Capítulo 8

Subespaços invariantes

Durante[1] o presente Capítulo 8 denotamos de $A \in \mathcal{L}(E)$ uma transformação linear, alternativamente chamado de **operador linear**

$$A\colon E \to E, \qquad E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \qquad n := \dim E < \infty$$

num espaço vetorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$ e de dimensão *finita*. No inicio do capítulo a dimensão pode ser também *infinita* no qual caso usamos a notação

$$A\colon X \to X, \qquad X = (X, +, \cdot, \mathbb{K}), \qquad \dim X \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

para indicar esta generalidade maior.

Ate o fim da Seção 8.1 *Autovalores e autovetores* o corpo $\mathbb{K}$ pode ser qualquer um e a dimensão do espaço vetorial pode ser infinito.[2] Na Seção 8.2 *Polinômio caraterístico* aparece a) um polinômio e por isso suponhamos que o corpo $\mathbb{K}$ seja infinito (como explicado no Apêndice B) e aparece b) o determinante e assim a dimensão do espaço vetorial deve ser finita. Na Seção 8.3 *Existência no caso real e complexo* encontramos subespaços invariantes nos casos $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, porque temos um ótimo conhecimento quantos raizes um polinômio complexo ou real tem pelo mínimo; veja Apêndice B.

Motivação – diagonalizável e triangularizável

A matriz $[A]_{\mathcal{B}}$ de A depende da base $\mathcal{B}$ de E. Assim chegamos naturalmente ao desejo de escolher uma base $\mathcal{X}$ tal que a matriz toma uma forma simples, por exemplo uma forma diagonal

$$[A]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} =: \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]. \tag{8.0.1}$$

[1] Cap. 8 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 29 de abril de 2024

[2] exceto na parte b) da Proposição 8.1.5 quando aparece o determinante

Tal simplificação máxima, para uma matriz diagonal, é realmente possível para a classe de operadores as quais admitem uma base composto de autovetores.
Um exemplo, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, é a classe dos operadores auto-adjuntos – as quais pode-se definir depois introduzir mais uma estrutura no espaço vetorial – um chamado produto interno o que vamos estudar no Capítulo 9.
Um exemplo, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, é a classe dos operadores hermitianos as quais estudamos no Capítulo 13 junto com produtos hermitianos.

Com uma matriz diagonal ficamos muito feliz. Mas se diagonalizar não da, o próximo nível de felicidade é quando existe uma base que faz a matriz **triangular superior**, ou seja

$$[A]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{8.0.2}$$

onde os campos vazios em baixo da diagonal por convenção tem valor $0 \in \mathbb{K}$.

Definição 8.0.1. a) Uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E)$ que admite uma base $\mathcal{X}$ tal que a matriz correspondente é diagonal é chamado de **diagonalizável**.
b) Uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E)$ que admite uma base $\mathcal{X}$ tal que a matriz correspondente é triangular superior é chamado de **triangularizável**.

Subespaços invariantes

Definição 8.0.2. Um subespaço $F \subset X$ é chamado de **invariante por A** se a imagem $AF \subset F$ é contido no subespaço. Neste caso o operador linear $A|_F : F \to F$, $f \mapsto Af$, é chamado de **restrição de** A.

Exemplo 8.0.3 (Subespaços invariantes)**.** Seja $A \in \mathcal{L}(X)$.

a) $F = \{\mathcal{O}\}$ e $F = X$. (os subespaços invariantes triviais)
b) $F = \mathrm{N}(A)$, $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Fix}(A)$, $\mathrm{aFix}(A)$. (subespaços invariantes canônicos de A)

Lema 8.0.4 (Dimensão 1)**.** *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e F um subespaço de* $\dim F = 1$.

$$F \text{ invariante por } A \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda = \lambda(A) \in \mathbb{K}\colon Af = \lambda f \;\forall f \in F.$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Fixe $\xi \in F$ não-nulo, assim $\mathcal{B} = \{\xi\}$ é base de F. Seja $f \in F$ não-nulo (para $f = \mathcal{O}$ vale $A\mathcal{O} = \lambda\mathcal{O}$ para qualquer um escalar λ). Então $f = \alpha\xi$ para um único escalar não-nulo α. Como F é invariante por A temos $A\xi \in F$ e assim $A\xi = \lambda\xi$ para um único escalar $\lambda = \lambda(A, \xi)$. Vale

$$Af = A(\alpha\xi) = \alpha A\xi = \alpha(\lambda\xi) = \lambda(\alpha\xi) = \lambda f.$$

O $\lambda(A, \xi)$ depende de ξ? Repetindo o argumento para $\tilde{\xi} \in F$ não-nulo obtemos

$$Af = A(\tilde{\alpha}\tilde{\xi}) = \tilde{\alpha}A\tilde{\xi} = \tilde{\alpha}(\tilde{\lambda}\tilde{\xi}) = \tilde{\lambda}(\tilde{\alpha}\tilde{\xi}) = \tilde{\lambda}f.$$

Assim $\lambda f = \tilde{\lambda}f$. Daí $f \neq \mathcal{O}$ implica que $\lambda(A, \xi) = \tilde{\lambda}(A, \tilde{\xi})$. Então os escalares $\lambda = \tilde{\lambda}$ são iguais e não dependem nem de ξ nem de $\tilde{\xi}$, só de A.
"$\Leftarrow$" Um subespaço é fechado sob multiplicação escalar. $\square$

Lema 8.0.5 (Dimensão 2)**.** *Seja $\{u, v\} \subset X$ um subconjunto LI, então*

$$\langle u, v\rangle \textit{ invariante por } A \quad \Leftrightarrow \quad Au, Av \in \langle u, v\rangle.$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Invariância por A junto com o fato que $u, v \in \langle u, v\rangle$.
"$\Leftarrow$" Como $\mathcal{B} = \{u, v\}$ é uma base de $\langle u, v\rangle$, todo $f \in \langle u, v\rangle$ é da forma $f = \alpha u + \beta v$ para escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Assim $Af = \alpha Au + \beta Av$ é elemento de $\langle u, v\rangle$, porque Au e Av são e porque o subespaço $\langle u, v\rangle$ é fechado sob $\cdot$ e $+$. □

8.1 Autovalores e autovetores

Definição 8.1.1 (autovalor, autovetores, spectro)**.** Seja $A \in \mathcal{L}(X)$.

a) Por definição chama-se um vetor não-nulo

$$v \in X \setminus \{\mathcal{O}\} \textbf{ autovetor de } \boldsymbol{A} \qquad :\Leftrightarrow \qquad \exists \lambda \in \mathbb{K}\colon Av = \lambda v$$

em palavras, se a imagem Av é um múltiplo de v. Neste caso o escalar λ é chamado de **autovalor de** $\boldsymbol{A}$ e v um **autovetor associado a** $\boldsymbol{\lambda}$. Às vezes é pratico denotar um autovetor associado a λ da forma v_λ.

b) O **spectro de** $\boldsymbol{A}$ é o conjunto composto de

$$\{\text{todos os autovalores de } A\} =: \operatorname{spec} A.$$

Observação 8.1.2. Tendo em vista o Lema 8.0.4 podemos resumir

$$\text{achar autovetores} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{achar subespaços invariantes de dimensão 1.}$$

Exercício 8.1.3 (Autovetores não são únicos)**.**

a) Os múltiplos não-nulos de um autovetor são autovetores .

b) Somas de autovetores associados ao mesmo autovalor λ são autovetores.

Definição 8.1.4 (Autosubespaço e multiplicidade geométrica)**.** Seja $A \in \mathcal{L}(X)$.

a) Dado um autovalor λ de A, então o conjunto

$$E_\lambda = E_\lambda(A) := \{\text{todos os autovetores de } A \text{ associado a } \lambda\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

é um subespaço de X chamado de **autosubespaço** associado ao autovalor λ. Note que $E_\lambda \neq \{\mathcal{O}\}$.

b) A **multiplicidade geométrica** de um autovalor λ é a dimensão

$$g_\lambda = g_\lambda(A) := \dim E_\lambda$$

do autosubespaço.

Proposição 8.1.5. *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e $\lambda \in \operatorname{spec} A$, então valem os seguintes:*

a) $E_\lambda = \mathrm{N}(\lambda I_X - A)$;

b) $\lambda \in \operatorname{spec} A \Leftrightarrow \lambda I_X - A$ *não admite inversa;*

c) $E_\lambda \subset X$ *é subespaço invariante por* $A \in \mathcal{L}(X)$;

d) $\forall \xi \in E_\lambda \setminus \{\mathcal{O}\}$: *o subespaço* $\langle \xi \rangle$ *é invariante por* $A \in \mathcal{L}(X)$;

e) *Um subespaço* 1*-dimensional invariante por* A *é composto de autovetores.*

Demonstração. Abreviamos I_E e I_X de I.
a) $Av = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda I - A)v = \mathcal{O}$.
b) $\lambda \in \operatorname{spec} A \Leftrightarrow Av = \lambda v$ para um $v \neq \mathcal{O} \Leftrightarrow (\lambda I - A)v = \mathcal{O}$ para um $v \neq \mathcal{O}$ $\Leftrightarrow \lambda I - A$ não injetivo $\Leftrightarrow \lambda I - A$ não invertível (Cor. 6.5.2 e Prop. 6.4.4).
c) Para $v \in E_\lambda$ vale $Av = \lambda v \in E_\lambda$ como o subespaço E_λ é fechado sob "·".
d) Seja $\alpha\xi \in \langle \xi \rangle$, então $A(\alpha\xi) = \alpha A\xi = \alpha\lambda\xi \in \langle \xi \rangle$.
e) Lema 8.0.4. □

Teorema 8.1.6 (Autovetores associado a autovalores diferentes são LI)**.** *Se* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *são autovalores dois-a-dois diferentes de* $A \in \mathcal{L}(X)$*, então qualquer escolha* $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ *de autovetores associados forma um conjunto LI.*

Demonstração. Indução sobre o número k de autovalores.
$\boldsymbol{k = 1}$. Como é autovetor ξ_1 é não-nulo, assim $\{\xi_{\lambda_1}\}$ é LI.
$\boldsymbol{k - 1 \Rightarrow k}$. Dado escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, suponhamos que

$$\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_k\xi_k = \mathcal{O}.$$

Aplicamos A para obtemos

$$\alpha_1 \underbrace{A\xi_1}_{\lambda_1\xi_1} + \cdots + \alpha_k \underbrace{A\xi_k}_{\lambda_k\xi_k} = A\mathcal{O} = \mathcal{O}.$$

Adicionamos a esta equação $(-\lambda_k)$ vezes a equação anterior, obtemos

$$\alpha_1(\underbrace{\lambda_1 - \lambda_k}_{\neq 0})\xi_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\underbrace{(\lambda_{k-1} - \lambda_k)}_{\neq 0}\xi_{k-1} + \mathcal{O} = \mathcal{O}.$$

Pela hipótese $k-1$ da indução $\{\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}\}$ é LI, então cada um coeficiente anula-se, consequentemente $0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1}$. Com estes valores a equação no inicio da indução reduz-se a $\alpha_k\xi_k = \mathcal{O}$, então como um autovetor não se anula segue que $\alpha_k = 0$ segundo (1.1.3). □

Corolário 8.1.7 (Não tem mais autovalores como $\dim E$)**.**

$$n := \dim E \qquad \Rightarrow \qquad |\operatorname{spec} A| \leq n.$$

Demonstração. Se por absurdo $|\operatorname{spec} A| > n$, então segundo Teorema 8.1.6 pode-se escolher um conjunto LI composto de mais como $\dim E$ elementos. Mas isso contradiz Corolário 3.1.15. □

Exemplos

Exemplo 8.1.8. Para $A \in \mathcal{L}(X)$ tem-se autosubespaços

$$\mathrm{N}(A) = E_0, \qquad \mathrm{Fix}A = E_1, \qquad \mathrm{aFix}A = E_{-1},$$

sempre se um dos três subespaços é não -trivial.

Exemplo 8.1.9 (Rotações, reflexões, cisalhamento)**.** Denotamos de A o operador linear na consideração e de E, F subespaços invariantes por A dos quais E tem dimensão 1 – então E é autosubespaço, enquanto F não necessariamente é.

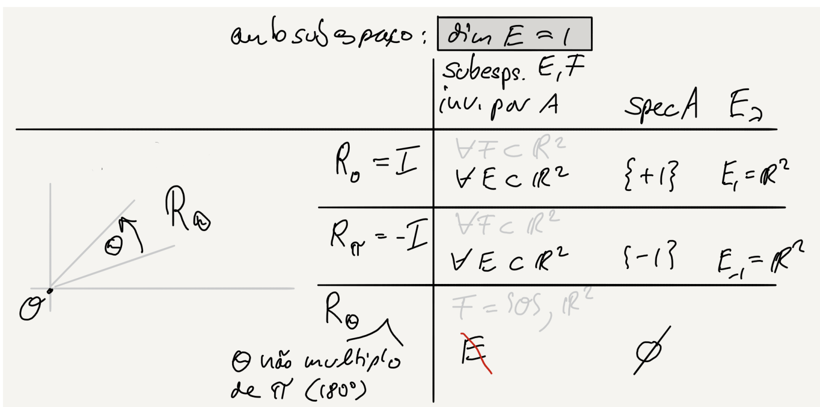

Figura 8.1: Rotação R_θ no plano pelo ângulo θ

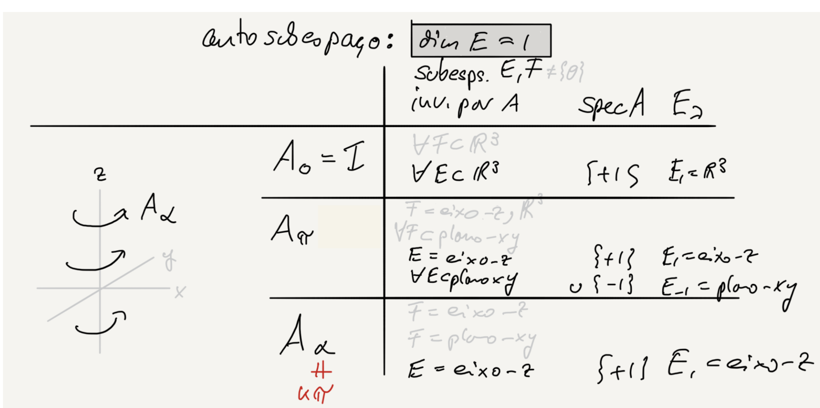

Figura 8.2: Rotação A_α no espaço em torno do eixo z pelo ângulo α

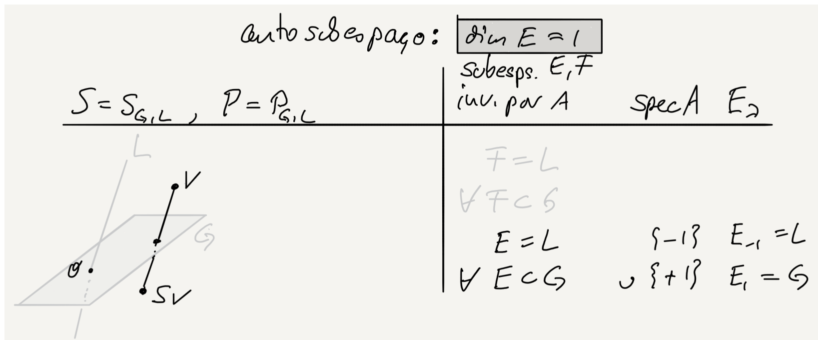

Figura 8.3: Reflexão $S = 2P - I$ sobre G paralelamente L

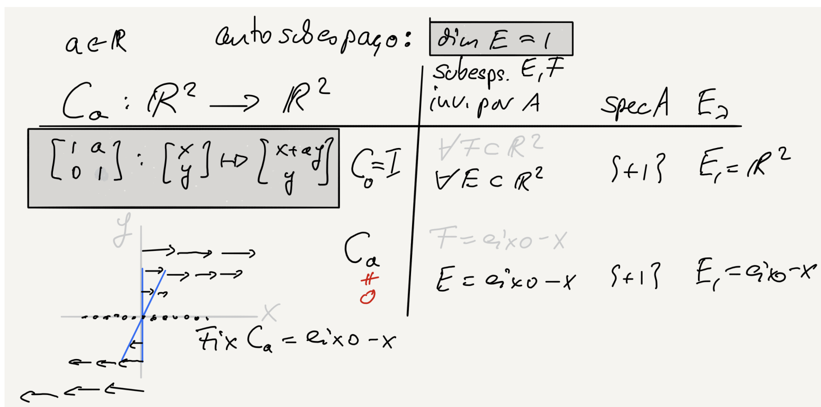

Figura 8.4: Cisalhamento $C_a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado $a \in \mathbb{R}$

Diagonalização

Corolário 8.1.10 (Diagonalizável)**.** *Se $A \in \mathcal{L}(E)$ possui $n = \dim E < \infty$ autovalores dois-a-dois diferentes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, então obtém-se uma matriz diagonal*

$$[A]_{\mathcal{X}} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

veja (8.0.1), para qualquer seleção $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de autovetores associados.

Demonstração. A i-ésima coluna da matriz $[A]_{\mathcal{X}}$ é composto dos coeficientes de

$$A\xi_i = \lambda_i \xi_i = \xi_1 \cdot 0 + \cdots + \xi_{i-1} \cdot 0 + \xi_i \cdot \lambda_i + \xi_{i+1} \cdot 0 + \cdots + \xi_n \cdot 0$$

veja (5.2.1). □

O exercício seguinte diz que um operador $A \in \mathcal{L}(E)$ é diagonalizável se, e somente se, existe uma base $\mathcal{B}$ de E composto de autovetores de A.

Exercício 8.1.11 (Matrizes diagonais)**.** Mostre o seguinte.

(i) A matriz de um operador $A \in \mathcal{L}(E)$ em respeito a uma base $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ composto de autovetores é a matriz diagonal

$$[A]_{\mathcal{X}} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

cujas entradas ao longo da diagonal são os autovalores correspondentes.

(ii) Vice versa, se a matriz de um operador $A \in \mathcal{L}(E)$ em respeito a uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de E já é uma matriz diagonal

$$[A]_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}[a_{11}, \dots, a_{nn}]$$

então cada um elemento a_{ii} na diagonal é autovalor de A e ξ_i é autovetor.

Comentário 8.1.12 (Matrizes triangulares – autovalores ainda na diagonal)**.** Se a matriz $[A]_{\mathcal{B}}$ só é triangular cada um elemento a_{ii} na diagonal contínua ser autovalor de A, mas os elementos da base $\mathcal{B}$ geralmente não são mais autovetores. Em vez de construir para os a_{ii} autovetores a mão, é recomendável esperar à introdução do polinômio característico, veja Lema 8.2.3.

Aplicação: calculação de potência de operadores

Seja $\mathcal{B}$ uma base de E e seja $\mathcal{X}$ uma base composto de autovetores do operador $A \in \mathcal{L}(E)$ com autovalores associados λ_i. Então

$$\mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = [A]_{\mathcal{X},\mathcal{X}} = [I_E]_{\mathcal{B},\mathcal{X}} \, [A]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \, [I_E]_{\mathcal{X},\mathcal{B}}$$

em outros símbolos, denotando de $\mathbf{p} = [I_E]_{\mathcal{X},\mathcal{B}}$ a matriz de passagem

$$\mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p}, \quad \mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \, .$$

Resolvemos para $\mathbf{a} = \mathbf{p}^{-1}\mathrm{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] \, \mathbf{p}$ o que, para $k \in \mathbb{N}$, traduz em

$$\mathbf{a}^k = \mathbf{p} \, \mathrm{diag}[\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k] \mathbf{p}^{-1}.$$

Observe que no lado direito só temos que multiplicar três matrizes. O Exercício 1 na Seção 8 ilustra esta técnica de calcular potências de matrizes e operadores.

8.2 Polinômio característico

Nesta Seção 8.2, como utilizamos o determinante, suponhamos que E é um espaço vetorial de dimensão n finita e para podermos trabalhar com polinômios suponhamos que o corpo $\mathbb{K}$ seja infinito, veja Apêndice B.

Teorema 8.2.1 (Polinômio característico)**.** *Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ um operador linear.*
a) As raízes[3] *do* ***polinômio característico*** *de A*

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &:= \det(\lambda I_E - A) && ,\ \lambda \in \mathbb{K} \\ &= \det(\lambda \mathbb{1}_n - \mathbf{a}) && ,\ \mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B}} \\ &=: p_{\mathbf{a}}(\lambda) \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

onde $\mathcal{B}$ é qualquer base ordenada de E, são os autovalores de A, assim

$$\operatorname{spec} A = \{\lambda_0 \in \mathbb{K} \mid p_A(\lambda_0) = 0\}.$$

A ***ordem*** *m de uma raíz λ_0,*[4] *veja (B.3.1), chama-se de* ***multiplicidade algébrica*** *do autovalor λ_0 e usamos o símbolo $\operatorname{alg}_{\lambda_0} := m$.*
b) Dada uma matriz quadrada $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K})$, então o polinômio $p_{\mathbf{a}} \in \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ é mónico e de grau n.

Demonstração. a) Segundo Proposição 8.1.5 b) vale que $\lambda \in \operatorname{spec} A \Leftrightarrow \lambda I_E - A$ não é invertível. Mas isso é equivalente que o determinante do operador anula-se, ou seja $\det(\lambda I_E - A) = \det(\lambda \mathbb{1}_n - [A]_{\mathcal{B}}) = 0$, veja Teorema A.4.5.

b) Segue da fórmula (D.3.1) em [Sal19] a qual não vale só para o corpo $\mathbb{R}$, mas também para gerais corpos infinitos $\mathbb{K}$. □

Comentário 8.2.2 (A convenção (8.2.1) faz $p_A(\lambda)$ mónico)**.** Uns autores usam a ordem oposta $\det(A - \lambda I_E)$ o que difere de $p_A(\lambda)$ por um fator $(-1)^n$, veja por exemplo [Sal19, Ap. D.3]. No todo caso as raízes são as mesmas. Mas o polinômio $p_A(\lambda)$ é mónico, veja Definição B.3.3, o outro só quando n é par.

Teorema 8.2.1 reduze existência de autovalores, então autovetores (ou equivalentemente subespaços invariantes de dimensão 1), a existência de raízes de um polinômio com coeficientes em $\mathbb{K}$ e de grau $n = \dim E$. Nos casos importantes $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tratados na Seção 8.3, tem-se conhecimento ótimo sobre raízes, veja Apêndice B.4.

Lema 8.2.3. *Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ e seja $\mathcal{B}$ base de E. Se a matriz $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B}}$ é triangular, então os elementos $a_{ii} \in \mathbb{K}$ da diagonal são autovalores do operador A.*

Demonstração. O determinante de uma matriz triangular

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1}_n - \mathbf{a}) = (\lambda - a_{11}) \cdots (\lambda - a_{nn})$$

é o produto dos elementos da diagonal. □

[3] as **raízes** de um polinômio p são os pontos λ nos quais o polinômio anula-se $p(\lambda) = 0$
[4] o maior inteiro m tal que $p_{\mathbf{a}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m \cdot q(\lambda)$, onde $q(\lambda)$ é ainda um polinômio

Lema 8.2.4 (Polinômio característico da inversa)**.** *Para* $A \in \mathcal{L}(E)$ *invertível*

$$p_{A^{-1}}(\lambda) = \tfrac{(-\lambda)^{\dim E}}{\det A} \cdot p_A(\tfrac{1}{\lambda}).$$

Demonstração. $p_{A^{-1}}(\lambda) \det A = \det((\lambda I_E - A^{-1})A) = \det(-\lambda(\tfrac{1}{\lambda} I_E - A))$. □

Lema 8.2.5 (Restrição a subespaço invariante – divisor)**.** *Dado um operador linear* $A\colon E \to E$ *e um subespaço invariante* $F \subset E$*. Seja* $A'\colon F \to F$ *a restrição de* A*. Então o polinômio característico* $p_{A'}$ *é um divisor do polinômio característico* p_A*, ou seja*

$$p_A(\lambda) = p_{A'}(\lambda) \cdot q(\lambda)$$

para um polinômio $q(\lambda)$*.*

Demonstração. Seja $\mathbf{a}'$ a matriz de A' numa base $\mathcal{B}'$ de F e $\mathbf{a}$ a matriz de A numa base $\mathcal{B}$ contendo $\mathcal{B}'$. Seja $k = \dim F$ e $n = \dim E$, então

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}' & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{pmatrix}, \qquad \lambda \mathbb{1}_n - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbb{1}_k - \mathbf{a}' & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \lambda \mathbb{1}_{n-k} - \mathbf{c} \end{pmatrix}.$$

A fórmula (A.4.2) do determinante de uma matriz triangular de blocos diz que

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) :&= \det(\lambda \mathbb{1}_n - \mathbf{a}) \\ &= \det(\lambda \mathbb{1}_k - \mathbf{a}') \cdot \det(\lambda \mathbb{1}_{n-k} - \mathbf{c}) \\ &= p_{A'}(\lambda) \cdot q(\lambda) \end{aligned}$$

onde $q(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1}_{n-k} - \mathbf{c})$. □

Multiplicidades – desigualdade e igualdade

Proposição 8.2.6 (Desigualdade)**.** *Para os autovalores* $\lambda_0 \in \operatorname{spec} A$ *vale que*

$$g_{\lambda_0} := \dim E_{\lambda_0} \le \mathrm{alg}_{\lambda_0}. \tag{8.2.2}$$

- **Igualdade** vale, segundo Proposição 8.2.7, para operadores auto-adjuntos (Teorema 11.3.3), ortogonais,[5] hermitianos, e unitários.
- **Desigualdade estrita** tem-se para o cisalhamento $C_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, veja Figura 8.4. No caso C_1 o leitor pode verificar que $g_1 = 1 < 2 = \mathrm{alg}_1$.

Demonstração. Como E_{λ_0} é um subespaço invariante de A (Proposição 8.1.5) consideramos a restrição A' de A a E_{λ_0} a qual $A' = \lambda_0 I\colon E_{\lambda_0} \to E_{\lambda_0}$ é multiplicação por λ_0. Note que o polinômio característico da restrição é

$$p_{A'}(\lambda) = \det\left(\lambda I_{E_{\lambda_0}} - \lambda_0 I_{E_{\lambda_0}}\right) = (\lambda - \lambda_0)^{g_{\lambda_0}}.$$

[5] Isso nao implica diagonalizável, poderia ter 'falta' de autovalores: A rotação por $\theta = \pi/2$ no plano é ortogonal mas não possui autovalores (reais).

Pelo Lema 8.2.5 o polinômio característico de A é um múltiplo do polinômio característico da restrição A', ou seja

$$p_A(\lambda) = p_{A'}(\lambda) \cdot q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{g_{\lambda_0}} \cdot q(\lambda)$$

para um polinômio $q(\lambda)$. Mas q também poderia ter, ou não, uma raíz no ponto λ_0 e consequentemente ser da forma $q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \cdot \tilde{q}(\lambda)$ para um polinômio $\tilde{q}$, veja Teorema B.3.1. Isso prova que a ordem da raíz λ_0 do polinômio característico de A é pelo menos g_{λ_0}. □

Proposição 8.2.7 (Igualdade)**.** *Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ um operador linear. Suponha que $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ é uma base de E composto de autovetores de A. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ os autovalores (2-a-2 diferentes) de A. Então vale que*

$$E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} = E, \qquad g_{\lambda_i} = \mathrm{alg}_{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Além disso o subconjunto $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ composto dos autovetores associados ao autovalor λ_i é uma base do autosubespaço E_{λ_i}.

Demonstração. Conforme Teorema 8.1.6 a soma é direta $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} \subset E$. Daí $g_{\lambda_1} + \cdots + g_{\lambda_r} \le \dim E = n$. Seja F_i o subespaço gerado por $\mathcal{B}_i$. Como $\mathcal{B}_i \subset E_{\lambda_i}$ segue a inclusão $F_i \subset E_{\lambda_i}$ e daí $|\mathcal{B}_i| \le g_{\lambda_i}$. Obtemos as duas desigualdades

$$n = |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_1| + \cdots + |\mathcal{B}_r| \le g_{\lambda_1} + \cdots + g_{\lambda_r} \le n. \tag{8.2.3}$$

As duas desigualdades em (8.2.3) são igualdades. Daí $\dim(E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}) = \dim E$ e por isso $E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r} = E$ segundo Teorema 3.2.1 (d). Além disso as quatro igualdades em (8.2.3), junto com $0 \le |\mathcal{B}_i| \le g_{\lambda_i}$, mostram que $|\mathcal{B}_i| = g_{\lambda_i}$ para todos os i. Por isso $F_i = E_{\lambda_i}$ e $\mathcal{B}_i$ é base de E_{λ_i}. De (8.2.2) obtemos

$$n = g_{\lambda_1} + \cdots + g_{\lambda_r} \le \mathrm{alg}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{alg}_{\lambda_r} \le \deg(p_A) = n$$

onde a ultima desigualdade é o fato que um polinômio não tem mais raízes como indica o seu grau. As desigualdades são igualdades e, junto com $0 \le g_{\lambda_i} \le \mathrm{alg}_{\lambda_i}$, segue que $g_{\lambda_i} = \mathrm{alg}_{\lambda_i}$ para todos os i. □

Operadores reais

Existência de um autovalor na dimensão impar

Teorema 8.2.8. *Cada um operador linear num espaço vetorial real de dimensão impar possui pelo menos um autovalor.*

Demonstração. O polinômio característico é um polinômio real de *grau impar* e assim possui pelo menos uma raíz. □

Na dimensão par já temos visto na Figura 8.1 exemplos sem autovalores: quase todas rotações no plano.

Triangularizável

Teorema 8.2.9. *Um operador linear num espaço vetorial real E de dimensão n cujo polinômio característico $\mathbf{p}_A$ possui n raízes (reais e contadas com multiplicidade)*[6] *é triangularizável.*

O cisalhamento $C_a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, veja Figura 8.4, é triangular e e seu polinômio característico tem duas raízes. Como o único subespaço invariante de dimensão 1 é o eixo-x o cisalhamento não é diagonalizável.

O polinômio característico na dimensão 2

Começamos com uma preparação técnica.

Lema 8.2.10. *Seja $\mathcal{U} = \{\xi_1, \xi_2\} \subset E$ LI e $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, então o conjunto*

$$\{\underbrace{a\xi_1 + b\xi_2}_{=:v_1}, \underbrace{c\xi_1 + d\xi_2}_{=:v_2}\} \text{ é LD} \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc = 0.$$

Demonstração. Provamos que LI é equivalente a desigualdade $\neq 0$. Seja $F := \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$ com base $\mathcal{U}$ e seja $G := \langle v_1, v_2 \rangle$. Então LI significa que o operador linear $A : F \to G$ definido por $A\xi_1 = v_1$ e $A\xi_2 = v_2$, assim levando base em base, é um isomorfismo segundo Teorema 6.4.7. Mas isso é equivalente a sua matriz $[A]_{\mathcal{U}}$ ser invertível e isso a seu determinante não ser nulo $0 \neq \det [A]_{\mathcal{U}} = ad - bc$. $\square$

Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ um operador linear e $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2\}$ uma base de E. Escrevemos

$$\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}$$

e calculamos

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) := \det \begin{bmatrix} \lambda - \alpha & -\gamma \\ -\beta & \lambda - \delta \end{bmatrix} &= (\lambda - \alpha)(\lambda - \delta) - \beta\gamma \\ &= \lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + \alpha\delta - \beta\gamma \\ &= \lambda^2 - (\operatorname{tr} \mathbf{a})\lambda + \det \mathbf{a} \\ &= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A. \end{aligned} \tag{8.2.4}$$

Note que traço e determinante de $[A]_{\mathcal{B}}$ não dependem da escolha da base $\mathcal{B}$; veja (5.4.1) e (5.3.4).
As colunas da matriz $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B}}$ são os coeficientes de $A\xi_1 = \xi_1\alpha + \xi_2\beta$ e de $A\xi_2 = \xi_1\gamma + \xi_2\delta$ segundo definição (5.2.1). Para $\lambda \in \mathbb{K}$ e $I = I_E$ obtemos

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)\xi_1 &= (\lambda - \alpha)\xi_1 - \beta\xi_2 =: v_1, \\ (\lambda I - A)\xi_2 &= -\gamma\xi_1 + (\lambda - \delta)\xi_2 =: v_2. \end{aligned}$$

[6] equivalentemente o polinômio característico é o produto de fatores reais do primeiro grau

Obtemos as três equivalências seguintes usando, respectivamente, Proposição 8.1.5 b), o fato que $\{\xi_1, \xi_2\}$ é base, e Lema 8.2.10, a saber

$$\begin{aligned}\lambda \in \operatorname{spec} A &\Leftrightarrow \lambda I - A \in \mathcal{L}(E) \text{ não é um isomorfismo}\\ &\Leftrightarrow \{v_1, v_2\} \text{ é LD}\\ &\Leftrightarrow 0 = (\lambda-\alpha)(\lambda-\delta) - \beta\gamma \overset{(8.2.4)}{=} p_A(\lambda).\end{aligned}$$

Em resumo, na dimensão dois temos mostrado

$$\lambda \in \operatorname{spec} A \quad \text{(ou seja } \lambda \text{ autovalor)} \qquad \Leftrightarrow \qquad p_A(\lambda) = 0.$$

Teorema 8.2.11 ($\dim E = 2$)**.** *Dado um operador linear $A \in \mathcal{L}(E)$, então as raízes do* ***polinômio característico de A***

$$p_A \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad \lambda \mapsto \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$$

onde

$$\operatorname{tr} A := \operatorname{tr}\, [A]_{\mathcal{B}}\,, \quad \det A := \det\,[A]_{\mathcal{B}}$$

são os autovalores de A, assim $\operatorname{spec} A = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid p_A(\lambda) = 0\}$.

Comentário 8.2.12 (Corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)**.** As raízes de um polinômio real quadrático

$$ax^2 + bx + c = 0$$

existem no caso $b^2 \geq 4ac$ e são dados pela fórmula

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \textbf{no caso } \boldsymbol{a = 1}\textbf{:} \;\; x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \tag{8.2.5}$$

Exemplo 8.2.13. Determine o spectro e os autosubespaços da matriz real

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uma solução. Passo 1 – autovalores. Temos que determinar, se existir, os autovalores as quais são as raízes reais do polinômio característico

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{a}}(\lambda) :&= \lambda^2 - (\operatorname{tr} \mathbf{a})\lambda + \det \mathbf{a}\\ &= \lambda^2 - (4+2)\lambda + (4 \cdot 2 - 1 \cdot 3)\\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 5. \end{aligned}$$

Encontramos as raízes através da fórmula (8.2.5) obtendo

$$\lambda_\pm = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = 3 \pm 2, \qquad \lambda_- = 1, \quad \lambda_+ = 5.$$

Assim $\operatorname{spec} \mathbf{a} = \{1, 5\}$.

Passo 2 – autosubespaços. Isto é o núcleo da matriz $\lambda \mathbb{1} - \mathbf{a}$ para $\lambda = 1, 5$.

$E_1 = \mathrm{N}(\mathbb{1}-\mathbf{a})$: Depois calcular a matriz $\mathbb{1}-\mathbf{a}$ escalonamos ela e resolvemos de baixo para cima, veja Exemplo 6.6.2. Ou seja

$$\mathbb{1}-\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(oe)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(oe)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O SL obtida é $x + y = 0$ e assim $y = -x$ para $x \in \mathbb{R}$. Assim $E_1 = \mathbb{R}(1, -1)$.
$E_5 = \mathrm{N}(5\mathbb{1}-\mathbf{a})$: Analogamente

$$5\mathbb{1}-\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(oe)}} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O SL obtida é $x - 3y = 0$ e assim $x = 3y$ para $y \in \mathbb{R}$. Assim $E_5 = \mathbb{R}(3, 1)$.

Comentário 8.2.14 (Truque de autovetores)**.** Seja $\mathbf{a}$ uma matriz real 2×2 não-nula e λ um autovalor (real ou complexo). Então

$$\lambda\mathbb{1}-\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ * & * \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

se a primeira linha não é nula. Caso a primeira linha é nula, use a segunda linha, dizemos (γ, δ), para obter um autovetor $(-\delta, \gamma)$.

Demonstração. Como λ é autovalor, a matriz $\lambda\mathbb{1}-\mathbf{a}$ nao é invertível. Daí as duas linhas são LD, e a segunda é um múltiplo (real ou complexo) da primeira

$$\lambda\mathbb{1}-\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ c\alpha & c\beta \end{bmatrix}.$$

O vetor $(-\beta, \alpha)$ está no núcleo desta matriz. □

Exercício 8.2.15. Determine autovalores e autosubespaços do operador linear

$$A\colon \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R}), \quad a + bx \mapsto (4a + 3b) + (a + 2b)x.$$

8.3 Existência no caso real e complexo

Nesta seção restringimos a espaços vetoriais reais ou complexos ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) de dimensão finita n e a operadores lineares A em E, ou seja $A \in \mathcal{L}(E)$.

Caso real

Teorema 8.3.1 (Existência)**.** *Um operador linear A num espaço vetorial real E de dimensão finita admite um subespaço invariante F de dimensão 1 ou 2.*

Demonstração. Teorema C.5.1 □

A rotação R_θ no plano por um ângulo θ, não um múltiplo inteiro de π, em símbolos $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, não tem um subespaço invariante de dimensão 1, mas de dimensão 2 – o plano mesmo. O cisalhamento $C_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, veja Figura 8.4, tem um subespaço invariante de dimensão 1, o eixo x, mas não de dimensão 2.

Caso complexo

Teorema 8.3.2 (Existência)**.** *Um operador linear A num espaço vetorial complexo E de dimensão finita admite um subespaço invariante F de dimensão* 1*. Equivalentemente A admite um autovalor.*

Demonstração. O polinômio característico $p_A(\lambda)$ é um polinômio complexo e assim possui uma raiz segundo Teorema B.4.1. $\square$

8.4 Exercícios

1. Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (3x + y, 2x + 2y)$.

   (a) Mostre que 4 e 1 são autovalores de A.

   (b) Ache uma base ordenada $\mathcal{B} = (u, v)$ de $\mathbb{R}^2$ tal que
   $$Au = 4u \qquad \text{e} \qquad Av = v.$$

   (c) Dada a matriz $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, ache uma matriz invertível $\mathbf{p}$ tal que
   $$\mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (d) Calcule A^{10}.

2. Dado $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, determine os subespaços de $\mathbb{R}^3$ invariantes por
   $$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad v \mapsto a \times v,$$
   onde o produto vetorial $\times$ é definido no Exercício 5.4.5.

3. Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ operadores que *comutam*: $AB = BA$. Prove que

   (a) $\mathrm{N}(B)$ e $\mathrm{Im}(B)$ são subespaços invariantes por A;

   (b) se F é um subespaço invariante por A, então $BF := \{Bf : f \in F\}$ é ainda um subespaço invariante por A.

4. Dado $A \in \mathcal{L}(E)$ e um polinômio $p = p(x)$, prove que núcleo e imagem do operador $p(A) \in \mathcal{L}(E)$ (Definição C.5.2) são subespaços invariantes por A.

5. Mostre que o operador derivação no espaço $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios reais
   $$D : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad p(x) \mapsto p'(x) := \tfrac{d}{dx}p(x)$$
   tem spectro $\{0\}$ e $E_0 = \mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ é composto dos polinômios constantes.

6. Seja $A \in \mathcal{L}(E)$, prove que

   (a) A invertível $\iff$ A não possui autovalor 0;
   (b) se A é invertível, então os autovetores de A e A^{-1} coincidem. E os autovalores?

7. Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o operador linear cuja matriz na base canônica tem todas as entradas iguais a 1. Prove que

   (a) $\text{posto}(A) = 1$;
   (b) $\mathbb{R}^n = \mathrm{N}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$;
   (c) os autovalores de A são 0 e n;
   (d) os autovetores de A pertencem a $\mathrm{N}(A)$ ou a $\mathrm{Im}(A)$.

   Exiba uma base de $\mathbb{R}^n$ na qual a matriz de A tem $n^2 - 1$ zeros.

8. Mostre que todo operador $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de posto 1 possui um autovetor v cujo autovalor λ é o traco de A.

Parte V

Apêndices

Apêndice B

Polinômios

Suponhamos[1] durante todo o Apêndice B que

$$\mathbb{K} \text{ é um corpo infinito} \quad (\text{em símbolos } |\mathbb{K}| = \infty) \tag{B.0.1}$$

ou seja, o número de elementos de $\mathbb{K}$, denotado por $|\mathbb{K}|$, dever ser infinito. Esta hipótese garante que os monômios formam uma base para o espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ de polinômios; veja Teorema B.1.2.[2] Corpos infinitos incluem corpos mais importantes como os números reais e os números complexos

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

mas não incluem os corpos $\mathbb{Z}_p$ com p primo.

Neste Apêndice B seguimos o livro texto excelente [Koe85].

Definição B.0.1 (Polinômio)**.** Uma função $p\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ dada por uma soma finita

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k, \qquad x \in \mathbb{K}$$

onde os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são elementos do corpo $\mathbb{K}$, uma tal função p é chamada de **polinômio** com coeficientes em $\mathbb{K}$ ou **polinômio sobre** $\mathbb{K}$.

No caso $\alpha_k = 1$ o polinômio p é chamado de **mónico**. No caso $\alpha_k \neq 0$ o exponente k é chamado de **grau do polinômio**, símbolo $\deg(p) := k$. Seja

$$\mathcal{P}(\mathbb{K})$$

o conjunto composto de todos os polinômios sobre $\mathbb{K}$.[3]

Os polinômios constantes correspondem aos elementos do corpo $\mathbb{K}$. Por isso faz sentido considerar o corpo $\mathbb{K}$ como subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

---

[1] Ap. B de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 29 de abril de 2024

[2] Em $\mathbb{Z}_3$, os polinômios $2x^2+x^3$ e $2x+2x^2+2x^3$, visto como funções $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$ na variável x, são iguais (ambos tomam valor 0 em $x=0,1$ e valor 1 em $x=2$) ainda que os coeficientes são diferentes $(0,2,1$ e $2,2,2)$. Claramente tal ambiguidade não é desejável. Em $\mathbb{Z}_2$ o polinômio $x+x^2$ é constantemente nulo ainda que os coeficientes em frente dos monômios não são nulos.

[3] Tem-se uma inclusão $\mathcal{P}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{K})$ no espaço vetorial das funções $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ graças à infinidade de $\mathbb{K}$ a qual evita o problema exposto no rodapé anterior.

B.1 Espaço vetorial

Lema B.1.1. *$\mathcal{P}(\mathbb{K})$ é subespaço do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{K})$ em Exercício 1.2.10.*

Demonstração. $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ é fechado sob adição e sob multiplicação escalar. □

Teorema B.1.2. *Os monômios $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ formam uma base de $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.*

Demonstração. Gera: Verdadeiro por definição de polinômio. LI: Escolha uma CL de monômios e suponha que é igual ao polinômio nulo. Adicionando termos da forma $0 \cdot x^i$, se necessário, temos a hipótese

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k = 0$$

para todos os $x \in \mathbb{K}$. Como o corpo $\mathbb{K}$ é infinito conforme hipótese B.0.1, podemos escolher $k+1$ elementos dois-a-dois diferentes $x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathbb{K}$. Temos

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 {x_j}^2 + \cdots + \alpha_k {x_j}^k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k+1$$

Consideramos isto como um sistema linear de $k+1$ equações nas $k+1$ incógnitas $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$. O determinante da matriz A de coeficientes é o determinante de Vandermonde, em símbolos $\det A = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})$, a qual não é nula conforme Teorema A.4.6. Assim o sistema linear $A\alpha = \mathcal{O}$, onde $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$, admite a solução única $\alpha = A^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}$ trivial. □

B.2 Anel

Definimos o produto de dois polinômios

$$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k, \qquad q(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_\ell x^\ell$$

através de calculação distributiva, ou seja

$$(pq)(x) := p(x)q(x) := \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_{k+\ell} x^{k+\ell}, \qquad x \in \mathbb{K} \tag{B.2.1}$$

onde $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0$, $\gamma_1 = \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0$, $\dots$, $\gamma_{k+\ell} = \alpha_k\beta_\ell$. O coeficiente geral γ_m é a soma de todos produtos $\alpha_i\beta_j$ com $0 \le i \le k$, $0 \le j \le \ell$ e $i + j = m$. A fórmula (B.2.1) define um produto

$$\cdot : \mathcal{P}(\mathbb{K}) \times \mathcal{P}(\mathbb{K}) \to \mathcal{P}(\mathbb{K}), \quad (p, q) \mapsto pq$$

o qual é comutativo e associativo (porque a multiplicação em $\mathbb{K}$ é). O elemento neutro multiplicativo 1 de $\mathbb{K}$ é o elemento neutro da multiplicação "$\cdot$". Assim $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ é um anel comutativo e associativo com unidade $1 \in \mathbb{K} \subset \mathcal{P}(\mathbb{K})$. Ele é chamado de **anel polinomial sobre** $\mathbb{K}$. Definição (B.2.1) prova o

Teorema B.2.1 (Grau)**.** *Se $p \ne \mathcal{O}$ e $q \ne \mathcal{O}$ são polinômios, então o produto $pq \ne \mathcal{O}$ também não é o polinômio nulo e vale* $\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q)$.

Este teorema diz que o anel $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ não tem **divisores nulos** ($p \neq \mathcal{O}$ e $q \neq \mathcal{O}$ com $pq = \mathcal{O}$). Um anel sem divisores nulos é chamado de **anel de integridade**.

Teorema B.2.2 (Divisão com resto)**.** *Dado dois polinômios p e $q \neq \mathcal{O}$, então existem polinômios únicos s e r tal que*

$$\begin{aligned} &p = qs + r \\ &r = 0 \quad \textit{ou} \quad \deg(r) < \deg(q) \end{aligned}$$

Demonstração. Nos casos $p = \mathcal{O}$ ou $\deg(p) < \deg(q)$ escolhe $s = \mathcal{O}$. Assim podemos supor $\deg(p) \geq \deg(q)$. Na terminologia em cima podemos supor $\alpha_k, \beta_\ell \neq 0$, assim $k \geq \ell$. Então o polinômio definido assim

$$r_1(x) := p(x) - \frac{\alpha_k}{\beta_\ell} \cdot x^{k-\ell} \cdot q(x)$$

é nulo ou tem grau $k_1 < k$. Se também vale $k_1 < \ell$ definimos $s(x) := \frac{\alpha_k}{\beta_\ell} \cdot x^{k-\ell}$ e a prova é completa. No outro caso $k_1 \geq \ell$ repetimos o processo com r_1 em lugar de p e chegamos no destino depois finito muitos passos. Para unicidade veja Exercício B.2.7. □

Corolário B.2.3. *Seja p um polinômio, então para cada um ponto $\alpha \in \mathbb{K}$ existe um único polinômio s_α tal que $p(x) = (x - \alpha)s_\alpha(x) + p(\alpha)$, $\forall x \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Na divisão com resto escolha $q(x) := x - \alpha$ para obter $p = qs + r$ onde r é nulo ou possui grau nulo, assim é constante $r \equiv \mathit{const}$. No ponto $x = \alpha$ obtemos $p(\alpha) = 0 \cdot s(\alpha) + \mathit{const}$. Para unicidade veja Exercício B.2.7. □

Se escolhamos para o ponto $\alpha \in \mathbb{K}$ uma raíz de p, caso tem raízes, obtemos

Corolário B.2.4. *Seja $p \neq \mathit{const}$ um polinômio não-constante, então para toda raíz $\alpha \in \mathbb{K}$ de p existe um único polinômio s_α com $p(x) = (x - \alpha)s_\alpha(x)$, $\forall x \in \mathbb{K}$.*

Se $s = s_\alpha$ possui uma raíz em $\mathbb{K}$, então podemos continuar o processo e obtemos a representação em Teorema B.3.1.

Corolário B.2.5. *Um polinômio não-nulo $p \neq \mathcal{O}$ não tem mais raízes como seu grau marca, em símbolos $|p^{-1}(0)| \leq \deg(p)$.*

Como o grau de um polinômio é finito o Corolário precedente implica

Corolário B.2.6. *Se p é um polinômio e vale $p(\alpha) = 0$ para infinito muitos $\alpha \in \mathbb{K}$, então $p = \mathcal{O}$ é o polinômio nulo.*

Exercício B.2.7. Mostre os seguintes.

(i) Em Teorema B.2.2 os polinômios s e r são únicos.

(ii) Em Corolário B.2.3 o polinômio s_α é único.

[Dicas: Corolários B.2.5 e B.2.6.]

B.3 Fatorização

Teorema B.3.1 (Fatorização de polinômios)**.** *Um polinômio não-constante p de $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ possui uma representação única[4] da forma*

$$p(x) = (x-\alpha_1)^{m_1} \dots (x-\alpha_r)^{m_r} \cdot t(x) \tag{B.3.1}$$

com pontos $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ dois-a-dois diferentes, um polinômio t sem raíz em $\mathbb{K}$, e expoentes $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ tal que $m_1 + \dots + m_r + \deg(t) = \deg(p)$. Além disso, os pontos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ são exatamente as raízes de p em $\mathbb{K}$.

Demonstração. Corolário B.2.4. □

Definição B.3.2. Chama-se o expoente m_k na representação (B.3.1) de **ordem** ou de **multiplicidade algébrica** da raíz α_k do polinômio p.

Definição B.3.3. Um polinômio não-constante p de $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ é chamado de **irredutível** se não é um produto

$$p \neq p_1 \dots p_k$$

de polinômios p_i de grau $< \deg(p)$ e é chamado de **redutível** no caso contrário.

Observação B.3.4.

1. Todo polinômio de grau 1 – chamado de **fator linear** – é irredutível.
2. Ser irredutível depende do corpo. Por exemplo, os polinômios de grau dois

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1), \qquad x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$$

   são redutível como polinômios complexos, elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, mas só o primeiro é redutível como polinômio real, elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o polinômio quadrático $x^2 + 1$ é irredutível.
3. Como polinômio real $(x^2-1)(x^2+1)$ é composto de três fatores irredutíveis, dois fatores lineares e um quadrático.

   Como polinômio complexo $(x^2-1)(x^2+1)$ é composto de quatro fatores lineares irredutíveis.

B.4 Teorema fundamental da álgebra

Teorema B.4.1 (Teorema fundamental da álgebra – $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)**.** *Valem e são equivalente: a) Um polinômio complexo não-constante p possui uma raíz.[5]*
b) Um polinômio complexo p de grau k fatoriza em k fatores lineares, ou seja

$$p(x) = c(x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_k) \tag{B.4.1}$$

[4] única até alternar a ordem no produto

[5] Este teorema famoso tem uma história de séculos – desde o primeiro aparecimento até o bem entendido de hoje: Girard (1595-1632), Descartes (1596-1650), Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783) formulou a primeira vez *"todo polinômio real de grau n possui exatamente n raízes complexas"* e provou para $n \leq 6$, D'Alembert (1717-1783), Lagrange (1736-1813), Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855) deu 4 provas, Argand (1768-1822), Cauchy (1789-1857). A quem maneja a língua alemão recomendo muito o livro [EHH+92], Capitulo 4.

onde $c, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ sao números complexos, não necessariamente diferente.

Demonstração. a) Uma prova ao longo do abordagem de D'Alembert e Argand, isto é minimizar o absoluto $|p(z)|$ em $\mathbb{C}$, é dada no livro [Art91, Thm. 9.1, p. 527]. b) Aplique iterativamente Corolário B.2.4 usando existência de uma raíz conforme parte a). Alternativamente, na fórmula (B.3.1) o polinômio t sem raíz deve ser constante, porque no caso contrario ele ia ter uma raíz segundo parte a). $\square$

Corolário B.4.2 (Polinômios reais – $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)**.** *Um polinômio mónico real p de grau $n \geq 1$ fatoriza como produto $p = p_1 \dots p_k$ de polinômios mónicos reais irredutíveis p_i de grau 1 ou 2.*

Demonstração. Um polinômio real é complexo e assim p tem a forma (B.4.1) no teorema fundamental acima onde $c = 1$ porque p é mónico. Os α_i são complexos o que não impede real. Se um α_i não é real o complexo conjugado $\bar{\alpha}_i$ também é uma raíz – assim igual a um dos α_j – porque p é um polinômio real. Mas o produto $(x - \alpha_i)(x - \bar{\alpha}_i) = x^2 - (\alpha_i + \bar{\alpha}_i)x + \alpha_i\bar{\alpha}_i$ é um polinômio real. Assim os fatores em (B.4.1) ou são linear e real ou são complexos mas combinam em pares cujo produto é um polinômio quadrático real irredutível. $\square$

C.5 Existência de subespaço invariante ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Nesta seção suponhamos que A é um operador linear num espaço vetorial real E de dimensão finita $n \geq 1$.

Teorema C.5.1 (Teorema 8.3.1)**.** *Um operador linear A em E admite um subespaço invariante F de dimensão 1 ou 2.*

Definição C.5.2. Dado um operador linear $A \in \mathcal{L}(E)$ e um polinômio real

$$p = p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

definimos um operador linear em E assim

$$p(A) := a_0 I_E + a_1 A + \cdots + a_n A^n \in \mathcal{L}(E)$$

Lema C.5.3. *Dado $A \in \mathcal{L}(E)$, então existe um polinômio mónico irredutível $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de grau 1 ou 2 e existe um vetor não-nulo $v \in E$ tal que $q(A)v = \mathcal{O}$.*

Demonstração. Seja $n = \dim E \geq 1$, então como o espaço vetorial $\mathcal{L}(E)$ tem dimensão n^2, veja Corolário 4.1.15, o conjunto de $n^2 + 1$ elementos

$$\{I_E, A, A^2, \dots, A^{n^2}\}$$

é LD. Por isso existem coeficientes reais α_i, não todos nulos, tal que

$$\mathcal{O} = \alpha_0 I_E + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n^2} A^{n^2}$$

Seja α_m o coeficiente não nulo do maior índice. O caso $m = 0$ é impossível como $\alpha_0 I_E = \mathcal{O}$ implicaria o absurdo $I_E = {\alpha_0}^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Então $m \geq 1$ e definindo $\beta_j := \alpha_j / \alpha_m$ obtemos que

$$\mathcal{O} = \beta_0 I_E + \beta_1 A + \cdots + \beta_{m-1} A^{m-1} + A^m =: p(A) \in \mathcal{L}(E)$$

O correspondente polinômio real

$$p(\lambda) := \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{m-1} x^{m-1} + x^m$$

é mónico e de grau $m \geq 1$. Segundo Corolário B.4.2 obtemos que

$$p = p_1 \dots p_k$$

onde os p_i são polinômios mónicos reais irredutíveis de grau 1 ou 2. Como

$$\mathcal{O} = p(A) = p_1(A) \dots p_k(A)$$

pelo menos um dos operadores na direita não é invertível, dizemos $p_i(A)$. (Caso contrario o operador nulo $\mathcal{O}$ é invertível – absurdo.) Daí $q(A) := p_i(A) \colon E \to E$ não é bijetivo, assim não injetivo, ou seja $\mathrm{N}(q(A)) \neq \{\mathcal{O}\}$. $\square$

Demonstração de Teorema C.5.1 (*Existe subespaço invariante de dim.* 1 *ou* 2). Dado $A \in \mathcal{L}(E)$, segundo Lema C.5.3 existe um polinômio mónico irredutível $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de grau 1 ou 2 e existe um vetor não-nulo $v \in E$ tal que

$$\mathcal{O} = q(A)v \tag{$*$}$$

Caso *q* tem grau 1. Então q é da forma $q(x) = x - \lambda$ para um $\lambda \in \mathbb{R}$. Daí segue de $(*)$ que $\mathcal{O} = q(A)v = (A - \lambda I_E)v = Av - \lambda v$. Por linearidade de A a reta $F := \mathbb{R}v$ é um subespaço invariante por A.

Caso *q* tem grau 2. O polinômio é da forma $q(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ para constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ onde $\beta \neq 0$ como q é irredutível (no caso contrario $q(x) = x(x + a)$ é redutível). Então

$$\mathcal{O} \stackrel{(*)}{=} q(A)v = AAv + \alpha Av + \beta v \tag{$**$}$$

Se $Av = \mathcal{O}$ obtemos a contradição $\mathcal{O} = \beta v$.

• $\{v, Av\}$ é LI: Suponha por absurdo que $Av = \mu v$ para um $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então obtemos que

$$\mathcal{O} \stackrel{(**)}{=} \mu^2 v + \alpha\mu v + \beta v = (\underbrace{\mu^2 + \alpha\mu + \beta}_{=q(\mu)})\underbrace{v}_{\neq \mathcal{O}} \qquad \Rightarrow \qquad q(\mu) = 0$$

mas um polinômio irredutível de grau 2 não pode ter uma raíz real.

• O subespaço F gerado por $\{v, Av\}$ tem dimensão 2 e é invariante por A: Como A é linear é suficiente mostrar $Av \in F$ e $A(Av) \in F$. Com efeito

$$Av \in F, \qquad A(Av) \stackrel{(**)}{=} -\alpha(Av) - \beta v \in F$$

Isso finaliza a prova de Teorema C.5.1. $\square$

Referências Bibliográficas

[Art91] Michael Artin. *Algebra*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[EHH+92] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, and R. Remmert. *Zahlen*, volume 1 of *Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1992. Edited and with an introduction by K. Lamotke.

[Hir21] Oliver Hirsch. Die Psychologie der Gedankenkontrolle, des Mentizids und der Gehirnwäsche. Zugang pdf, January 2021.

[Koe85] Max Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Grundwissen Mathematik 2. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, Zweite Auflage,

[Lan93] Serge Lang. *Algebra. 3rd ed.* Reading, MA: Addison Wesley, 1993.

[Lim05] Elon Lages Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Segunda Edição, 2005.

[Lim11] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Oitava Edição, 2011.

[Mee56] Joost A.M. Meerloo. *The Rape of the Mind. The Psychology of Thought Control, Menticide, and Brainwashing*. 1956. access pdf.

[Pul12] Petronio Pulino. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. Notas da Aula, UNICAMP, 2012. Acessível no site www.ime.unicamp.br/∼pulino/ALESA.

[Sal19] Dietmar A. Salamon. *Análise em dimensões superiores*. Tradução de J. Weber de Alemão para Português. 2019. ix+376p. pdf

[San12] Reginaldo J. Santos. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. Manuscrito, UFMG, 03 2012.