Capítulo 11

Operadores auto-adjuntos

Neste[1] Capítulo 11 consideramos operadores $A \in \mathcal{L}(E)$ num espaço vetorial real E de dimensão finita n e com produto interno, ou seja

$$A\colon E \to E, \qquad E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)\,.$$

Lembramos que dévido ao produto interno o corpo será $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definição 11.0.1 (Auto-adjunto)**.** Chama-se um operador $A \in \mathcal{L}(E)$ de **auto-adjunto** se ele iguale a sua adjunta $A^* = A$.

Observação 11.0.2. a) O operador nulo $\mathcal{O} \in \mathcal{L}(E)$ é auto-adjunto $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}$. O operador identidade $I \in \mathcal{L}(E)$ é auto-adjunto $I^* = I$.
b) Operadores auto-adjuntos são operadores normais.
c) Para operadores auto-adjuntos núcleo e imagem são complementos ortogonais $\mathrm{N}(A) = \mathrm{Im}(A)^\perp$ segundo Teorema 10.1.7.

Os operadores auto-adjuntos formam um subespaço de $\mathcal{L}(E)$:

Lema 11.0.3. *Para operadores auto-adjuntos $A, B \in \mathcal{L}(E)$ vale o seguinte.*

(i) *Somas $A+B = (A+B)^*$ e múltiplos reais $\alpha A = (\alpha A)^*$ são auto-adjuntos.*

(ii) *AB auto-adjunto $\Leftrightarrow AB = BA \quad \Leftrightarrow BA = AB \Leftrightarrow BA$ auto-adjunto.*

*No caso $[A, B] := AB - BA = \mathrm{O}$ diz-se que **A e B comutam**.*

Demonstração. Teorema 10.1.5. □

Lema 11.0.4 (Restrição preserva auto-adjunto)**.** *A restrição de um operador auto-adjunto $A \in \mathcal{L}(E)$ a um subespaço F invariante por A é auto-adjunta.*

Demonstração. Para todos os $f, \tilde{f} \in F$ vale

$$\langle f, (A|_F)^* \tilde{f} \rangle = \langle (A|_F) f, \tilde{f} \rangle = \langle Af, \tilde{f} \rangle \overset{A^*=A}{=} \langle f, A\tilde{f} \rangle = \langle f, (A|_F)\tilde{f} \rangle$$

então $(A|_F)^* = (A|_F)$ segundo Lema 9.1.3. □

[1] Cap. 11 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 8 de junho de 2024

11.1 Auto-adjunto e ortogonalidade

Lema 11.1.1 (As projeções auto-adjuntas são as projeções ortogonais)**.** *Dado Um par de subespaços complementares $F \oplus G = E$, então são equivalente*

$$P := P_{F,G} \in \mathcal{L}(E) \text{ auto-adjunto} \qquad \Leftrightarrow \qquad F \perp G.$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Dado $f \in F$, $g \in G$, como $F = \operatorname{Fix} P_{F,G}$ e $G = \mathrm{N}(P_{F,G})$ segundo (7.1.2) obtemos

$$\langle f, g\rangle = \langle Pf, g\rangle \overset{P=P^*}{=} \langle f, Pg\rangle = 0.$$

"$\Leftarrow$" Dado $u, \tilde u \in E$. Como $E = F \oplus G$ escrevemos $u = f + g$ e $\tilde u = \tilde f + \tilde g$ para únicos $f, \tilde f \in F$ e $g, \tilde g \in G$ (Teorema 2.3.4). Como $F = \operatorname{Fix} P_{F,G}$ e $G = \mathrm{N}(P_{F,G})$

$$\begin{aligned}\langle u, P^*\tilde u\rangle &\overset{(10.1.2)}{=} \langle P(f+g), \tilde u\rangle \overset{g\in\mathrm{N}(P)}{=} \langle \overbrace{Pf}^{=f}, \tilde f + \tilde g\rangle\\ &\overset{\tilde g \perp f}{=} \langle f, \tilde f\rangle \overset{\tilde f\perp g}{=} \langle f+g, P\tilde f\rangle \overset{\tilde g\in\mathrm{N}(P)}{=} \langle u, P\tilde u\rangle.\end{aligned}$$

Então $P^* = P$ segundo Lema 9.1.3. □

Proposição 11.1.2. *Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjunto e $F \subset E$ subespaço, então*

$$F \text{ subespaço invariante por } A \quad \Leftrightarrow \quad F^\perp \text{ subespaço invariante por } A.$$

Demonstração. Proposição 10.1.9. □

Teorema 11.1.3 (Autovalores diferentes tem autovetores ortogonais)**.** *Seja $A = A^*$ um operador auto-adjunto em E. Então autovetores ξ_λ e ξ_μ associados a autovalores diferentes $\lambda \neq \mu$ são ortogonais, em símbolos $\xi_\lambda \perp \xi_\mu$.*

Demonstração. Vale que o produto se anula

$$(\lambda - \mu)\langle \xi_\lambda, \xi_\mu\rangle = \langle \lambda\xi_\lambda, \xi_\mu\rangle - \langle \xi_\lambda, \mu\xi_\mu\rangle = \langle A\xi_\lambda, \xi_\mu\rangle - \langle \xi_\lambda, A\xi_\mu\rangle \overset{A^*=A}{=} 0$$

e assim, como $(\lambda - \mu) \neq 0$, segue que $\langle \xi_\lambda, \xi_\mu\rangle = 0$. □

11.2 Matrizes simétricas

Como podemos checar se um operador $A \in \mathcal{L}(E)$ é auto-adjunto? Só calcular a matriz dele em respeito a uma base ON e ver se é simétrica.

Teorema 11.2.1. *Seja $\mathcal{X} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ uma base ON de E. Então os operadores auto-adjuntos correspondem exatamente ás matrizes simétricas $n \times n$. Com efeito, a aplicação entre espaços vetoriais*

$$\begin{aligned}\Psi = \Psi_{\mathcal{X}} \colon \{\text{operadores auto-adjuntos em } E\} &\to \mathcal{S}(n)\\ A &\mapsto \mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X}}\end{aligned}$$

é linear e bijetivo (um isomorfismo).

Demonstração. Bem definido: Com efeito é simétrica a matriz $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X}} = [A^*]_{\mathcal{X}} = \mathbf{a}^t$ onde a última igualdade é Teorema 10.1.11.
Linear e injetivo: Teorema 5.2.7.
Sobrejetivo: Dado uma matriz $n \times n$ simétrica $\mathbf{a} = (a_{ij})$, define $A \in \mathcal{L}(E)$ nos membros da base ON $\mathcal{X}$ assim $A\varepsilon_j := \varepsilon_1 a_{1j} + \cdots + \varepsilon_n a_{nj}$ e estende linearmente a E. Então A é auto-adjunto porque $[A]_{\mathcal{X}} = \mathbf{a} = \mathbf{a}^t = [A^*]_{\mathcal{X}}$ onde a última igualdade é Teorema 10.1.11. Mas se as matrizes de dois operadores são iguais os operadores são iguais porque eles tomam os mesmos valores numa base. □

Corolário 11.2.2. *Os operadores auto-adjuntos formam um subespaço de dimensão $n(n+1)/2$ do espaço vetorial $\mathcal{L}(E)$ onde $n = \dim E$.*

Demonstração. Segundo Corolário 6.4.9 isomorfismos, assim aquele em Teorema 11.2.1, preservam dimensão e $\dim \mathcal{S}(n) = n(n+1)/2$ segundo (3.2.2). □

Comentário 11.2.3. Seja $E = F \oplus G$. Pode-se usar Teorema 11.2.1, simetria da matriz, para provar Lema 11.1.1 o que diz que

$$P := P_{F,G} \in \mathcal{L}(E) \text{ auto-adjunto} \qquad \Leftrightarrow \qquad F \perp G.$$

Sejam $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ e $\{\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n\}$ bases ONs de F e G, respectivamente. Então $\mathcal{X} := \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ é uma base ON de E se e somente se $F \perp G$. Neste caso a matriz de P tem a forma simétrica

$$\mathbf{p} := [P]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O}_{n-k} \end{bmatrix} = \mathbf{p}^t$$

o que é equivalente a P sendo auto-adjunto (Teorema 11.2.1).

Exemplo 11.2.4. Sejam dois operadores $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dados por

$$A(x, y) = (x, 2y), \qquad B(x, y) = (y, x).$$

Determine quais dos quatro A, B, AB, BA são auto-adjuntos.

Uma solução. Obviamente escolhemos a base canónica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ como base ON. Auto-adjunto é equivalente a simetria da matriz.

(i) $\mathbf{a} := [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^t = \mathbf{a}^t$ e assim $A = A^*$ é auto-adjunto;

(ii) $\mathbf{b} := [B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}^t$ e assim $B = B^*$ é auto-adjunto;

(iii) $[AB] = [A]\,[B] = \mathbf{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{c}$, então como $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}^t$ sabemos que AB não é auto-adjunto;

(iv) $[BA] = [B]\,[A] = \mathbf{ba} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{d}$, então como $\mathbf{d} \neq \mathbf{d}^t$ sabemos que BA não é auto-adjunto.

Outra solução (iii-iv). Não-comutatividade $\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{ba}$ é equivalente a não-comutatividade $AB \neq BA$ o que é equivalente, segundo Lema 11.0.3, a AB e BA ambos não são auto-adjuntos.

Exercício 11.2.5. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = (\xi_1, \xi_2) := ((1,-1),(3,1))$ de $\mathbb{R}^2$. Determine se o operador $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ cuja matriz $[A]_\mathcal{B}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = [A]_\mathcal{B} =: \mathbf{a}$$

é auto-adjunto, ou não.

Uma solução. A matriz $\mathbf{a}$ é simétrica, mas a base $\mathcal{B}$ não é ON. Precisamos calcular a matriz de A em respeito a uma base ON, logicamente vamos escolher a base mais simples, a base canónica $\mathcal{E}$. Para determinar $[A]_\mathcal{E}$ começamos assim

$$\begin{aligned} Ae_1 - Ae_2 &= A(e_1 - e_2) = A(1,-1) = \xi_1 \cdot 1 + \xi_2 \cdot 0 = \xi_1 = (1,-1) = e_1 - e_2 \\ 3Ae_1 + Ae_2 &= A(3e_1 + e_2) = A(3,1) = \xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 5 = 5(3,1) = 15e_1 + 5e_2. \end{aligned}$$

Adicionamos as identidades para obtermos

$$4Ae_1 + \mathcal{O} = 16e_1 + 4e_2 \qquad \Rightarrow \qquad Ae_1 = e_1 \cdot 4 + e_2 \cdot 1$$

e consequentemente a primeira coluna da matriz

$$\mathbf{b} := [A]_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A segunda coluna segue da primeira identidade $Ae_2 = Ae_1 - e_1 + e_2 = e_1 \cdot 3 + e_2 \cdot 2$. Como a matriz $\mathbf{b} \neq \mathbf{b}^t$ não é simétrica, o operador A não é auto-adjunto.

11.3 Teorema espectral – diagonalização

Proposição 11.3.1 (Caso $\dim E = 2$)**.** *Na dimensão dois para todo operador auto-adjunto A existe uma base ON $\mathcal{X} = \{\hat\xi_1, \hat\xi_2\}$ composto de autovetores.*

Demonstração. Escolha uma base ON $\mathcal{Y}$ de E. A matriz correspondente

$$\mathbf{a} := [A]_\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$$

é simétrica porque $A = A^*$ é auto-adjunto. O polinômio característico é

$$p_A(\lambda) := p_{[A]_\mathcal{Y}}(\lambda) := \lambda^2 - (\alpha+\gamma)\lambda + (\alpha\gamma - \beta^2)$$

e suas raízes são segundo a fórmula (8.2.5) dadas por

$$\lambda_\pm = \frac{(\alpha+\gamma) \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \Delta = (\alpha+\gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2) \geq 0.$$

Observe que $\Delta = (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2 \geq 0$ é realmente não-negativo.
Caso $\boldsymbol{\Delta = 0}$. Então $\alpha = \gamma$ e $\beta = 0$, e daí $\mathbf{a} = \alpha\mathbb{1}$ e $A = \alpha I_E$. Consequentemente α é o único autovalor e qualquer base ON é composto de autovetores.
Caso $\boldsymbol{\Delta > 0}$. Neste caso $\lambda_- < \lambda_+$ são autovalores diferentes de $[A]_{\mathcal{Y}}$, assim de A. Autovetores correspondentes são ortogonais segundo Teorema 11.1.3. □

Proposição 11.3.2 (Existência de um autovetor)**.** *Todo operador auto-adjunto $A\colon E \to E$ admite um autovetor v.*

Demonstração. Segundo Teorema C.5.1 na dimensão finita todo operador linear admite um subespaço invariante $F \subset E$ de dimensão 1 ou 2. (Isso é trabalhoso.)
Caso dim $\boldsymbol{F = 1}$. Segundo Lema 8.0.4 existe um elemento $v \in F$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Av = \lambda v$. Não temos usado que A é auto-adjunto, vamos próximo:
Caso dim $\boldsymbol{F = 2}$. Como $A\colon E \to E$ é auto-adjunto a restrição $A|\colon F \to F$ também é auto-adjunta segundo Lema 11.0.4. Segundo Proposição 11.3.1 existe uma base ON de F composto de dois autovetores de $A|$, assim de A. □

Teorema 11.3.3 (Teorema espectral)**.** *Seja $A \in \mathcal{L}(E)$, então são equivalente*

$$A^* = A \;\Leftrightarrow\; \exists \textit{ base ON } \mathcal{X} = \{\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n\} \textit{ de } E \textit{ composto de autovetores de } A.$$

Neste caso $E = \oplus_{\lambda \in \operatorname{spec} A} E_\lambda$, onde os autosubespaços E_λ são dois-a-dois ortogonais, e para todo autovalor as multiplicidades $\operatorname{alg}_\lambda(A) = g_\lambda(A)$ coincidem.

Lembra de Exercício 8.1.11 que a matriz de um operador em respeito a uma base composto de autovetores é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são os autovalores.

Demonstração. "⇒" 1) Segundo a *prova* da Proposição 11.3.2 existe um subespaço $F \subset E$ invariante por A e de dimensão 1 ou 2 e além disso F chega com uma base ON composto de autovetores de A.
2) O complemento ortogonal $F^\perp$ é invariante por A segundo Proposição 11.1.2. Assim a restrição $A|\colon F^\perp \to F^\perp$ existe e, segundo Lema 11.0.4, é auto-adjunto.
Repetimos 1) para $\tilde{E} := F^\perp$ e depois 2). Cada vez a dimensão é reduzida por 1 ou 2. Por isso o processo termina em não mais como $n = \dim E$ iterações.
"⇐" Sejam $\hat{\xi}_i$ e $\hat{\xi}_j$ membros da base ON $\mathcal{X}$ com autovalores λ_i e λ_j, então

$$\langle \hat{\xi}_i, A^* \hat{\xi}_j \rangle = \langle A\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j \rangle = \langle \lambda_i \hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \delta_{ij} = \langle \hat{\xi}_i, \lambda_j \hat{\xi}_j \rangle = \langle \hat{\xi}_i, A\hat{\xi}_j \rangle.$$

Então os dois operadores A^* e A são iguais segundo Lema 9.1.3.
Proposição 8.2.7 e Teorema 11.1.3 concluem a prova do teorema espectral. □

Diagonalização simultânea

Proposição 11.3.4. *Para dois operadores auto-adjuntos $A, B \in \mathcal{L}(E)$ vale*

$$AB = BA \quad \Leftrightarrow \quad \exists \textit{ base ON composto de autovetores comuns a } A \textit{ e } B.$$

Demonstração. '$\Rightarrow$' 1. Como o operador $A \in \mathcal{L}(E)$ é auto-adjunto ele possui um autovalor λ_1 com autosubespaço associado $E_{\lambda_1}(A) \neq \{\mathcal{O}\}$, veja Proposição 11.3.2. Para $\xi \in E_{\lambda_1}(A)$ obtemos que $\lambda_1(B\xi) = B(\lambda_1\xi) = B(A\xi) = A(B\xi)$ onde o último passo é a hipótese $AB = BA$. Mas isso diz que $B\xi \in E_{\lambda_1}(A)$. Temos provado que $E_{\lambda_1}(A)$ é invariante por B. Assim, segundo Lema 11.0.4, a restrição $B| \in \mathcal{L}(E_{\lambda_1}(A))$ é auto-adjunta. Mas neste caso $B|$ possui um autovetor $\xi_1 \in E_{\lambda_1}(A)$ segundo Proposição 11.3.2. O vetor ξ_1 é autovetor de B e de A.

2. Como o subespaço $F := \mathbb{R}\xi_1$ é invariante por A (e por B) a Proposição 11.1.2 diz que o complemento ortogonal $F^\perp$ é invariante por A (e por B). Como A e B são auto-adjunto as suas restrições a $F^\perp$ são auto-adjuntas também, conforme Lema 11.0.4. Note que $\dim F^\perp = (\dim E) - 1$.

3. Repete 1. e 2. para $\tilde{E} = F^\perp$ e as restrições de A e de B para obter um autovetor ξ_2 comum de A e de B. O processo termina depois $n = \dim E$ passos porque em cada repetição a dimensão diminui por 1.

'$\Leftarrow$' Exercício. $\square$

11.4 Operadores não-negativos

Definição 11.4.1. Um operador auto-adjunto $A = A^* \in \mathcal{L}(E)$ é chamado de **operador não-negativo**, símbolo $\boldsymbol{A \geq 0}$, se

$$\langle Av, v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in E.$$

No caso $\langle Av, v\rangle > 0\; \forall v \neq \mathcal{O}$ chama-se A de **operador positivo**, símbolo $\boldsymbol{A > 0}$.

Lembre que o complemento ortogonal $v^\perp$ de um vetor não-nulo é um hiperplano de E e assim decompõe E em dois semi-espaços cuja interseção é $v^\perp$. Uma interpretação geométrica do que um operador $A = A^*$ é não-negativo seria que cada um vetor imagem Av aponta no mesmo semi-espaço como o vetor v. Vamos ver que $Av \in v^\perp$ só é possível no caso do vetor nulo $Av = \mathcal{O}$.

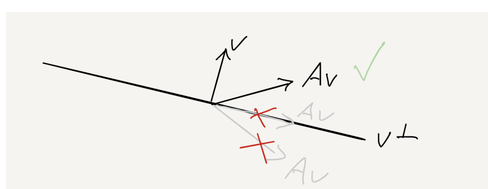

Figura 11.1: Operador não-negativo $A \geq 0$ não inverta direção "ao passado"

Exercício 11.4.2 (Quadrado de operadores auto-adjuntos)**.** $A = A^* \Rightarrow A^2 \geq 0$.

Teorema 11.4.3 (Operadores auto-adjuntos)**.** *Seja $A = A^* \in \mathcal{L}(E)$. Então positividade de A é equivalente a positividade de todos os autovalores, em símbolos*

$$A > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{spec} A \subset (0, \infty).$$

Analogamente $A \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{spec} A \subset [0, \infty)$.

Demonstração. "$\Rightarrow$" Seja $Av = \lambda v$ onde $v \neq \mathcal{O}$, então $\lambda\langle v, v\rangle = \langle Av, v\rangle > 0$.
"$\Leftarrow$" Seja $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base ON de E de autovetores, ou seja $A\xi_i = \lambda_i\xi_i$ onde $\lambda_i > 0$. Nesta base escreve $v \in E \setminus \{\mathcal{O}\}$ como $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i\xi_i$, usando $\langle \xi_i, \xi_j\rangle = \delta_{ij}$ obtemos $\langle Av, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i A\xi_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j\xi_j\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2\lambda_i > 0$. □

Corolário 11.4.4. *Seja $A \geq 0$ e $v \in E$, então*

$$\langle Av, v\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad Av = \mathcal{O}.$$

(*Escrito em outros símbolos, se $A \geq 0$ então vale: $Av \perp v \;\Rightarrow\; v \in \mathrm{N}(A)$.*)

Demonstração. Como na prova do teorema anterior seja $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base ON de E composto de autovetores de A. Suponhamos que os primeiros k formam uma base $\mathcal{X}_0 = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ do núcleo $\mathrm{N}(A) = E_0$; possivelmente $\mathcal{X}_0 = \emptyset$. Escrevemos $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i\xi_i$. Então a identidade

$$0 = \langle Av, v\rangle = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i^2 \underbrace{\lambda_i}_{>0}$$

implica que $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$. Assim

$$Av = \alpha_1 \underbrace{\lambda_1}_{0} \xi_1 + \dots + \alpha_k \underbrace{\lambda_k}_{0} \xi_k + \underbrace{\alpha_{k+1}}_{0} \lambda_{k+1}\xi_{k+1} + \dots + \underbrace{\alpha_n}_{0} \lambda_n\xi_n = \mathcal{O}.$$

□

Corolário 11.4.5. $A > 0 \;\Leftrightarrow\; A \geq 0$ *e A é invertível.*

Demonstração. "$\Rightarrow$" Logicamente $A > 0$ implica $A \geq 0$. Segundo Teorema 11.4.3 os autovalores de A são > 0, assim $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$. Consequentemente A é injetivo, equivalentemente sobrejetivo, então um isomorfismo, assim invertível segundo Proposição 6.4.4.
"$\Leftarrow$" Seja $A \geq 0$ invertível, particularmente $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$. Dado $v \in E$ não-nulo, então $Av \neq \mathcal{O}$ e daí $\langle Av, v\rangle \neq 0$ conforme Corolário 11.4.4. De outro lado $\langle Av, v\rangle \geq 0$ segundo à hipótese $A \geq 0$. □

Teorema 11.4.6 (Raíz quadrada não-negativa / positiva)**.** *Todo operador não-negativo admite uma única raíz quadrada não-negativa: Dado $A \geq 0$, então existe um único $B \geq 0$, chamado de* ***a raíz quadrada não-negativa*** *de A, tal que $B^2 = A$. Vale $A > 0 \Leftrightarrow B > 0$ e B é chamado de raíz quadrada* ***positiva****.*

Notações comuns para a raíz quadrada não-negativa são $\sqrt{A}$ ou $A^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Seja $A \geq 0$. Existência. Segundo Teorema 11.4.3 sabemos que A tem autovalores $\lambda_i \geq 0$, com efeito

$$\operatorname{spec} A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subset [0, \infty)$$

onde $r \le n := \dim E$. Segundo Teorema 11.3.3 temos a soma ortogonal

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}.$$

Escrevemos $v \in E$ na forma $v = v_1 + \cdots + v_r$ para autovetores únicos $v_i \in E_{\lambda_i}$, veja Teorema 2.3.4. Assim $Av = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$. Definimos o candidato para a raíz quadrada assim

$$B \colon E \to E, \quad v \mapsto \sqrt{\lambda_1} v_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_r} v_r.$$

Obtemos imediatamente que $B^2 = A$, com efeito

$$B^2 v = B(\sqrt{\lambda_1} v_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_r} v_r) = \sqrt{\lambda_1}^2 v_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_r}^2 v_r = Av.$$

Escrevendo $w \in E$ analogamente como $w = w_1 + \cdots + w_r$ seque que $B = B^*$:

$$\langle Bv, w\rangle = \sum_{j=1}^r \left\langle \sqrt{\lambda_j} v_j, w_j \right\rangle = \sum_{j=1}^r \left\langle v_j, \sqrt{\lambda_j} w_j \right\rangle = \langle v, Bw\rangle$$

onde temos usado ortogonalidade $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$ na igualdade 1 e 3. Similarmente

$$\langle Bv, v\rangle = \sum_{j=1}^r \left\langle \sqrt{\lambda_j} v_j, v_j \right\rangle = \sum_{j=1}^r \sqrt{\lambda_j}\, |v_j|^2 \ge 0$$

o que conclui a prova de $B \ge 0$.

Unicidade. Suponha que um operador $C \ge 0$ satisfaz $C^2 = A$.
1) Os autosubespaços E_{λ_i} de A são invariante por C: Dado $v \in E_{\lambda_i}$, segue $Cv \in E_{\lambda_i}$ da comutatividade $AC = CA$ a qual vale segundo a hipótese $C^2 = A$.
2) A restrição $C_i := C|_{E_{\lambda_i}}$ iguale $\sqrt{\lambda_i}\, I$: A restrição existe segundo 1) e é auto-adjunto segundo Lema 11.0.4 usando a hipótese $C = C^*$. Conforme o teorema espectral existe uma base ON do domínio E_{λ_i} de C_i composto de autovetores de C_i. Assim resta mostrar que C_i admite só um autovalor e ele é $\sqrt{\lambda_i}$. Existência de um autovalor é garantido por Proposição 11.3.2. Suponha então que $C_i \xi = \mu \xi$ onde $\xi \in E_{\lambda_i}$ e $\mu \in \mathbb{R}$. A hipótese $C \ge 0$ implica que $\mu \ge 0$. Como

$$\lambda_i \xi = A\xi = C(C\xi) = C(\mu\xi) = \mu(C\xi) = \mu^2 \xi$$

e como $\xi \ne \mathcal{O}$ segue que $\mu = \sqrt{\lambda_i}$.
3) Escrevendo $v \in E$ mais uma vez na forma $v = v_1 + \cdots + v_r$ obtemos que

$$Cv = Cv_1 + \cdots + Cv_r \overset{2)}{=} \sqrt{\lambda_1} v_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_r} v_r \overset{\text{def.}}{=} Bv.$$

Prova-se analogamente o caso $A > 0$. □

Comentário 11.4.7.

a) $(R_{90^\circ})^2 = R_{90^\circ} R_{90^\circ} = R_{180^\circ} = -\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} < 0$. (Não todo quadrado é ≥ 0)
(R_{90° não é auto-adjunto conforme Exercício 11.4.2)

b) vale $\mathbf{cc} = \mathbb{1}_2 \geq 0$ para (Existência de outras raízes $\mathbf{c} \not\geq 0$)

- a matriz $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \not\geq 0$; não auto-adjunta e $\lambda_\pm = \pm\sqrt{7} \not\geq 0$
- a matriz $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \not\geq 0$; auto-adjunta mas $\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \not\geq 0$
- a matriz $\mathbf{c} = -\mathbb{1}_2 \not\geq 0$; auto-adjunta mas $\langle \mathbf{c}e_1, e_1\rangle = -1 \not\geq 0$
- a matriz $\mathbf{c} = \mathbb{1}_2 > 0$. a raíz quadrada não -negativa única

Teorema 11.4.8. *Seja $A \in \mathcal{L}(E,F)$ onde E e F espaços vetoriais de dimensões finitas e munido de produtos internos. Então vale o seguinte.*

(i) $A^*A \geq 0$ *e* $AA^* \geq 0$.

(ii) $A^*A > 0$ *e* $AA^* > 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ *invertível.*

(iii) $\mathrm{N}(A^*A) = \mathrm{N}(A)$ *e* $\mathrm{N}(AA^*) = \mathrm{N}(A^*)$.

(iv) $\mathrm{posto}(A^*A) = \mathrm{posto}(A) = \mathrm{posto}(A^*) = \mathrm{posto}(AA^*)$.

Demonstração. (i) $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ e $\langle A^*Av, v\rangle = \langle Av, Av\rangle \geq 0$.
(ii) Segundo Corolário 11.4.5 temos as equivalências seguintes.

$$\begin{aligned} A^*A > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad A^*A \geq 0 \text{ e } A^*A \text{ invertível} \quad \Rightarrow \quad A \text{ injetivo.} \\ AA^* > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad AA^* \geq 0 \text{ e } AA^* \text{ invertível} \quad \Rightarrow \quad A \text{ sobrejetivo.} \end{aligned} \tag{11.4.1}$$

As implicações reversas valem segundo Proposição 10.2.1.
(iii) $\mathrm{N}(A^*A) = \mathrm{N}(A)$: '$\subset$' Seja $A^*Av = \mathcal{O}$, então $Av \in \mathrm{N}(A^*) \overset{(10.1.3)}{=} (\mathrm{im}\,(A))^\perp$. Assim $Av \in \mathrm{im}\,(A) \cap (\mathrm{im}\,(A))^\perp = \{\mathcal{O}\}$ provando que $Av = \mathcal{O}$. '$\supset$' trivial.
(iv) $\dim \mathrm{im}\,(A^*A) = \dim E - \dim \mathrm{N}(A^*A) \overset{\text{(iii)}}{=} \dim E - \dim \mathrm{N}(A) = \dim \mathrm{im}\,(A)$ onde temos usado o Teorema 6.5.1 de Núcleo e Imagem no passos um e três. Analogamente obtém-se $\dim \mathrm{im}\,(AA^*) = \dim \mathrm{im}\,(A^*) =: \mathrm{posto}(A^*)$. Mas $\mathrm{posto}(A^*) = \mathrm{posto}(A)$ segundo Corolário 10.1.8.
As afirmações cujas provas temos omitidos acima prova-se analogamente. □

Corolário 11.4.9. *Para $A \in \mathcal{L}(E,F)$ vale o seguinte.*

a) *A injetivo $\Leftrightarrow$ A^*A invertível.*

b) *A sobrejetivo $\Leftrightarrow$ AA^* invertível.*

Demonstração. '$\Rightarrow$' Proposição 10.2.1. '$\Leftarrow$' (11.4.1). □

Note que o máximo posto de uma matriz $\mathbf{a}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é o mínimo

$$\min\{n,m\} = \begin{cases} n \ \Leftrightarrow \mathbf{a} \text{ injetivo} \quad\ \ \Leftrightarrow \mathbf{a}^t\mathbf{a} \text{ invertível} \\ m \Leftrightarrow \mathbf{a} \text{ sobrejetivo} \Leftrightarrow \mathbf{a}\mathbf{a}^t \text{ invertível} \end{cases} \tag{11.4.2}$$

onde as últimas equivalências usam Corolário 11.4.9.
Podemos produzir exemplos de matrizes positivas e não-negativas simplesmente assim: Tome uma matriz $\mathbf{a}$ de posto máximo. Enquanto ambas $\mathbf{a}^t\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}\mathbf{a}^t$ são ≥ 0, a menor é $>$ segundo Corolário 11.4.5 e (11.4.2).

Exemplo 11.4.10. A matriz $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é de posto máximo $m = 2$ como as primeiras duas colunas são LI e assim já geram $\mathbb{R}^2$. Assim

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^t = \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 20 & 29 \end{pmatrix} > 0, \qquad \mathbf{a}^t\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 8 & 13 & 18 \\ 11 & 18 & 25 \end{pmatrix} \geq 0.$$

11.5 Teorema dos valores singulares

No seguinte trata-se de uma extensão do teorema espectral a operadores lineares gerais, auto-adjunto ou não, entre espaços vetoriais com produto interno.

O Teorema dos valores singulares será usado para estabelecer a decomposição polar de operadores não-negativos (Teorema 12.3.1).

Teorema 11.5.1 (Teorema dos valores singulares)**.** *Sejam E e F espaços vetoriais de dimensões finitas e munido de produtos internos. Seja $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e seja $r = \mathrm{posto}(A)$. Então vale o seguinte: Existem bases ONs*

$$\mathcal{X} = \{\underbrace{\xi_1, \ldots, \xi_r}_{\mathrm{Im}A^*}, \underbrace{\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n}_{\mathrm{N}(A)}\} \text{ de } E, \quad \mathcal{Y} = \{\underbrace{\eta_1, \ldots, \eta_r}_{\mathrm{Im}A}, \underbrace{\eta_{r+1}, \ldots, \eta_m}_{\mathrm{N}(A^*)}\} \text{ de } F,$$

*e os chamados **valores singulares**[2] $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in (0, \infty)$ de A tal que*

$$\begin{aligned} A\xi_i &= \sigma_i \eta_i, \qquad & A^*\eta_i &= \sigma_i \xi_i, \qquad & i &= 1, \ldots, r, \\ A\xi_j &= \mathcal{O}, & A^*\eta_j &= \mathcal{O}, & j &> r. \end{aligned}$$

Demonstração. Vale $A^*A \geq 0$ e $\mathrm{posto}(A^*A) = \mathrm{posto}(A) = r$ segundo Teorema 11.4.8. Conforme o teorema espectral, Teorema 11.3.3, existe uma base ON $\mathcal{X} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ de E tal que $A^*A\xi_i = \sigma_i^2 \xi_i$ com $\sigma_i > 0$ se $i \in \{1, \ldots, r\}$ e $\sigma_j = 0$ se $j > r$. As imagens

$$\eta_i := \tfrac{1}{\sigma_i} A\xi_i, \quad i = 1, \ldots, r \qquad \Rightarrow\ A^*\eta_i = \tfrac{1}{\sigma_i} A^*A\xi_i = \sigma_i \xi_i$$

são dois-a-dois ortogonais e de comprimento 1, com efeito

$$\langle \eta_i, \eta_j \rangle = \tfrac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle A\xi_i, A\xi_j \rangle = \tfrac{1}{\sigma_i \sigma_i} \langle \xi_i, \underbrace{A^*A\xi_j}_{\sigma_j^2 \xi_j} \rangle = \tfrac{\sigma_j}{\sigma_i} \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \tfrac{\sigma_j}{\sigma_i} \delta_{ij} = \delta_{ij}$$

para $\forall i, j = 1, \ldots, r$. Segundo Teorema 11.4.8 vale $\mathrm{N}(A^*A) = \mathrm{N}(A)$, daí $A\xi_j = \mathcal{O}$ se $j > r$. Escolha uma base ON $\{\eta_{r+1}, \ldots, \eta_m\}$ de $(\mathrm{Im}A)^\perp = \mathrm{N}(A^*)$. $\square$

Observe que $\{\eta_1, \ldots, \eta_r, \eta_{r+1}, \ldots, \eta_m\}$ é uma base ON do operador linear $AA^* \colon F \to F$ com autovalores associados σ_i^2 se $i \in \{1, \ldots, r\}$ e $\sigma_j = 0$ se $j > r$.

[2] as raízes dos autovalores positivos, contados com multiplicidades, do operador $A^*A \geq 0$

11.6 Exercícios

Para todos os exercícios E é um espaço vetorial de dimensão $n < \infty$, munido de produto interno.

1. Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos tais que $\langle Av, v\rangle = \langle Bv, v\rangle$, para todo $v \in E$. Prove que $A = B$.

2. Determine $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que
$$A(2,-1,-2) = (1,1,13) \qquad \text{e} \qquad A(3,-6,-6) = (3,21,33),$$
sabendo que o traço de A é 5.

3. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $A(4,4,-2) = (10,-2,-2)$ e
$$A(4,-2,4) = (-2,10,-2), \quad A(1,-2,-2) = (1,1,-5).$$
Prove que $A^* = A$.

4. Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos. a) Prove que $AB+BA$ é auto-adjunto. b) Que se pode dizer sobre $AB - BA$?

5. Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos tais que BA é diagonalizável.[3] Prove que AB também é diagonalizável.

   [Dica: Veja §10.5 Exercício 5 (b).]

6. Seja $P \in \mathcal{L}(E)$ uma projeção ortogonal. Encontre uma raíz quadrada B não-negativa de P. É única?

   [Dica: Lembre-se que $2P = I + S$, onde $S \in \mathcal{L}(E)$ é a reflexão ortogonal em torno de $F := \mathrm{Im}(P)$.]

[3] Uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E)$ é chamada **diagonalizável** se, e somente se, existe uma base $\mathcal{U}$ de E tal que a matriz $\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{U}}$ de A é da forma diagonal. Neste caso, os elementos de $\mathcal{U}$ são os autovetores de A e a diagonal da matriz $\mathbf{a}$ contém os autovalores de A.