Capítulo 7

Soma direta e projeções

No[1] Capítulo 7 denotamos de

$$F, G, H \subset E$$

subespaços de um espaço vetorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$. Na parte das involuções precisamos às vezes que $1 + 1 \neq 0$ em $\mathbb{K}$, veja Corolário 1.1.22. (Vale para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ se $p \neq 2$.) O objeto central do nosso interesse será o conjunto

$$\mathcal{SC} = \mathcal{SC}(E) := \{(F, G) \mid F \oplus G = E\}$$

composto de **pares** (F, G) de **subespaços complementares** de E no sentido que o par decompõe $E = F \oplus G$ como soma direta.

O nosso objetivo será relacionar o conjunto $\mathcal{SC}(E)$ bijetivamente com duas classes de operadores lineares em E – os subconjuntos de $\mathcal{L}(E)$ dados por

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(E) := \{P \mid P^2 = P\} \qquad \text{“projeções em } E\text{”}$$
$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(E) := \{S \mid S^2 = I_E\} \qquad \text{“involuções em } E\text{”}.$$

Ambas condições fazem sentido no contexto geral de uma aplicação $s : X \to X$ num conjunto X. Para nos são relevantes as **involuções** ($S^2 = \mathrm{id}$). Temos três involuções naturais, isto é (i) trocar os membros

$$\mu : \mathcal{SC} \to \mathcal{SC}, \quad (F, G) \mapsto (G, F)$$

(ii) mudar o sinal[2]

$$\sigma : \mathcal{I} \to \mathcal{I}, \quad S \mapsto -S$$

e (iii) tomar diferença com o operador identidade

$$\delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, \quad P \mapsto I - P.$$

Com efeito $(I - P)^2 = I^2 - 2P + P^2 = I - P$, assim realmente é uma projeção. Capítulo 7 é ilustrado na Figura 7.1. É comum indicar injetividade de uma aplicação com tal flecha $f : X \rightarrowtail Y$, sobrejetividade com tal flecha $f : X \twoheadrightarrow Y$.

[1] Cap. 7 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 23 de abril de 2024

[2] Na verdade $-S$ é o inverso aditivo de $S \in \mathcal{L}(E)$ e o inverso do inverso é a identidade.

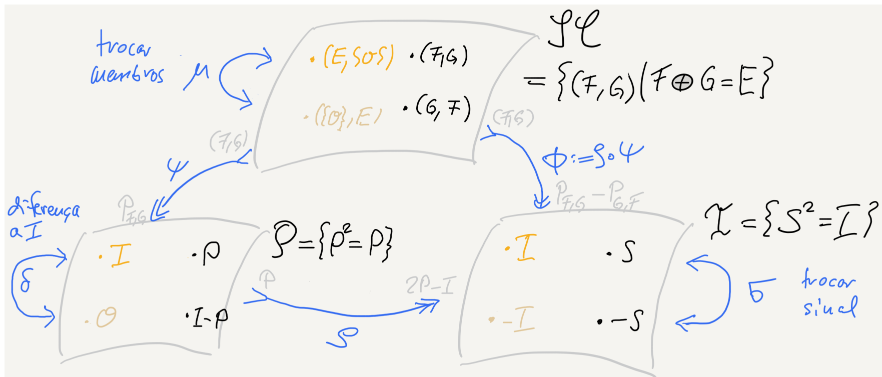

Figura 7.1: Conjuntos $\mathcal{SC}$ dos subespaços complementares, $\mathcal{P}$ das projeções, e $\mathcal{I}$ das involuções lineares – o diagrama das seis bijeções é comutativa

Preparações e lembranças

Definição 7.0.6 (Pontos fixos e anti-fixos)**.** Dado um conjunto X e uma aplicação $r : X \to X$. a) Um elemento $x \in X$ tal que $r(x) = x$ chama-se um **ponto fixo** de r. O conjunto dos pontos fixos de r satisfaz $\mathbf{Fix}(\boldsymbol{r}) \subset \mathrm{Im}(r)$.

b) Se X é um espaço vetorial denotamos de $\mathbf{aFix}(\boldsymbol{r})$ o conjunto de todos os **pontos anti-fixos** x de r, ou seja $r(x) = -x$.

É fácil – e instrutivo – checar que para aplicações idempotentes num conjunto X os pontos fixos já formam a imagem inteira, em símbolos

$$r^2 = r \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Fix}(r) = \mathrm{Im}(r). \tag{7.0.1}$$

Para aplicações idempotentes é recomendável – geralmente ilumina bastante – trabalhar com $\mathrm{Fix}(r)$ em vez de $\mathrm{Im}(r)$.

Exercício 7.0.7. Se $B \in \mathcal{L}(E)$, então $\mathrm{Fix}(B), \mathrm{aFix}(B) \subset E$ são subespaços.

Produto cartesiano e soma

Lembre-se do Exercício 3.0.15 que o produto cartesiano $G \times H$ de dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão

$$\dim(G \times H) = \dim G + \dim H.$$

Dado dois subespaços G, H, será útil relembrar da Seção 2.3 a soma ordinária $G + H$ e a soma direta $G \oplus H$ deles. Se G, H são de dimensão <u>finita</u> vale a fórmula (3.2.1) a qual diz que

$$\dim(G + H) = \dim G + \dim H - \dim(G \cap H). \tag{7.0.2}$$

Exercício 7.0.8. Seja E um espaço vetorial com subespaços de intersecção trivial $G \cap H = \{\mathcal{O}\}$. Prove que $S : G \times H \to G \oplus H$, $(g, h) \mapsto g + h$, é um isomorfismo (linear, injetivo, sobrejetivo).

7.1 Projeções

Definição 7.1.1. Os operadores lineares idempotentes $P^2 = P \in \mathcal{L}(E)$ são chamados de **as projeções** de E. Um **par de subespaços complementares** de E é um par (F, G) de subespaços decompondo E no sentido que $F \oplus G = E$.

Lema 7.1.2 (Caracterização de projeção)**.** *Para $P \in \mathcal{L}(E)$ são equivalentes*

(i) $P^2 = P$; (projeção)

(ii) $\forall w \in \mathrm{Im}(P)\colon Pw = w$; ($\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Fix}(P)$)

(iii) $E = \mathrm{Fix}(P) \oplus \mathrm{N}(P)$. (par complementar)

e cada um de (i,ii,iii) implica

(iv) $E = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{N}(P)$. (par complementar)

Demonstração. "(i) $\Leftrightarrow$ (ii)" veja (7.0.1). "(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Intersecção trivial: seja $v \in \mathrm{Fix}(P) \cap \mathrm{N}(P)$, então $v = Pv = \mathcal{O}$. Soma: Dado $v \in E$, $w := Pv \in \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Fix}(P)$ e $v = w + (v - w)$ onde $P(v - w) = Pv - P^2 v = 0$. "(iii) $\Rightarrow$ (i)" Dado $v \in E$, temos $v = w + u$ para únicos elementos $w \in \mathrm{Fix}(P)$ e $u \in \mathrm{N}(P)$. Assim $Pv = Pw + Pu = w$ e daí $P(Pv) = Pw = w$. "(ii,iii) $\Rightarrow$ (iv)" trivial. □

Definição 7.1.3 (Projeção sobre F paralelamente G)**.** Seja (F, G) um par de subespaços complementares de E, escreva $v \in E = F \oplus G$ na forma $v = f + g$ com únicos elementos $f \in F$ e $g \in G$, veja Teorema 2.3.4. A aplicação dada por

$$P_{F,G} : E \to E, \quad v \mapsto f \tag{7.1.1}$$

é chamada de **projeção de $\boldsymbol{E}$ sobre $\boldsymbol{F}$ paralelamente $\boldsymbol{G}$**.

Lema 7.1.4. *A aplicação $P := P_{F,G}$ definida acima é uma projeção de E. Ademais imagem (os pontos fixos) e núcleo são dados por F e G, em símbolos*

$$F = \mathrm{Im}(P_{F,G}) = \mathrm{Fix}(P_{F,G}), \qquad G = \mathrm{N}(P_{F,G}). \tag{7.1.2}$$

Além disso $P_{G,F} = I_E - P_{F,G}$.

Demonstração. Se $v = f + g$ e $\tilde{v} = \tilde{f} + \tilde{g}$, então $v + \tilde{v} = f + g + \tilde{f} + \tilde{g} = f + \tilde{f} + g + \tilde{g}$.

Linear: Assim $P(v + \tilde{v}) = P(f + \tilde{f} + g + \tilde{g}) = f + \tilde{f} = Pv + P\tilde{v}$. Como $\alpha v = \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ obtemos $P(\alpha v) = P(\alpha f + \alpha g) = \alpha f = \alpha P v$.

Idempotente: Vale $P^2 v = P(P(f + g)) = Pf = f = Pv$.

$\mathrm{Im}(P) = F$: '$\subset$' óbvio '$\supset$' dado $f \in F$, então $Pf = f$.

$\mathrm{N}(P) = G$: '$\subset$' para $f + g = v \in \mathrm{N}(P)$ vale $\mathcal{O} = Pv = P(f + g) = f$. Assim segue que $v = g \in G$. '$\supset$' para $g \in G$ vale $Pg = P(\mathcal{O} + g) = \mathcal{O}$.

Identidade: $P_{G,F}(f + g) = g = (f + g) - f = I_E(f + g) - P_{F,G}(f + g)$ □

Teorema 7.1.5. *A seguinte aplicação é uma bijeção*

$$\begin{aligned} \mathcal{SC} = \{\textit{pares de subespaços complementares de } E\} &\xrightarrow{\psi} \{\textit{projeções em } E\} = \mathcal{P} \\ (F,G) &\mapsto P_{F,G} \end{aligned}$$

com inversa $\chi\colon P \mapsto (\mathrm{Im}(P), \mathrm{N}(P))$. *útil lembrar:* $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Fix}(P)$

Note-se que o subconjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(E)$ composto das projeções P de E não é um subespaço como $(\alpha P)^2 = \alpha^2 P^2 = \alpha^2 P \neq \alpha P$ caso $\alpha^2 \neq \alpha \in \mathbb{K}$. Então não faz sentido falar sobre linearidade da bijeção ψ.

Demonstração. Injetivo. Suponha $P_{F,G} = P_{\tilde{F},\tilde{G}}$, então aplique Lema 7.1.4 duas vezes para obter as identidades $F = \mathrm{Im}(P_{F,G}) = \mathrm{Im}(P_{\tilde{F},\tilde{G}}) = \tilde{F}$ e analogamente $G = \mathrm{N}(P_{F,G}) = \mathrm{N}(P_{\tilde{F},\tilde{G}}) = \tilde{G}$.

Sobrejetivo. Dado uma projeção P em E, Lema 7.1.2 diz que o par definido por $(F,G) := (\mathrm{Im}(P), \mathrm{N}(P))$ é um par de subespaços complementares. Resta mostrar que $P = P_{\mathrm{Im}(P),\mathrm{N}(P)} \overset{\text{def.}}{=} \psi(F,G)$. Dado $w \in E$, Lema 7.1.2 diz que $w = f + g$ para únicos elementos $f \in \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Fix}(P)$ e $g \in \mathrm{N}(P)$. Então vale

$$P_{\mathrm{Im}(P),\mathrm{N}(P)} w \overset{\text{def.}}{=} f \overset{\text{pt.fix.}}{=} Pf = Pf + \underbrace{\mathcal{O}}_{Pg} \overset{\text{lin.}}{=} P(f+g) = Pw.$$

Inversa. Dada uma projeção P em E, no item anterior temos visto que

$$P = P_{\mathrm{Im}(P),\mathrm{N}(P)} \overset{\text{def.}}{=} \psi\left(\mathrm{Im}(P), \mathrm{N}(P)\right) \overset{\text{def.}}{=} \psi\left(\chi(P)\right).$$

Vale $\chi\left(\psi(F,G)\right) \overset{\text{def.}}{=} (\mathrm{Im}(P_{F,G}), \mathrm{N}(P_{F,G})) = (F,G)$ segundo Lema 7.1.4 . □

7.2 Involuções

Definição 7.2.1. Um operador linear $S \in \mathcal{L}(E)$ cujo quadrado $S^2 = I_E$ é a identidade chama-se de **involução** de E. Involuções são isomorfismos.

Com efeito, a condição $S^2 = I_E$ para ser uma involução implica injetivo e sobrejetivo. Como o núcleo sempre é mínima $\mathrm{N}(S) = \{\mathcal{O}\}$ e a imagem sempre é máxima $\mathrm{Im}(S) = E$ estes dois subespaços não são úteis, não – em contraste ao caso de projeções. Os lugares deles como par de subespaços complementares ocupam, no caso de involuções, os subespaços dos pontos fixos e anti-fixos

$$F := \mathrm{Fix}(S), \qquad A := \mathrm{aFix}(S).$$

A vinculação entre projeções P e involuções S, além de dar decomposições

$$\mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{N}(P) = E = F \oplus A$$

é a igualdade $S = P_{F,A} - P_{A,F}$ baseada na identidade

$$\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Fix}(P).$$

Nosso trajeto será assim: Suponhamos agora que $2 := 1 + 1 \neq 0$ em $\mathbb{K}$, veja Corolário 1.1.22. Primeiro mostramos que a fórmula estabelecida na dimensão 2 para a reflexão em torno de uma reta, veja (4.3.3), nos da uma bijeção

$$\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{I}, \quad P \mapsto 2P - I_E$$

entre projeções e involuções com inversa $S \mapsto \frac{1}{2}(I_E + S)$. Caracterizamos involuções em termos de subespaços complementares com a composição de bijeções

$$\phi := \rho \circ \psi : \mathcal{SC} \to \mathcal{I}, \quad (F, G) \mapsto \rho(P_{F,G}) = P_{F,G} - P_{G,F} =: S_{F,G}.$$

Todo é compatível no sentido que é comutativa o diagrama das 6 bijeções na Figura 7.1.

Lema 7.2.2 (Caracterização de involução)**.** *Seja $S \in \mathcal{L}(E)$, então*

$$S \text{ involução de } E \quad \Leftrightarrow \quad E = \underbrace{\mathrm{Fix}(S)}_{=:F} \oplus \underbrace{\mathrm{aFix}(S)}_{=:A} \quad \text{“par complementar } (F, A)\text{”}$$

Além disso uma involução S é da forma $S = P_{F,A} - P_{A,F}$.

Demonstração. “$\Rightarrow$” Cada um elemento $x \in \mathrm{Fix}(S) \cap \mathrm{aFix}(S)$ é nulo porque $x = Sx = -x$. Os elementos $v \in E$ são da forma $v = Pv + Qv$ onde $Pv := \frac{1}{2}(v + Sv)$ e $Qv := \frac{1}{2}(v - Sv)$. Mas $S^2 = I_E$ implica $S(Pv) = Pv$ e $S(Qv) = -Qv$.
“$\Leftarrow$” Como $E = \mathrm{Fix}(S) \oplus \mathrm{aFix}(S)$ os elementos $v \in E$ são da forma $v = f + a$ para únicos elementos $f \in \mathrm{Fix}(S)$ e $a \in \mathrm{aFix}(S)$, veja Teorema 2.3.4. Como S é linear obtemos

$$S^2 v = S(S(f + a)) = S(Sf + Sa) = S(f - a) = Sf - Sa = f + a = v$$

para todos os $v \in E$. “$S = S_{F,A}$” Escrevendo $v \in E$ como $v = f + a$ obtemos

$$Sv = S(f + a) = Sf + Sa = f - a = P_{F,A}v - P_{A,F}v$$

segundo Definição 7.1.3. □

Involuções e projeções

Teorema 7.2.3. *Seja $1 + 1 \neq 0$ em $\mathbb{K}$. A seguinte aplicação é uma bijeção*

$$\begin{aligned} \rho \colon \mathcal{P} = \{\textit{projeções em } E\} &\to \{\textit{involuções em } E\} = \mathcal{I} \\ P &\mapsto 2P - I_E =: S_P \end{aligned}$$

com inversa $\rho^{-1} =: \gamma \colon S \mapsto \frac{1}{2}(I_E + S)$. As projeções $\gamma(S)$ e $\gamma(-S)$, ou seja

$$P := \tfrac{1}{2}(I_E + S), \qquad Q := \tfrac{1}{2}(I_E - S)$$

satisfazem $P + Q = I_E$ e $P - Q = S$.

Demonstração. Seja $I = I_E$. BEM DEFINIDO. $(2P-I)^2 = 4P^2 - 4P + I = I$.
INJETIVO. Suponha $2P - I = 2\tilde{P} - I$, adicione $-I$ para obter $2P = 2\tilde{P}$. Então $P = \tilde{P}$ segundo Corolário 1.1.22.
SOBREJETIVO. Dado uma involução S em E, defina $P := \gamma(S) = \frac{1}{2}(I+S)$ para obter $\rho(P) = 2P - I = (I+S) - I = S$.
INVERSA. Dada uma involução S em E, no item anterior vimos que $S = \rho(\gamma(S))$. De outro lado $\gamma(\rho(P)) = \gamma(2P-I) = \frac{1}{2}(I + (2P-I)) = P$. $\square$

Involuções e subespaços complementares

Definição 7.2.4 (Involução/reflexão em torno de F ao longo G)**.** Seja (F,G) um par de subespaços complementares de E, escreva $v \in E = F \oplus G$ na forma $v = f + g$ com únicos elementos $f \in F$ e $g \in G$, veja Teorema 2.3.4. A aplicação

$$S_{F,G} := P_{F,G} - P_{G,F} \colon E \to E \tag{7.2.1}$$

é chamada de **involução (ou reflexão) de E em torno de F ao longo G**.

Vamos justificar chamar $S_{F,G}$ de involução em torno de F ao longo G:

Lema 7.2.5. *A aplicação $S_{F,G}$ definida acima é uma involução de E. Os pontos fixos e anti-fixos contém respectivamente F e G, em símbolos*

$$F \subset \mathrm{Fix}(S_{F,G}), \qquad G \subset \mathrm{aFix}(S_{F,G}). \tag{7.2.2}$$

Valem igualdades nos casos $\dim E < \infty$ *ou* $1 + 1 \neq 0$ *em* $\mathbb{K}$.

Ter igualdades em (7.2.2) é importante para consistência: como $S_{F,G}$ euma involução o Lema 7.2.2 aplica e fala que $S_{F,G} = S_{\mathrm{Fix}(S_{F,G}),\mathrm{aFix}(S_{F,G})}$. Então espera-se igualdade dos pares $(F,G) = (\mathrm{Fix}(S_{F,G}), \mathrm{aFix}(S_{F,G}))$.

Demonstração. Dado $v \in E$, então $\exists! f \in F$ e $\exists! g \in G$ tal que $v = f + g$.
Linearidade: É óbvio como $S_{F,G}$ é soma de dois operadores lineares.
$\boldsymbol{S^2 = I_E}$**:** Usamos a definição de $S := S_{F,G}$ e Lema 7.1.4 para obter

$$\begin{aligned} S^2 v &= S\left(\left(P_{F,G} - P_{G,F}\right)(f+g)\right) \\ &= S(f-g) \\ &= \left(P_{F,G} - P_{G,F}\right)(f-g) \\ &= f - (-g) \\ &= v. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{G = \mathrm{aFix}(S_{F,G})}$**:** Como $\mathrm{aFix}(S_{F,G}) = \mathrm{Fix}(S_{G,F})$ o próximo item aplica.
$\boldsymbol{F = \mathrm{Fix}(S_{F,G})}$**:** '$\subset$' Seja $f \in F$. Como $F = \mathrm{Im}(P_{F,G}) = \mathrm{Fix}(P_{F,G})$ e $F = \mathrm{N}(P_{G,F})$ obtemos $Sf = P_{F,G}f - P_{G,F}f = f$.
'$\supset$' **Caso $\boldsymbol{1+1 \neq 0}$ em $\mathbb{K}$:** Escreva $x \in \mathrm{Fix}(S) \subset E$ unicamente na forma $x = f + g$ onde $f \in F$ e $g \in G$. Então

$$f + g = x = Sx = P_{F,G}(f+g) - P_{G,F}(f+g) = f - g.$$

Assim $g + g = \mathcal{O}$. Segundo Corolário 1.1.22 obtemos $g = \mathcal{O}$. Então $x = f \in F$.
'$\supset$' **Caso dim $\boldsymbol{E} < \infty$:** Como $(F, G) \in \mathcal{SC}$ e segundo Lema 7.2.2 ($S^2 = I_E$)

$$F \oplus G = E = \mathrm{Fix}(S) \oplus \mathrm{aFix}(S).$$

Então aplicando a fórmula (7.0.2) a cada uma soma direta nos da as igualdades

$$\dim F + \dim G = \dim E = \dim \mathrm{Fix}(S) + \dim \mathrm{aFix}(S).$$

Como $0 \leq \dim F \leq \dim \mathrm{Fix}(S)$ e $0 \leq \dim G \leq \dim \mathrm{aFix}(S)$ segundo Teorema 3.2.1 (c), as dimensões devem ser iguais, ou seja

$$\dim F = \dim \mathrm{Fix}(S), \qquad \dim G = \dim \mathrm{aFix}(S).$$

Mas, segundo Teorema 3.2.1 (d), inclusão com a mesma dimensão implica igualdade, assim $F = \mathrm{Fix}(S)$ e $G = \mathrm{aFix}(S)$. □

Exercício 7.2.6. Faça um desenho de $E = \mathbb{R}^2$ com dois subespaços $F \neq G$ de dimensão 1. Ilustre para varias escolhas de $v \in E, F, G$ a imagem $S_{F,G}v$ usando os vetores (pensa em flechas) $P_{F,G}v$ e $-P_{G,F}v$.

7.3 Exercícios

Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.

1. No plano $\mathbb{R}^2$, considere as retas F_1 e F_2, definidas respectivamente pelas equações $y = ax$ e $y = bx$, onde $a \neq b$ são números reais.
   (a) Exprima $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ como soma de um vetor de F_1 e um de F_2.
   (b) Seja $P = P_{F_1,F_2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a projeção sobre F_1 paralelamente a F_2. Obtenha a matriz $[P]$ de P.
   (c) Encontre a matriz $[S]$ da reflexão $S = S_{F_2,F_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em torno da reta F_2, paralelamente a F_1.
2. Exprima $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como soma de um vetor do plano F_1, cuja equação é $x + y - z = 0$, com um vetor da reta F_2, gerada pelo vetor $(1, 2, 1)$. Conclua que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$. Determine a matriz $[P]$ da projeção $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tem imagem F_1 e núcleo F_2.
3. Dado $P \in \mathcal{L}(E)$, *prove* ou *desprouve*:
   (a) $E = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{Im}(P) \quad \Rightarrow \quad P$ é projeção de E.
   (b) $E = \mathrm{N}(P) + \mathrm{Im}(P) \quad \Rightarrow \quad P$ é projeção de E.
   (c) P é projeção $\quad \Leftrightarrow \quad I - P$ é projeção.
   (d) P é projeção $\quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{N}(P) = \mathrm{Im}(I - P) \quad \big(\Leftrightarrow \quad \mathrm{N}(I - P) = \mathrm{Im}(P)\big)$.

4. Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços com $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E < \infty$. Prove

$$E = F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}.$$

5. Sejam $P_1, \dots, P_n : E \to E$ operadores lineares tais que

$$P_1 + \cdots + P_n = I \quad \text{e} \quad \forall i \neq j : \; P_i P_j = \mathcal{O}.$$

   Prove que estes operadores são projeções.

6. Sejam $P, Q \in \mathcal{L}(E)$ projeções e $1+1 \neq 0$ em $\mathbb{K}$, prove que são equivalentes:

   (a) $P + Q$ é uma projeção;

   (b) $PQ + QP = \mathcal{O}$;

   (c) $PQ = QP = \mathcal{O}$.

   [Para provar (b) $\Rightarrow$ (c), multiplique à esquerda e à direita da hipótese $PQ = -QP$ por P e conclua $\mathcal{O} = PQP$. Consequentemente $\mathcal{O} = \mathcal{O}Q = PQPQ = P(-PQ)Q = -PQ$.]

7. Seja $E = F_1 \oplus F_2$. O **gráfico** de uma transformação linear $B : F_1 \to F_2$ é o subconjunto $\operatorname{graph}(B) := \{v + Bv \mid v \in F_1\}$ de E. Prove que

   (a) $\operatorname{graph}(B)$ é um subespaço de E;

   (b) a projeção $P = P_{F_1,F_2} : E \to E$, restrita a $\operatorname{graph}(B)$, define um isomorfismo entre $\operatorname{graph}(B)$ e F_1.