Capítulo 10

A adjunta

Neste[1] Capítulo 10 consideramos exclusivamente espaços vetoriais de dimensão finita com produtos internos

$$E = (E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)\,, \qquad F = (F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)\,,$$

e dimensões $n := \dim E$ e $m := \dim F$. Dévido aos produtos internos o corpo sempre será $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Em vez de $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ ou $\langle\cdot,\cdot\rangle_F$ escrevemos simplesmente $\langle\cdot,\cdot\rangle$, o contexto indica do qual produto interno trata-se, aquele de E ou F.

10.1 Definição e propriedades

Deixa repetir o Teorema 9.1.14. Dimensão finita é essencial.[2]

Teorema 10.1.1. *É um isomorfismo a transformação linear definida assim*

$$\begin{aligned} D = D_E = D_{\langle\cdot,\cdot\rangle_E}\colon E &\to E^* := \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ v &\mapsto \langle v,\cdot\rangle \end{aligned} \tag{10.1.1}$$

onde $\langle v,\cdot\rangle\colon E\to\mathbb{R}$ é a transformação linear $u\mapsto\langle v,u\rangle$.

Demonstração. Linear: Para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $u,v\in E$ axioma $(\mathtt{BL})$ da

$$D(\alpha u+\beta v) = \langle \alpha u+\beta v,\cdot\rangle = \alpha\langle u,\cdot\rangle + \beta\langle v,\cdot\rangle = \alpha Du + \alpha Dv.$$

Bijetivo: Segundo Corolário 5.2.8 as dimensões são iguais

$$\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = \dim E\cdot\dim\mathbb{R} = \dim E < \infty.$$

Segundo Corolário 6.5.2 é suficiente mostrar injetivo: Suponha $Dv = \mathcal{O}\in E^*$. Obtemos $\forall u\in E\colon\ \langle v,u\rangle = (Dv)u = \mathcal{O}v = 0$. Então axioma $(\mathtt{ND})'$ em Lema 9.1.2 diz que $v = \mathcal{O}\in E$. Isso mostra que D é injetivo, assim bijetivo. $\square$

[1] Cap. 10 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 3 de junho de 2024

[2] Na dimensão infinita usa-se o espaço dual contínuo $\tilde{E}^*$, composto dos funcionais lineares *contínuas*. O famoso **teorema de Riesz** diz que $E\to\tilde{E}^*$, $v\mapsto\langle v,\cdot\rangle$ é um isomorfismo.

Definição 10.1.2 (Adjunta)**.** A **adjunta** de uma transformação linear $A\colon E \to F$ entre espaços vetoriais com produtos internos é num ponto w a composição

$$\begin{aligned} A^*\colon F &\to E \\ w &\mapsto (D_E)^{-1} \langle w, A\cdot\rangle_F \end{aligned}$$

das transformações lineares $[v \mapsto \langle w, Av\rangle_F] \in E^*$ e $(D_E)^{-1} : E^* \to E$.

Proposição 10.1.3 (Critério para adjunta)**.** *Sejam $y \in E$ e $w \in F$, então*

$$y = A^* w \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle y, v\rangle = \langle w, Av\rangle \ \forall v \in E.$$

Demonstração. Dado $y \in E$ e $w \in F$, são equivalente

$$y = A^* w := (D_E)^{-1}\langle w, A\cdot\rangle_F \quad \Leftrightarrow \quad \langle w, A\cdot\rangle_F = D_E y := \langle y, \cdot\rangle_E.$$

□

Corolário 10.1.4. *Seja $A \in \mathcal{L}(E, F)$, então*

$$\langle A^* w, v\rangle = \langle w, Av\rangle \tag{10.1.2}$$

para cada um $w \in F$ e $v \in E$.

Demonstração. Proposição 10.1.3 "⇒". □

Teorema 10.1.5 (Regras básicas para a adjunta)**.**

(i) $I = I^*$

(ii) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(iii) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$

(iv) $(BA)^* = A^* B^*$

(v) $(A^*)^* = A$

Demonstração. Para cada um de (i-v) aplique (10.1.2) junto com Lema 9.1.3. Ilustramos o principio provando (iv) deixando os outros itens para o leitor. Vale $\langle (BA)^* w, v\rangle = \langle w, BAv\rangle = \langle B^* w, Av\rangle = \langle A^* B^* w, v\rangle$. □

Teorema 10.1.6 (Injetividade e sobrejetivade de A e A^*)**.**

(i) *A injetivo $\Leftrightarrow$ A^* sobrejetivo*

(ii) *A sobrejetivo $\Leftrightarrow$ A^* injetivo*

(iii) *A isomorfismo $\Leftrightarrow$ A^* isomorfismo*

Demonstração. (i) São equivalente

$$\begin{aligned} A \text{ injetivo} &\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \text{existe inversa à esquerda } B \text{ de } A\colon \ BA = I_E \ \overset{*}{\Leftrightarrow} \ A^* B^* = I_E \\ &\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \text{existe inversa à direita } C \ (= B^*) \text{ de } A^*\colon \ A^* C = I_E \\ &\overset{(3)}{\Leftrightarrow} A^* \text{ sobrejetivo} \end{aligned}$$

conforme (1) Teorema 6.3.6, (2) Teorema 10.1.5 (i,iv), e (3) Teorema 6.2.3.
(ii) Parte (i) diz que $B := A^*$ injetivo $\Leftrightarrow$ sobrejetividade de $B^* = (A^*)^* = A$.
(iii) Isomorfismo é linear e bijetivo (injetivo e sobrejetivo). Aplique (i) e (ii). □

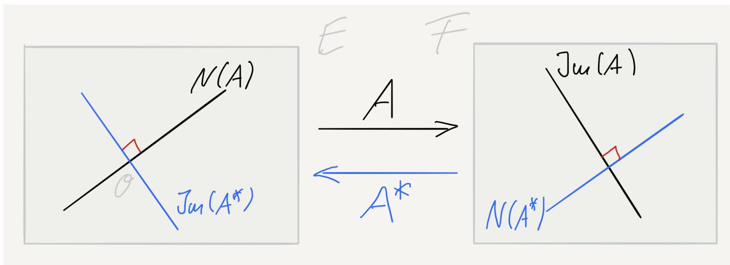

Figura 10.1: Operador A e sua adjunta A^* tem subespaços ortogonais

10.1.1 Adjunta e ortogonalidade

Teorema 10.1.7. *Seja $A^*\colon F \to E$ a adjunta de $A\colon E \to F$. Os dois subespaços naturais de E são complementos ortogonais, igualmente para F, ou seja*

$$\mathrm{N}(A) = \mathrm{Im}(A^*)^\perp, \qquad \mathrm{Im}(A) = \mathrm{N}(A^*)^\perp. \tag{10.1.3}$$

Demonstração. $v \in \mathrm{N}(A) \Leftrightarrow Av = \mathcal{O} \Leftrightarrow \forall w \in F\colon 0 = \langle w, Av\rangle = \langle A^*w, v\rangle \Leftrightarrow 0 = \langle u, v\rangle\ \forall u \in \mathrm{Im}(A^*) \Leftrightarrow: v \in \mathrm{Im}(A^*)^\perp$. Analogamente para afirmação dois. □

Corolário 10.1.8. *a) Para $A \in \mathcal{L}(E,F)$ vale igualdade* $\mathrm{posto}(A) = \mathrm{posto}(A^*)$. *b) Para $A \in \mathcal{L}(E)$ ainda os núcleos são da mesma dimensão* $\mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(A^*)$.

Demonstração. a) Segundo Teorema 10.1.7 e Proposição 9.6.4 (ii) vale

$$\dim \mathrm{Im}(A^*) = \dim \mathrm{N}(A)^\perp = \dim E - \dim \mathrm{N}(A) = \dim \mathrm{Im}(A) \tag{10.1.4}$$

onde o ultimo passo é o Teorema 6.5.1 de núcleo e imagem. b) Teorema 6.5.1 diz que $\dim \mathrm{N}(A) + \mathrm{posto}(A) = \dim E = \dim \mathrm{N}(A^*) + \mathrm{posto}(A^*)$, aplique a). □

Proposição 10.1.9. *Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ e seja $F \subset E$ um subespaço, então*

$$F \text{ subespaço invariante por } A \quad \Leftrightarrow \quad F^\perp \text{ subespaço invariante por } A^*.$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Dado $g \in F^\perp$, a mostrar: $A^*g \in F^\perp$. Seja $f \in F$, então

$$\langle f, A^*g\rangle = \langle \underbrace{Af}_{\in F}, \underbrace{g}_{\in F^\perp}\rangle = 0.$$

Como $f \in F$ foi arbitrário, segue que $A^*g \in F^\perp$.
"$\Leftarrow$" Aplique a parte já provada "$\Rightarrow$" para $G := F^\perp$ e $B := A^*$ usando que vale

$$G^\perp = (F^\perp)^\perp = F, \qquad B^* = (A^*)^* = A,$$

segundo, respectivamente, Proposição 9.6.4 (iv) e Teorema 10.1.5 (v). □

Lema 10.1.10. *Dado* $A, B \in \mathcal{L}(E)$, *então*

$$B^* A = \mathcal{O} \qquad \Rightarrow \qquad \forall v \in E\colon \; Av \perp Bv.$$

Particularmente $A^* A = \mathcal{O} \Rightarrow A = \mathcal{O}$. *$\mathcal{O}$ é a transformação nula $\mathcal{O}_{\mathcal{L}(E)}$*

Demonstração. Seja $v \in E$. Vale $\langle Av, Bv\rangle = \langle B^* Av, v\rangle = \langle \mathcal{O}v, v\rangle = \langle \mathcal{O}, v\rangle = 0$ (onde $\langle \mathcal{O}, v\rangle = \langle \mathcal{O}_E, v\rangle$). Particularmente vale $\langle Av, Av\rangle = 0$. Assim $Av = \mathcal{O}$ segundo axioma (`POS`). Como $v \in E$ foi arbitrário o operador $A = \mathcal{O}$ é nulo. □

10.1.2 Matriz da adjunta

Teorema 10.1.11 (A matriz da adjunta é a matriz transposta)**.** *Seja* $\mathbf{a} = (a_{ij}) := [A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ *a matriz de uma transformação linear* $A\colon E \to F$ *em respeito a bases ordenadas ortonormais* $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ *e* $\mathcal{Y} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$. *Então*

(i) $\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a}^t = [A^*]_{\mathcal{Y},\mathcal{X}}$

(ii) $a_{ij} = \langle \eta_i, A\xi_j\rangle$

Demonstração. (i) Seja $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ e $\mathbf{b} := [A^*]_{\mathcal{Y},\mathcal{X}}$. Segundo da definição das matrizes temos $A\xi_j = \sum_{\ell=1}^m \eta_\ell a_{\ell j}$ para $j = 1, \dots, n$ e $A^*\eta_i = \sum_{r=1}^n \xi_r b_{ri}$ para $i = 1, \dots, m$. Usando isso e axiomas (`BL,SIM`) obtemos

$$
\begin{aligned}
b_{ji} &= \sum_{r=1}^n b_{ri} \underbrace{\delta_{jr}}_{\langle \xi_j, \xi_r\rangle} = \Big\langle \xi_j, \underbrace{\sum_{r=1}^n \xi_r b_{ri}}_{A^*\eta_i} \Big\rangle = \langle A^*\eta_i, \xi_j\rangle \\
&\stackrel{4}{=} \langle \eta_i, \underbrace{A\xi_j}_{\sum_\ell \eta_\ell a_{\ell j}} \rangle = \sum_{\ell=1}^m a_{\ell j} \underbrace{\langle \eta_i, \eta_\ell\rangle}_{=\delta_{ij}} = a_{ij}
\end{aligned}
$$

onde passo 4 é Proposição 10.1.3. Bases ON são essenciais. Já provamos (ii). □

O próximo resultado re-confirma o Teorema 4.2.2 dizendo que o posto de uma matriz é igual ao posto da matriz transposta.

Corolário 10.1.12. *Consideramos uma matriz real* $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n)$ *como transformação linear* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *entre espaços cada um munido do produto euclidiano e da base canónica. Então a adjunta* $\mathbf{a}^*$ *da matriz* $\mathbf{a}$ *é a matriz transposta, em símbolos* $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^t$. *Assim* $\mathrm{posto}(\mathbf{a}) = \mathrm{posto}(\mathbf{a}^t)$.

Demonstração. Teorema 10.1.11 (ii). □

Comentário 10.1.13. As regras básicas do Teorema 10.1.5 tomam para matrizes (visto como transformações lineares e usando $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^t$) a forma seguinte

$$\mathbb{1}^t = \mathbb{1}, \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})^t = \mathbf{a}^t + \mathbf{b}^t, \quad (\alpha\mathbf{a})^t = \alpha\mathbf{a}^t, \quad (\mathbf{ba})^t = \mathbf{a}^t\mathbf{b}^t, \quad (\mathbf{a}^t)^t = \mathbf{a}.$$

Sim, estas regras prova-se mais rápido diretamente, exceto tal-vez $(\mathbf{ba})^t = \mathbf{a}^t\mathbf{b}^t$.

Comentário 10.1.14 (Injetividade e sobrejetivade de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}^t$)**.** As afirmações do Teorema 10.1.6 tomam a forma seguinte para matrizes $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n)$ – visto como transformações lineares e usando $\mathbf{a}^* = \mathbf{a}^t$.

(i) $\mathbf{a}$ injetivo $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}^t$ sobrejetivo

(ii) $\mathbf{a}$ sobrejetivo $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}^t$ injetivo

(iii) $\mathbf{a}$ isomorfismo $\Leftrightarrow$ $\mathbf{a}^t$ isomorfismo

Corolário 10.1.15. *Seja* $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n)$ *e* $b \in \mathbb{R}^m$*, então*

$$\mathbf{a}x = b \text{ possui uma solução} \qquad \Leftrightarrow \qquad b \perp \mathrm{N}(\mathbf{a}^t).$$

Demonstração. Segundo Exemplo 6.0.21 são equivalente $\mathbf{a}x = b \Leftrightarrow b \in \mathrm{Im}(\mathbf{a})$, mas $\mathrm{Im}(\mathbf{a}) = \mathrm{N}(\mathbf{a}^t)^\perp$ segundo Teorema 10.1.7. □

10.2 Fórmula para inversa à direita/esquerda

Proposição 10.2.1 (Inversas à direita e esquerda)**.** *Seja* $A \in \mathcal{L}(E, F)$*.*

a) *A sobrejetivo $\Rightarrow$ $AA^* \in \mathcal{L}(F)$ é invertível e* $A\,A^*(AA^*)^{-1} = I_F$*.*

b) *A injetivo $\Rightarrow$ $A^*A \in \mathcal{L}(E)$ é invertível e* $(A^*A)^{-1}A^*A = I_E$*.*

Demonstração. a) Segundo Teorema 10.1.6 sobrejetividade de A significa injetividade de A^*. Isso implica[3] que $AA^*\colon F \to F$ é injetivo, assim segundo Corolário 6.5.2 (dimensão igual) bijetivo, então um isomorfismo.
b) Aplique a) para $B := A^*$, use $(A^*)^* = A$, segue $BB^* = A^*A$ invertível. □

De fato, também valem as implicações opostas '$\Leftarrow$' como vamos ver no Corolário 11.4.9. O posto de AA^* e de A^*A é igual ao posto de A (Teorema 11.4.8).

Lema 10.2.2. *Dado* $A \in \mathcal{L}(E, F)$*, as restrições*

$$A|\colon \mathrm{Im}(A^*) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Im}(A), \quad A^*|\colon \mathrm{Im}(A) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Im}(A^*),$$

são isomorfismos (ainda que geralmente não são inversas um do outro).

Demonstração. É bem definido e injetivo como $\mathrm{Im}(A^*) = \mathrm{N}(A)^\perp$, então bijetivo como $\dim \mathrm{Im}(A) = \dim \mathrm{Im}(A^*)$ segundo (10.1.4). Analogamente para $A^*|$. □

Exemplo 10.2.3 (Não são inversas um do outro)**.**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \qquad A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2).$$

São invertíveis como o determinante é não-nulo, assim sobrejetivo, ou seja $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^*) = \mathbb{R}^2$, mas

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \mathbb{1}$$

então $A^* \neq A^{-1}$.

[3] Suponha $v \in \mathrm{N}(AA^*)$, ou seja $AA^*v = \mathcal{O}$, então $\mathrm{Im}(A^*) \ni A^*v \in \mathrm{N}(A) = \mathrm{Im}(A^*)^\perp$. Consequentemente $A^*v = \mathcal{O}$, então $v = \mathcal{O}$ como A^* é injetivo.

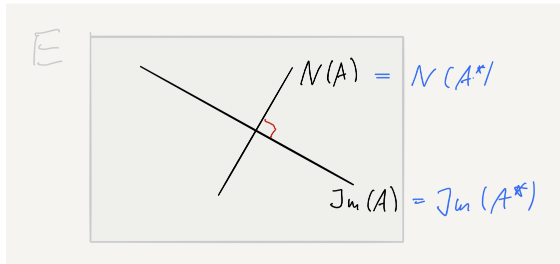

Figura 10.2: Operador normal A ($\Leftrightarrow$ A^* normal)

10.3 Traço – produto interno em $\mathcal{L}(E, F)$

Exercício 10.3.1.
Considere o produto interno no espaço vetorial $M(n \times n)$ definido por

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \operatorname{tr}\left(\mathbf{a}^t \mathbf{b}\right) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

Mostre que o subespaço $\mathcal{A}$ das matrizes anti-simétricas é o complemento ortogonal em $M(n \times n)$ do subespaço $\mathcal{S}$ das matrizes simétricas:

$$\mathcal{A} = \mathcal{S}^\perp \qquad \text{e assim } \mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = M(n \times n).$$

10.4 Operadores normais

Definição 10.4.1. Consideramos operadores lineares A em E as quais comutam com sua adjunta $AA^* = A^*A$. Tal A é chamado de **operador normal**.

Exemplo 10.4.2. São normais operadores $A \in \mathcal{L}(E)$ tais que

a) $A^* = A$; operadores auto-adjuntos

b) $A^* = A^{-1}$. operadores ortogonais

Um operador A é normal se e somente sua adjunta A^* é normal, e neste caso cada um imagem Av e A^*v tem a mesma norma. Operadores normais tem a propriedade que A e a adjunta A^* tem os mesmos autovalores e autovetores associadas, o mesmo núcleo e a mesma imagem as quais, além disso, são complementos ortogonais um do outro como ilustrado na Figura 10.2.

Exercício 10.4.3. Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ normal. Prove que

a) a adjunta A^* é normal também;

b) $|Av| = |A^*v|$ para todos os vetores v de E;

c) v autovetor de A com autovalor $\lambda \Leftrightarrow v$ autovetor de A^* com autovalor λ;

d) $\mathrm{N}(A) = \mathrm{N}(A^*)$ e $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(A^*)$. Agora lembre que $\mathrm{N}(A^*) = (\mathrm{Im}(A))^\perp$.

[Dicas: b) Calcule o quadrado com produto interno. c) $0 = |(A - \lambda I)v|^2 = \dots$. d) Para núcleo use b) e para imagem use complementos ortogonais (10.1.3).]

10.5 Exercícios

Para todos os exercícios seja E um espaço vetorial de dimensão $n < \infty$, munido de um produto interno.

1. Determine uma inversa à direita para

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2x - y - z),$$

   e uma inversa à esquerda para

$$B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y, x + 3y, 4x + y).$$

2. Dado

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

   calcule $\mathbf{a}\mathbf{a}^t$ e, a partir daí, encontre uma matriz $\mathbf{b} \in M(3 \times 2)$ tal que $\mathbf{ab} = \mathbb{1}_2$.

3. Seja P uma projeção em E ($P \in \mathcal{L}(E)$ e $P^2 = P$). Prove que a adjunta P^* também é uma projeção em E. Dê um exemplo em que $P^* \neq P$.

4. Uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ chama-se *diagonalizável* quando é semelhante a uma matriz $\mathbf{d} = (d_{ij})$ do *tipo diagonal* ($d_{ij} = 0$ se $i \neq j$), ou seja, quando existe $\mathbf{p}$ invertível tal que $\mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p} = \mathbf{d}$. Prove que:

   (a) $\mathbf{a}$ diagonalizável $\Rightarrow$ $\mathbf{a}^t$ diagonalizável.

   (b) Se a matriz do operador $A \in \mathcal{L}(E)$ relativamente a uma base de E é diagonalizável, então o é em relação a qualquer outra base.

5. Seja $A \in \mathcal{L}(E)$.

   (a) Seja $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$ e cada F_i é um subespaço invariante por A. Tome uma base ordenada $\mathcal{V}$ de E que seja uma união de bases das F_i. Determine a forma da matriz de A na base $\mathcal{V}$.

   (b) Se E possui uma base formada por autovetores de A, prove que existe também uma base de E formada por autovetores de $A^* : E \to E$. [Dica: (a).]