2c\frac{1-c}{s^2}$, e vale $2a = 2\frac{1-c}{s}$

## 12.2 Operadores ortogonais

**Teorema 12.2.1.** *Para um operador $A \in \mathcal{L}(E,F)$ são equivalente*

(i) $|Av| = |v| \ \forall v \in E$; *"A preserva norma"*

(ii) $|Au - Av| = |u - v| \ \forall u, v \in E$; *"A preserva distância"*

(iii) $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle \ \forall u, v \in E$; *"A preserva produto interno"*

(iv) $A^*A = I_E$; *"$A^*$ é inversa à esquerda de $A$"*

(v)$_1$ *a matriz $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ é ortogonal para todas bases ONs $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$;*

(v)$_2$ *a matriz $[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ é ortogonal para um certo par de bases ONs $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$;*

(vi)$_1$ *o operador $A$ leva uma certa base ON $\mathcal{X}$ de $E$ num subconjunto ON de $F$;*

(vi)$_2$ *o operador $A$ leva todas bases ONs $\mathcal{X}$ de $E$ em subconjuntos ONs de $F$.*

*Demonstração.* Teorema C.7.1 □

**Definição 12.2.2.** Chama-se $A \in \mathcal{L}(E,F)$ um **operador ortogonal** se $A$ satisfaz uma (portanto todas as) afirmações de Teorema 12.2.1.

### Operadores em *E*

**Lema 12.2.3.** *$A \in \mathcal{L}(E)$ ortogonal $\Leftrightarrow$ $A^* = A^{-1}$.*

*Demonstração.* '$\Rightarrow$' Existência de uma inversa a esquerda de $A$ ($A^*A = I_E$) $\Leftrightarrow$ $A$ injetivo (Teorema 6.3.6) $\Leftrightarrow$ $A$ sobrejetivo (Corolário 6.5.2 como domínio e co-domínio são iguais) $\Leftrightarrow$ existência de uma inversa a direita de $A$ (Teorema 6.2.3). Pela Definição 6.4.1 a inversa de $A$ existe e é igual $A^*$. '$\Leftarrow$' (iv) é trivial. □

**Lema 12.2.4.** *Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ ortogonal, então*

a) $\lambda \in \operatorname{spec} A \Rightarrow \lambda \in \{-1, +1\}$; *"$\operatorname{spec} A = \emptyset$ é possível: $A = R_{90^\circ}$"*

b) $E_{-1} \perp E_1$. *"$E_{\pm 1} = \{\mathcal{O}\}$ é possível: $A = R_{90^\circ}$"*

*Demonstração.* a) Suponha que $Av = \lambda v$ onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in E$ não-nulo. Então segundo Teorema 12.2.1 (i) obtemos $|v| = |Av| = |\lambda v| = |\lambda| \cdot |v|$. Daí $|\lambda| = 1$.
b) Dado $u \in E_1$ e $v \in E_{-1}$, então segundo Teorema 12.2.1 (iii) obtemos que $\langle u, v\rangle = \langle Au, Av\rangle = \langle u, -v\rangle = -\langle u, v\rangle$. □

**Lema 12.2.5.** *Seja $F \subset E$ um subespaço invariante por $A \in \mathcal{L}(E)$.*

a) *$A$ ortogonal $\Rightarrow AF^\perp \subset F^\perp$ e a restrição $A|\colon F^\perp \to F^\perp$ é ortogonal.*

b) *$A$ invertível $\Rightarrow A^{-1}F \subset F$.*

*Demonstração.* a) Como $A$ é injetivo, a restrição $A|\colon F \to F$ é injetiva e por isso sobrejetiva (Corolário 6.5.2), daí bijetiva. Assim para todo $f \in F$ existe $h_f \in F$ tal que $Ah_f = f$. Dado $g \in F^\perp$, vale que

$$\langle Ag, f\rangle = \langle Ag, Ah_f\rangle \overset{\text{Teor.(iii)}}{=} \langle g, h_f\rangle = 0.$$

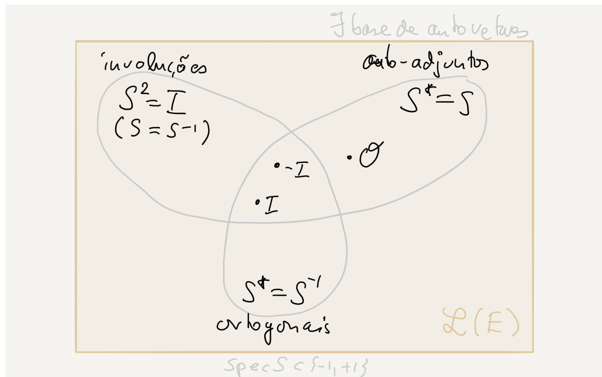


Figura 12.5: Na interseção estão as reflexões ortogonais $S_{E_1,E_{-1}}$ e $S_{E_{-1},E_1}$

Como isso vale $\forall f \in F$ segue $Ag \in F^\perp$. Para $f \in F^\perp$ vale $|A|f| = |Af| = |f|$.
b) Como em parte a) concluímos que a restrição $A|\colon F \to F$ é um isomorfismo. Assim para todo $f \in F$ existe $h_f \in F$ tal que $Ah_f = f$, ou seja $A^{-1}f = h_f \in F$. Dado $f \in F$, então para todos os $g \in F^\perp$ vale que

$$\langle A^{-1}f, g\rangle = \langle \underbrace{h_f}_{F}, \underbrace{g}_{F^\perp} \rangle = 0.$$

Isso prova que $A^{-1}f \in (F^\perp)^\perp = F$. □

**Comentário 12.2.6.** Seja $S \in \mathcal{L}(E)$. Como ilustrado na Figura 12.5 duas das três propriedades seguintes implicam a terceira

(i) $S^2 = I$; $(\Leftrightarrow S = S^{-1})$ "involução"

(ii) $S^* = S$; "auto-adjunto"

(iii) $S^* = S^{-1}$. "ortogonal"

## Caso dim $E = 2$

**Comentário 12.2.7** (Operadores ortogonais na $\dim E = 2$)**.** Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ ortogonal. Então o spectro de $A$ é da forma $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{-1,1\}$, ou $\emptyset$.

**a) Caso spec $A = \{1\}$.** Neste caso $A = \mathrm{I}_E$.
Para ver isso, observe que segundo hipótese existe $\xi \neq \mathcal{O}$ tal que $A\xi = 1 \cdot \xi$. O complemento ortogonal do subespaço $F := \langle \xi \rangle$ é de dimensão 1 como $\dim E = 2$. Pegue $\eta \in F^\perp$ tal que $|\eta| = 1$. Como $A\eta \in F^\perp$ (Le. 12.2.5), como $F^\perp = \langle \eta \rangle$, e como $|A\eta| = |\eta| = 1$ segue que $A\eta = \pm\eta$. Como spec $A = \{1\}$ deve ser $A\eta = \eta$. Como $\xi \perp \eta$ o conjunto $\{\xi, \eta\}$ forma uma base de $\mathbb{R}^2$. Daí $A = I_E$.

**b) Caso spec $A = \{-1\}$.** Neste caso $A = -I_E$. Análogo caso a).

**c) Caso spec $A = \{-1, 1\}$.** Neste caso $A$ é uma reflexão ortogonal.
Segundo hipótese existem vetores unitários tal que $A\xi = \xi$ e $A\eta = -\eta$ e $\xi \perp \eta$

segundo Lema 12.2.4. Assim $A$ é a reflexão ortogonal em torno da reta $\langle\xi\rangle$. A matriz do operador $A$ em respeito à base ON $\mathcal{B} = \{\xi, \eta\}$ é $[A]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}[1, -1]$.

**d) Caso spec $\boldsymbol{A = \emptyset}$.** Neste caso $A$ é uma rotação.
Escolha uma base ON $\mathcal{X}$ de $E$. Então $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X}}$ é uma matriz ortogonal. Das duas opções $\mathbf{r}_\theta$ e $\mathbf{s}_\theta$ na Figura 12.2 só a matriz da rotação com $\theta \notin \mathbb{Z}\pi$ é possível porque as outras matrizes são simétricas e por isso possuem autovalores.

## Forma normal para operadores ortogonais

**Teorema 12.2.8** (Forma normal de operadores ortogonais)**.** *Para $A \in \mathcal{L}(E)$ ortogonal existe uma base ON $\mathcal{X}$ de $E$ tal que a matriz de $A$ é da forma bloco*

$$[A]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_k &&&& \\ & -\mathbb{1}_\ell &&& \\ && \mathbf{r}_{\theta_1} && \\ &&& \ddots & \\ &&&& \mathbf{r}_{\theta_r} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{r}_{\theta_j} = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j, \end{bmatrix} \tag{12.2.1}$$

*onde todas outras entradas são* $0$ *e* $k, \ell, r \geq 0$ *satisfazem* $k+\ell+2r = n = \dim E$.

*Demonstração.* O subespaço $F := E_1 \oplus E_{-1}$ é invariante por $A$. (Permitimos excepcionalmente $E_1 = \{\mathcal{O}\}$ e $E_{-1} = \{\mathcal{O}\}$.) Por isso $F^\perp$ também é invariante por $A$ e a restrição $A|\colon F^\perp \to F^\perp$ é ortogonal (Lema 12.2.5). Escolha bases ONs $\mathcal{X}_1 = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ de $E_1$ e $\mathcal{X}_{-1} = \{\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_{k+\ell}\}$ de $E_{-1}$.

Como $F^\perp$ não contem um subespaço invariante por $A$ da dimensão 1, ele deve conter um subespaço $G$ invariante por $A$ da dimensão 2 segundo Teorema C.5.1. Escolha uma base ON $\mathcal{Z}_1 = \{\xi_1, \eta_1\}$ de $G$. Como $A| \in \mathcal{L}(G)$ é ortogonal e $\mathit{dim}\, G = 2$ o Comentário 12.2.7 d) aplica e a matriz $\mathbf{r}_{\theta_1} := [A|]_{\mathcal{Z}_1}$ é uma rotação por um angulo $\theta_1 \notin \mathbb{Z}\pi$.
Agora consideramos o complemento ortogonal $G^\perp$ de $G$ em $F^\perp$ e repetimos o argumento obtendo $\mathbf{r}_{\theta_2}$. Como em cada uma iteração a dimensão diminui por 2 o processo vai terminar depois um numero finito $r \geq 0$ de iterações.

A base ON desejada é $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_{-1} \cup \mathcal{Z}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{Z}_r$. □

**Corolário 12.2.9.** *No caso de* $\dim E$ *ímpar todo operador ortogonal $A$ em $E$ possui pelo menos um autovalor, em símbolos* $\emptyset \neq \operatorname{spec} A \subset \{-1, +1\}$.

## 12.3 Decomposição polar

Vamos generalizar a representação polar de um numero complexo não-nulo $z = pe^{i\theta}$ como o produto da distancia $p > 0$ da origem e a rotação do eixo-$x$ pelo angulo $\theta$, uma transformação linear ortogonal.

**Teorema 12.3.1** (Decomposição polar)**.** *Seja $A \in \mathcal{L}(E)$. Então existem um operador ortogonal $U$ em $E$ e únicos operadores $P, P' \geq 0$ em $E$ tal que*

$$A = PU, \quad P = \sqrt{AA^*}, \qquad A = UP', \quad P' = \sqrt{A^*A}.$$

*Se $A$ é invertível, então $P, P' > 0$ ainda são positivos, assim invertíveis, e consequentemente $U$ é único.* $U = P^{-1}A = A(P')^{-1}$

*Demonstração.* Existência. Dado $A \in \mathcal{L}(E)$, segundo o Teorema 11.5.1 (dos valores singulares) existem duas bases ONs $\mathcal{X} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ e $\mathcal{Y} = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ de $E$ e números $\sigma_k \geq 0$ tal que $A\xi_k = \sigma_k \eta_k$ para $k = 1, \ldots, n$.[4] Definimos três transformações lineares $P, U, P' \colon E \to E$ através de seus valores numa base

$$P\eta_k := \sigma_k \eta_k, \qquad U\xi_k := \eta_k, \qquad P'\xi_k := \sigma_k \xi_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Como as bases $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são ONs os operadores $P = P^*$ e $P' = (P')^*$ são auto-adjuntos (Teorema 11.3.3). Como os seus autovalores $\sigma_k$ são não-negativos obtemos que $P \geq 0$ e $P' \geq 0$ são não-negativos (Teorema 11.4.3). Como $U$ leva uma base ON num conjunto ON o operador $U$ é ortogonal segundo Teorema 12.2.1 $(\mathrm{v})_1$.

Unicidade de $P$ e de $P'$. Como $A = PU$ obtemos $A^* = U^*P^* = U^*P$, e assim $AA^* = PUU^*P = P^2$ porque $U$ é ortogonal. Agora o requerimento de não negatividade faz $P$ único (Teorema 11.4.6). Analogamente para $P'$.

Caso $A$ invertível. Neste caso $P = AU^{-1}$ é invertível, assim $P > 0$ segundo Corolário 11.4.5. Analogamente para $P'$. Obtemos $U = P^{-1}A = A(P')^{-1}$. $\square$

**Exemplo 12.3.2** (Não-unicidade de $U$)**.** Para $i = 0, 1, 2$ sejam $\mathbf{r}_{\theta_i}$ matrizes $2 \times 2$ de rotacao (12.2.1). Definimos matrizes $4 \times 4$ de blocos $2 \times 2$ assim

$$\mathbf{a} := \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\theta_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 := \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\theta_0} & 0 \\ 0 & \mathbf{r}_{\theta_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 := \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\theta_0} & 0 \\ 0 & \mathbf{r}_{\theta_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} := \begin{bmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Essas matrizes satisfazem

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}\mathbf{u}_1 = \mathbf{p}\mathbf{u}_2, \qquad \mathbf{a} = \mathbf{u}_1\mathbf{p} = \mathbf{u}_2\mathbf{p}.$$

[4] De fato $A^*A \geq 0$ possui, segundo o Teorema Espectral, uma base ON $\mathcal{X} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ composto de autovetores de $A^*A$ com autovalores $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_r$ e $\lambda_j = 0$ para $j = r+1, \ldots, n$ onde $r = \mathrm{posto}(A^*A) = \mathrm{posto}(A)$. Define-se $\sigma_k := \sqrt{\lambda_k}$ para $k = 1, \ldots, n$ e $\eta_i := {\sigma_i}^{-1} A\xi_i$ para $i = 1, \ldots, r$. Escolhendo uma base ON $\{\eta_{r+1}, \ldots, \eta_n\}$ de $\mathrm{N}(A^*)$ obtemos uma base ON $\mathcal{Y} = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ de $E$.

**Exercício 12.3.3.** Ache a decomposição polar $\mathbf{a} = \mathbf{pu}$ da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Uma solução.** O primeiro passo sempre é checar se a matriz é invertível porque neste caso temos unicidade da decomposição polar e fórmulas para a solução, a saber $\mathbf{p} := \sqrt{\mathbf{a}\mathbf{a}^t} > 0$ e $\mathbf{u} := \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}$. Com efeito, como $\det \mathbf{a} = -2 - 4 = -6 \neq 0$ a inversa $\mathbf{a}^{-1}$ existe. A matriz simétrica

$$\mathbf{b} := \mathbf{a}\mathbf{a}^t = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

tem polinômio característico $p_{\mathbf{b}}(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 36$ e assim $\operatorname{spec} \mathbf{b} = \{4, 9\}$. Resolvendo os sistemas lineares $\mathbf{b}\xi = 4\xi$ e $\mathbf{b}\xi = 9\xi$ obtemos autovetores

$$\xi_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \xi_9 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A raíz quadrada não-negativa $\mathbf{p}$ de $\mathbf{b}$ é pela definição

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\mathbf{p}e_1 - 2\mathbf{p}e_2\right) &= \mathbf{p}\xi_4 := \sqrt{4}\xi_4 = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(e_1 - 2e_2\right), \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2\mathbf{p}e_1 + \mathbf{p}e_2\right) &= \mathbf{p}\xi_9 := \sqrt{9}\xi_9 = \frac{3}{\sqrt{5}} \left(2e_1 + e_2\right). \end{aligned}$$

Resolvendo as duas equações para $\mathbf{p}e_1$ e para $\mathbf{p}e_2$ obtemos

$$\mathbf{p}e_1 = \frac{14}{5} e_1 + \frac{2}{5} e_2, \qquad \mathbf{p}e_2 = \frac{2}{5} e_1 + \frac{11}{5} e_2.$$

Os coeficientes nestas duas equações disponibilizam as duas colunas da matriz

$$\mathbf{p} = [\mathbf{p}]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} > 0 \text{ como } \mathbf{p} = \mathbf{p}^t \text{ e } \operatorname{spec} \mathbf{p} = \{2, 3\} \subset (0, \infty)$$

onde $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Calculamos a inversa, por exemplo usando o método de Gauss-Jordan, e obtemos

$$\mathbf{p}^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} := \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a} = \cdots = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \in \mathrm{O}(2).$$

## 12.4 Exercícios

1. Dê os seguintes exemplos:

   (a) Uma matriz invertível cujas linhas são duas a duas ortogonais mas as colunas não são.

(b) Uma matriz (não-quadrada) cujas linhas são ortogonais e têm a mesma norma, mas as colunas não são ortogonais.

(c) Uma matriz cujas linhas (e colunas) são duas a duas ortogonais mas as normas das linhas são diferentes.

2. Para quaisquer bases ortonormais $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ e $\mathcal{Y} = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ de $E$, prove que existe um operador *ortogonal* $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que

$$A\xi_1 = \eta_1, \quad \dots, \quad A\xi_n = \eta_n.$$

No caso $E = \mathbb{R}^3$ e se as bases dadas são formadas pelos vetores

$$\xi_1 = \tfrac{1}{3}(1,2,2), \qquad \xi_2 = \tfrac{1}{3}(2,1,-2), \qquad \xi_3 = \tfrac{1}{3}(2,-2,1),$$

$$\eta_1 = \tfrac{1}{7}(2,3,6), \qquad \eta_2 = \tfrac{1}{7}(6,2,-3), \qquad \eta_3 = \tfrac{1}{7}(3,-6,2),$$

determine a matriz de $A$ na base canônica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_2)$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Se uma matriz triangular é ortogonal, prove que ela é diagonal e seu quadrado é igual à matriz identidade.

4. Seja $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \in M(1 \times 4)$ tal que $a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1$. Prove que $\mathbf{a}^t\mathbf{a} \in M(n \times n)$ é uma matriz de uma projeção ortogonal. Determine a imagem e o núcleo dessa projeção.

5. Ache uma matriz ortogonal $4 \times 4$ cujos elementos são todos da forma $\pm\frac{1}{2}$.

6. Obtenha a *decomposição polar*[5] da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

[5] $\mathbf{a} = \mathbf{pu}$ onde $\mathbf{u}$ é ortogonal e $\mathbf{p}$ satisfaz $\mathbf{p}^t = \mathbf{p}$ e $\langle \mathbf{p}v, v\rangle \geq 0$ para todo vetor $v$.

## C.7 Operadores ortogonais

**Teorema C.7.1** (Teorema 12.2.1)**.** *Para $A \in \mathcal{L}(E,F)$ são equivalente*

(i) $|Av| = |v|\ \forall v \in E$ *"A preserva norma"*

(ii) $|Au - Av| = |u - v|\ \forall u, v \in E$ *"A preserva distância"*

(iii) $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle\ \forall u, v \in E$ *"A preserva produto interno"*

(iv) $A^*A = I_E$ *"$A^*$ é inversa à esquerda de A"*

(v)$_1$ *a matriz $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ é ortogonal para todas bases ONs $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$*

(v)$_2$ *a matriz $[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ é ortogonal para um certo par de bases ONs $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$*

(vi)$_1$ *A leva uma certa base ON $\mathcal{X}$ de E num subconjunto ON de F*

(vi)$_2$ *A leva todas bases ONs $\mathcal{X}$ de E em subconjuntos ONs de F*

*Demonstração.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Linearidade de $A$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). $\langle Au, Av\rangle = \frac{1}{2}\left(|Au|^2 + |Av|^2 - |Au - Av|^2\right)$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv). $\langle u, v\rangle = \langle Au, Av\rangle = \langle A^*Au, v\rangle\ \forall u, v \Rightarrow A^*A = I_E$ (Le. 9.1.3)
(iv) $\Rightarrow$ (v)$_1$. $A^*A = I_E \Rightarrow \mathbf{a}^t\mathbf{a} = \mathbb{1}_n$ (Teor. 10.1.11) $\Rightarrow$ $\mathbf{a}$ ortogonal (Le. 12.1.3)
(v)$_1$ $\Rightarrow$ (v)$_2$. Trivial.
(v)$_2$ $\Rightarrow$ (vi)$_1$. Sejam $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ e $\mathcal{Y} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ bases ONs tal que a matriz $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ é ortogonal.

$$\langle A\xi_i, A\xi_j\rangle \overset{[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}}{=} \left\langle \sum_{k=1}^m \eta_k a_{ki}, \sum_{\ell=1}^m \eta_\ell a_{\ell j}\right\rangle \overset{\mathcal{Y}\ \text{ON}}{=} \sum_{k=1}^m \underbrace{a_{ki}}_{(\mathbf{a}^t)_{ik}} a_{kj} = (\mathbf{a}^t\mathbf{a})_{ij} = \delta_{ij}$$

(vi)$_1$ $\Rightarrow$ (vi)$_2$. Seja $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base ON de $E$ tal que $X := A\mathcal{X}$ é um subconjunto ON de $F$. Seja $\mathcal{X}'$ qualquer base ON de $E$ e seja $\mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{X}',\mathcal{X}}$ a matriz de passagem de $\mathcal{X}'$ para $\mathcal{X}$, veja (5.3.1). Vale $\mathbf{p} \in \mathrm{O}(n)$ segundo Exc. 12.1.7. Do fato que

$$A\xi_i' \overset{(5.3.1)}{=} A\sum_{k=1}^n \xi_k p_{ki} = \sum_{k=1}^n (A\xi_k)p_{ki}$$

obtemos que

$$\left\langle A\xi_i', A\xi_j'\right\rangle = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n p_{ki}p_{\ell j}\langle A\xi_k, A\xi_\ell\rangle = \sum_{k=1}^n \underbrace{p_{ki}}_{(\mathbf{p}^t)_{ik}} p_{kj} = (\mathbf{p}^t\mathbf{p})_{ij} = \delta_{ij}$$

(vi)$_2$ $\Rightarrow$ (i) Seja $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base ON de $E$. Escrevemos $v \in E$ na base $\mathcal{X}$ como $v = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$. Da hipótese $\langle \xi_i, \xi_j\rangle = \delta_{ij}$ obtemos que $|v|^2 = \langle v, v\rangle = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$. Como o conjunto $A\mathcal{X}$ é ON pela hipótese obtemos que $|Av|^2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i\alpha_j\langle A\xi_i, A\xi_j\rangle = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$. $\square$