Capítulo 6

Núcleo e imagem

No[1] Capítulo 6 denotamos de E, F espaços vetoriais

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \qquad F = (F, +, \cdot, \mathbb{K})$$

ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, e denotamos de $A\colon E \to F$ uma transformação linear. Na primeira leitura pense em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. As letras m, n denotam números naturais ou zero.

O primeiro objetivo no Capítulo 6 é associar a uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ dois subespaços

$$\mathrm{N}(A) \subset E \xrightarrow{A} F \supset \mathrm{Im}(A)$$

e relacionar seu tamanho mínimo/máximo a injetividade/sobrejetividade de A.

Outros resultados fundamentais são os seguintes: Uma transformação linear A é injetiva se e somente se leva conjuntos LI em conjuntos LI. Sobrejetividade é equivalente à existencia de uma inversa à direita e injetividade à existencia de uma inversa à esquerda.

Definição 6.0.14. Dado uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ chamamos

$\mathrm{N}(A) := \{v \in E \mid Av = \mathcal{O}\}$ o **núcleo** de A e

$\mathrm{Im}(A) := \{Av \mid v \in E\}$ a **imagem** de A.

Dado um subconjunto $X \subset E$, seja $AX := \{Ax \mid x \in X\}$ a imagem de X sob A.

Lema 6.0.15. *Os subconjuntos* $\mathrm{N}(A) \subset E$ *e* $\mathrm{Im}(A) \subset F$ *são subespaços.*

Demonstração. "$\mathrm{Im}(A)$ fechado sob $+$": Dado dois elementos da imagem, ou seja Av e Aw onde $v, w \in E$, então de linearidade $Av + Aw = A(v+w) \in \mathrm{Im}(A)$. "$\mathrm{Im}(A)$ fechado sob $\cdot$": Se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $Av \in \mathrm{Im}(A)$, então $\alpha Av = A(\alpha v) \in \mathrm{Im}(A)$. Deixamos ao leitor provar que $\mathrm{N}(A)$ é fechado sob $\cdot$ e $+$. □

[1] Cap. 6 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 23 de abril de 2024

Definição 6.0.16 (Posto)**.** A dimensão da imagem é chamado de **posto de uma transformação linear** $A \in \mathcal{L}(E, F)$, em simbolos

$$\operatorname{posto}(A) := \dim \operatorname{Im}(A).$$

Lema 6.0.17 (Os dois subespaços naturais – mínimo e máximo)**.** *Para uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ injetividade e sobrejetividade correspondem a*

(i) $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\} \quad \Leftrightarrow \quad A$ *é injetivo.*

(ii) $\operatorname{Im}(A) = F \quad \Leftrightarrow \quad A$ *é sobrejetivo.*

Demonstração. (i) **"$\Leftarrow$"** '$\subset$' Seja $v \in \mathrm{N}(A)$, então $Av = \mathcal{O} = A\mathcal{O}$ onde temos usado linearidade no segundo passo. Então segundo injetividade como as imagens são iguais, os elementos $v = \mathcal{O}$ devem ser iguais. '$\supset$' Todo subespaço, assim $\mathrm{N}(A)$, contem o vetor nulo. **"$\Rightarrow$"** Suponha que são iguais as imagens $Av = Aw$ de dois elementos $v, w \in E$. Então $\mathcal{O} = Av - Aw = A(v - w)$, e assim $v - w \in \mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$. Então $v = w$.
(ii) **"$\Leftarrow$"** '$\subset$' trivial. '$\supset$' Dado $f \in F$, como A é sobrejetivo existe um $v \in E$ tal que $f = Av$. Assim $f \in \operatorname{Im}(A)$. **"$\Rightarrow$"** Seja $f \in F = \operatorname{Im}(A)$, ou seja $f = Av$ para um $v \in E$, mostrando que A é sobrejetivo. □

Lema 6.0.18. *Seja $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $X \subset E$, então*

$$\langle X \rangle = E \quad \Rightarrow \quad \langle AX \rangle = \operatorname{Im}(A).$$

Demonstração. '$\subset$' Sem usar $\langle X \rangle = E$, um elemento $f \in \langle AX \rangle$ é da forma de uma soma finita $f = \sum \alpha_i A x_i = A \sum \alpha_i x_i \in \operatorname{Im}(A)$ onde $x_i \in X$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$.
'$\supset$' Um elemento $f \in \operatorname{Im}(A) = AE = A\langle X \rangle$ é da forma de uma soma finita $f = A \sum \alpha_i x_i = \sum \alpha_i A x_i \in \langle AX \rangle$ onde $x_i \in X$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$. □

Como $\operatorname{Im}(A) \subset F$ é um subespaço já sabemos de Teorema 3.2.1 que sua dimensão não é maior daquela de F. É uma surpresa que isso vale para $\dim E$ também. Este fato será utilizado no famoso Teorema 6.5.1 de nucelo e imagem.

Corolário 6.0.19. $\forall A \in \mathcal{L}(E, F)$ *vale* $\dim \operatorname{Im}(A) \le \dim E$.

Demonstração. Se $\dim E = \infty$ não tem nada a provar. No caso $n = \dim E \in \mathbb{N}_0$ seja $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base de E. Como $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ temos $\langle A\mathcal{B} \rangle = \operatorname{Im}(A)$ segundo Lema 6.0.18. Nas outras palavras, o conjunto finito $A\mathcal{B} = \{A\xi_i \mid i = 1, \dots, n\}$ de $m := |A\mathcal{B}| \le n$ elementos (possivelmente uns $A\xi_i$'s são iguais) gera o espaço $\operatorname{Im}(A)$. Então $\dim \operatorname{Im}(A) \le m \le n = \dim E$ segundo Lema 3.1.20. □

Exercício 6.0.20. Defina operadores lineares $A, B : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ assim

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots) \\ B(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_2 - 2x_1, x_3 - 2x_2, x_4 - 2x_3 \dots). \end{aligned}$$

Determine o núcleo e a imagem de A e de B.

Exemplo 6.0.21 (SL)**.** Dada uma matriz $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$ e uma lista $b \in \mathbb{K}^m$. São equivalente os seguintes:

O sistema linear (SL) de m equações a n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

admite uma solução $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

$\overset{(A.3.2)}{\iff}$ O vetor b é CL das colunas $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{a}_{\bullet n}$ da matriz $\mathbf{a}$; veja (1.2.3).

$\overset{2}{\iff}$ $b \in \mathrm{Im}(\mathbf{a})$ considerando a matriz como transformação linear $\mathbf{a}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

$\overset{3}{\iff}$ $\langle \mathbf{a}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{a}_{\bullet n}, b\rangle = \langle \mathbf{a}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{a}_{\bullet n}\rangle$.

Equivalência 2: Isso é o fato que a imagem de uma matriz é o espaço-coluna, ou seja o conjunto de todas as CLs das colunas da matriz.

Equivalência 3: "$\Rightarrow$" Se b é CL das colunas a igualdade é trivial. Caso geral: Como as colunas $\{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{a}_{\bullet n}\}$ geram $\mathrm{Im}(\mathbf{a})$, como $b \in \mathrm{Im}(\mathbf{a})$, e como $\mathrm{Im}(\mathbf{a})$ é um subespaço, obtemos a primeira identidade

$$\langle \mathbf{a}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{a}_{\bullet n}, b\rangle = \mathrm{Im}(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{a}\mathcal{E}^n\rangle = \langle \underbrace{\mathbf{a}e_1}_{\mathbf{a}_{\bullet 1}}, \ldots, \underbrace{\mathbf{a}e_n}_{\mathbf{a}_{\bullet n}}\rangle.$$

Identidade dois segue do Lema 6.0.18 com a base canônica $\mathcal{E}^n$ de $\mathbb{K}^n$.
"$\Leftarrow$" A identidade fala que b é CL das colunas $\mathbf{a}_{\bullet i} = \mathbf{a}e_i \in \mathrm{Im}(\mathbf{a})$, então $b \in \mathrm{Im}(\mathbf{a})$ porque $\mathrm{Im}(\mathbf{a})$ é um subespaço e assim fechado sob adição.

Exercício 6.0.22. Seja $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$(x, y, z, t) \mapsto (x + y + z + 2t, x - y + 2z, 4x + 2y + 5z + 6t)\,.$$

Encontre $b \in \mathbb{R}^3$ que não pertença à imagem de A. Com b, exiba um sistema linear de 3 equações e 4 incógnitas sem solução.

6.1 Escalonamento: Cálculo do posto

Aplicamos o processo de escalonar uma matriz $\mathbf{a}$ – conteúdo do curso MA141 e revisado no Apêndice A.2 – para calcular o posto de uma transformação linear.

Lema 6.1.1. *Dado uma transformação linear $A\colon E \to F$ entre espaços vetoriais das dimensões finitas n e m, respectivamente, então*

$$\underbrace{\mathrm{posto}(A)}_{:=\dim \mathrm{Im}(A)} = \underbrace{\mathrm{posto}(\mathbf{a})}_{:=\dim \mathrm{Im}(\mathbf{a})}, \qquad \mathbf{a} := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$$

para qualquer escolha de bases ordenadas $\mathcal{U}$ de E e $\mathcal{V}$ de F. Repetimos que vale $\mathrm{posto}(\mathbf{a}) = \mathrm{pc}(\mathbf{a}) = \mathrm{pl}(\mathbf{a})$ *segundo Teorema 4.2.2.*

Demonstração. Temos que

$$\text{posto}(A) := \dim \text{Im}(A) = \dim \text{Im}\big([A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}}\big) = \dim \text{Im}(\mathbf{a}) =: \text{posto}(\mathbf{a})$$

onde a primeira identidade segue do isomorfismo entre as imagens das transformações lineares A e $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$, veja o diagrama comutativa (5.0.1). □

Exemplo 6.1.2. Dado $A \in \mathcal{L}(E,F)$, determine posto(A) e uma base de Im(A).

Uma solução. Escolhe bases e considere a matriz $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ de A. Aplique escalonamento para a transposta $\mathbf{a}^t$, então as linhas não-nulas de $(\mathbf{a}^t)_{\text{esc}}$, dizemos $\ell_1, \dots, \ell_d$, formam uma base de

$$\text{Esp-lin}((\mathbf{a}^t)_{\text{esc}}) \overset{\text{Teor.A.2.2}}{=} \text{Esp-lin}(\mathbf{a}^t) = \text{Esp-col}(\mathbf{a}) \overset{(4.2.3)}{=} \text{Im}(\mathbf{a})$$

e o posto$(A) \overset{\text{Le.6.1.1}}{=}$ posto$(\mathbf{a}) := \dim \text{Im}(\mathbf{a}) = d$ é dado pelo número d das linhas não-nulas do escalonamento da transposta $\mathbf{a}^t$. Resta traduzir a base $\{\ell_1, \dots, \ell_d\}$ de Im$(\mathbf{a}) \subset \mathbb{K}^m$ numa base de Im$(A) \subset F$. Usamos o isomorfismo $\mathcal{V} : \mathbb{K}^m \to F$ gerado pela base ordenada $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ de F. Definimos

$$\zeta_i := \mathcal{V}\ell_i \overset{\text{def.}}{=} (\eta_1, \dots, \eta_m) \begin{bmatrix} (\ell_i)_1 \\ \vdots \\ (\ell_i)_m \end{bmatrix} \overset{\text{def.}}{=} \eta_1(\ell_i)_1 + \dots + \eta_m(\ell_i)_m \in F$$

para obter uma base $\{\zeta_1, \dots \zeta_d\}$ de Im(A).

Exercício 6.1.3. Encontre o posto de $\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e uma base da imagem.[2]

Exercício 6.1.4. Determine o posto da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

[Dicas: Calcule o posto-linha da matriz transposta. Escalonamento (modificando linhas) não muda o espaço-linha.]

6.2 Sobrejetividade – inversa à direita

Definição 6.2.1. Dado $A \in \mathcal{L}(E,F)$, uma transformação linear $B \in \mathcal{L}(F,E)$ é chamado de *uma* **inversa à direita de *A*** se a composição satisfaz $AB = I_F$.

[2] Obtém-se posto 2 e uma base é $\{(1,1,1),(0,1,2)\}$. Com efeito, um escalonamento é

$$(\mathbf{a}^t)_{\text{esc}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 6.2.2 (Geralmente inversas à direita não são únicas)**.** Seja $a \in \mathbb{R}$ e

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y), \qquad B_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, ax).$$

Então $AB_a = I_{\mathbb{R}^2}$ para cada um $a \in \mathbb{R}$, mas $B_a \neq B_b$ caso $a \neq b$.

Teorema 6.2.3. *Suponha $A \in \mathcal{L}(E, F)$ onde $m := \dim F < \infty$. Então*

$$A \text{ admite uma inversa à direita} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ sobrejetivo.}$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Dado uma inversa à direita B de A, então $\forall f \in F$ vale $ABf = I_F f = f$. Assim para todo $f \in F$ existe um $v \in E$, com efeito $v := Bf$, tal que $Av = f$. Mas isso significa que A é sobrejetivo.
"$\Leftarrow$" Usamos sobrejetividade de A para construir explicitamente uma inversa à direita de A. Escolha uma base ordenada $\mathcal{Y} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ de F e, usando sobrejetividade, uma lista $v = (v_1, \ldots, v_m)$ de m elementos de E tal que $Av_j = \eta_j$ para $j = 1, \ldots, m$. Lembramos de (4.1.5) que a lista v nos da uma transformação linear $B_v : F \to E$ unicamente determinado pelos valores $B_v\eta_j := v_j$ nos membros da base $\mathcal{Y}$. Resta checar $AB_v = I_F$: Escrevendo $f \in F$ como CL única na base $\mathcal{Y}$, ou seja $f = \sum_j \beta_j \eta_j$, e usando linearidade de B_v e de A obtemos

$$AB_v f = AB_v \sum_j \beta_j \eta_j = A \sum_j \beta_j \underbrace{B_v \eta_j}_{v_j} = \sum_j \beta_j A v_j = \sum_j \beta_j \eta_j = f.$$

Note-se a soma é finita porque temos exprimido f como uma CL. □

Exercício 6.2.4. Mostre os seguintes.

(a) Lembra do Exercício 2.1.4 que o subespaço trivial $\{0\}$ e o próprio $\mathbb{R}$ são os únicos subespaços de $\mathbb{R}$. Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Mostre que $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ é sobrejetivo ou igual a zero.

(b) A derivação $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, $p(x) \mapsto \frac{d}{dx} p(x)$, é sobrejetiva.

(c) A derivação $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x) \mapsto \frac{d}{dx} f(x)$, é sobrejetiva.

(d) Encontre uma inversa à direita $J : \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ para D em (c).

6.3 Injetividade – inversa à esquerda

Teorema 6.3.1. *Dada uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$, então*

$$A \text{ injetivo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ leva conjuntos LI em conjuntos LI.}$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Seja A injetivo e $X \subset E$ um subconjunto LI. Pegue elementos $Ax_1, \ldots, Ax_\ell \in AX$ na imagem e suponha que uma CL deles representa o vetor nulo, ou seja $\mathcal{O} = \alpha_1 Ax_1 + \cdots + \alpha_\ell Ax_\ell = A(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_\ell x_\ell)$ onde os α_i's são escalares. Como A é injetivo, equivalentemente $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$ segundo Lema 6.0.17, segue que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_\ell x_\ell = \mathcal{O}$. Como X é LI segue que

$\alpha_1 = \cdots = \alpha_\ell = 0$ e isso prova que o subconjunto $AX \subset F$ é LI.
"$\Leftarrow$" Seja $v \in E$. Se $v \neq \mathcal{O}$, então o subconjunto $\{v\} \subset E$ é LI segundo Comentário 1.3.4 (ii). Assim $\{Av\} \subset F$ é LI como A leva LI em LI segundo hipótese. Assim o vetor Av não pode ser nulo. Temos provado $v \neq \mathcal{O} \Rightarrow Av \neq \mathcal{O}$. O contra-positivo então diz que $Av = \mathcal{O} \Rightarrow v = \mathcal{O}$. Assim $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$. □

Corolário 6.3.2. *Se $A \in \mathcal{L}(E, F)$ é injetivo, então* $\dim E \leq \dim F$.

Demonstração. Se $\dim F = \infty$ não tem nada a provar. Seja $m := \dim F \in \mathbb{N}_0$. Seja $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ um subconjunto LI de E, então como A leva LI em LI segundo Teorema 6.3.1, o conjunto $AB = \{Av_1, \ldots, Av_k\}$ é LI em F e por isso (Corolário 3.1.17) não pode conter mais elementos como $\dim F$, em símbolos $k := |B| = |AB| \leq m$. (Como A é injetivo vale $|B| = |AB|$.) Analogamente à prova da parte (a) de Teorema 3.2.1 um subconjunto $B_* \subset E$ LI com o número máximo n $(\leq m)$ de elementos gera E e assim é uma base de E. Assim $\dim E := |B_*| = n \leq m := \dim F$. □

Exemplo 6.3.3 (Aplicação)**.** Não existe nenhuma transformação linear $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a qual é injetiva.

Definição 6.3.4. Dado $A \in \mathcal{L}(E, F)$, uma transformação linear $B \in \mathcal{L}(F, E)$ é chamado de *uma* **inversa à esquerda de $\boldsymbol{A}$** se a composição satisfaz $BA = I_E$.

Exemplo 6.3.5 (Geralmente inversas à esquerda não são únicas)**.** Seja $a \in \mathbb{R}$ e

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, 0), \qquad B_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + az, y).$$

Então $B_a A = I_{\mathbb{R}^2}$ para cada um $a \in \mathbb{R}$, mas $B_a \neq B_b$ caso $a \neq b$.

Teorema 6.3.6. *Suponha $A \in \mathcal{L}(E, F)$ onde* $\dim E, \dim F < \infty$. *Então*

$$A \text{ admite uma inversa à esquerda } B \qquad \Leftrightarrow \qquad A \text{ injetivo.}$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Se $Au = Av$, então $BAu = BAv$. Mas $BA = I$, daí $u = v$.
"$\Leftarrow$" Como a dimensão $n := \dim E$ é finita, escolha uma base $\mathcal{X} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ de E. Baseado na injetividade de A, segundo Teorema 6.3.1, o conjunto das imagens $\{A\xi_1, \ldots, A\xi_n\}$ é LI em F e pode ser estendido, segundo Teorema 3.2.1 (b) usando $\dim F < \infty$, para obter a base $\mathcal{B} := \{A\xi_1, \ldots, A\xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_k\}$ de F. A lista $w := (\xi_1, \ldots, \xi_n, \mathcal{O}, \ldots, \mathcal{O}) \in E^{\times(n+k)}$ determina $B_w \in \mathcal{L}(F, E)$ segundo (4.1.5), ou seja $B_w(A\xi_i) := \xi_i$ e $B_w \eta_j := \mathcal{O}$. Escreve $v \in E$ como CL única $v = \sum_i \alpha_i \xi_i$. Então usando linearidade de A e de B_w obtemos

$$B_w A v = B_w A \sum_i \alpha_i \xi_i = \sum_i \alpha_i \underbrace{B_w A \xi_i}_{\xi_i} = v = I_E v$$

para cada um $v \in E$. □

Exercício 6.3.7. Determine uma base para a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas.

(a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - y, x - y)$;

(b) $B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (x, y, z, t) \mapsto (x + y, z + t, x + z, y + t)$;

(c) $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \left(x + \frac{1}{2}y, y + \frac{1}{2}z, z + \frac{1}{2}x\right)$;

(d) $D : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2), X \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$;

(e) $E : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R}), p = p(x) \mapsto xp$.

6.4 Bijetividade – inversa

Definição 6.4.1 (Inversa)**.** Chama-se uma transformação linear $A : E \to F$ de **invertível** se A admite uma inversa à esquerda $B \in \mathcal{L}(F, E)$ e uma inversa à direita $C \in \mathcal{L}(F, E)$. Neste caso $B = C$,[3] denotado A^{-1}, é dito **a inversa** de A.

Exercício 6.4.2. Sejam $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, G)$ invertíveis, mostre que

a) a inversa de A (se existasse) é unica;

b) $(A^{-1})^{-1} = A$;

c) $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$;

d) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$ para escalares não-nulos $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

6.4.1 Isomorfismos

Definição 6.4.3 (Isomorfismo)**.** Um **isomorfismo** (entre E e F) é uma transformação linear $A : E \to F$ a qual é bijetiva (injetivo e sobrejetivo). Neste caso se diz que E e F são espaços vetoriais **isomorfos**, símbolo $E \simeq F$.

Para aplicações gerais bijetividade é equivalente a existência da aplicação inversa (a qual herda bijetividade). É interessante observar que se a aplicação bijetiva é linear a aplicação inversa não só existe mas herda linearidade ('⇒').

Proposição 6.4.4. *Seja $A \in \mathcal{L}(E, F)$, então*

$$A \text{ isomorfismo} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \text{ é invertível.}$$

Demonstração. "⇒" Definimos o candidato B para ser a inversa de A assim

$$B : F \to E, \quad f \mapsto Bf := v \tag{6.4.1}$$

onde v é o único elemento de E com $Av = f$ (existência: A sobrejetivo, unicidade: A injetivo). A aplicação definida B é linear: Sejam $f, g \in F$, denotamos $v := Bf$ e $w := Bg$. Então $Av = f$ e $Aw = g$ e como A é linear obtemos $A(v+w) = Av + Aw = f + g$, então $B(f + g) = v + w = Bf + Bg$. Deixamos ao

[3] Com efeito $B = BI_F = B(AC) = (BA)C = I_EC = C$.

leitor verificar que $B(\alpha f) = \alpha Bf$. Também tem a propriedade de ser inversa à direita e esquerda, com efeito para $v \in E$ denota $f := Av$, então

$$ABf = Av = f, \qquad BAv = Bf = v.$$

"$\Leftarrow$" Suponha que A admite a inversa $A^{-1} : F \to E$. Então A^{-1} é inversa à direita e à esquerda de A. Assim A é sobrejetivo e injetivo segundo os Teoremas 6.2.3 e 6.3.6. Mas bijetivo e linear significa isomorfismo. $\square$

Corolário 6.4.5. *Dado isomorfismos $E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G$, então composição BA e múltiplos αA são isomorfismos para todos os escalares não-nulos $\alpha \neq 0$.*

Demonstração. Proposição 6.4.4 e Exercício 6.4.2. $\square$

Exercício 6.4.6 (Isomorfismo é relação de equivalência)**.** Mostre que isomorfismo '$\simeq$' é uma **relação de equivalência** no conjunto de todos os espaços vetoriais: ou seja, mostre que são satisfeitos os três axiomas seguintes:

$E \simeq E$ para cada um espaço vetorial; (reflexividade)

$E \simeq F \quad \Rightarrow \quad F \simeq E$; (simetria)

$E \simeq F$ e $F \simeq G \quad \Rightarrow \quad E \simeq G$. (transitividade)

Teorema 6.4.7. *Dada uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$, então*

A bijetiva (isomorfismo) $\quad\Leftrightarrow\quad$ A leva uma base de E numa base de F.

Demonstração. "$\Rightarrow$" Seja A um isomorfismo e $\mathcal{B}$ uma base de E. Resta mostrar que o conjunto $A\mathcal{B}$ é LI e gera F. LI segue de Teorema 6.3.1 (uma TL injetiva A leve LI em LI) e como $\mathcal{B}$ gera E o Lema 6.0.18 diz que $\langle A\mathcal{B}\rangle = \mathrm{Im}(A) = F$ onde a segunda identidade é a sobrejetividade de A.
"$\Leftarrow$" Dado um base $\mathcal{B}$ de E, então $A\mathcal{B}$ é uma base de F segundo a hipótese.
A INJETIVO ($\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$): Suponha $v \in E$ e $Av = \mathcal{O}$. Escrevemos v como CL $v = \sum_{i=1}^{k(v)} \alpha_i \xi_i$ de elementos ξ_i da base $\mathcal{B}$. Então

$$\mathcal{O} = Av = A \sum_i \alpha_i \xi_i = \sum_i \alpha_i \underbrace{A\xi_i}_{\in A\mathcal{B}}.$$

Como $A\mathcal{B}$ é um conjunto LI todos os coeficientes $\alpha_i = 0$ se anulam. Assim $v = \mathcal{O}$ o que mostra que $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$.
A SOBREJETIVO: Segundo hipótese $A\mathcal{B}$ é uma base de F. Dado $f \in F$, escrevemos f como CL $f = \sum_{j=1}^{\ell(f)} \beta_j A\xi_j$ de elementos $A\xi_j$ da base $A\mathcal{B}$. O elemento de E definido por $v := \sum_j \beta_j \xi_j$ satisfaz $Av = A \sum_j \beta_j \xi_j = \sum_j \beta_j A\xi_j = f$. $\square$

Corolário 6.4.8. *Um espaço vetorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$ e de dimensão $n \in \mathbb{N}_0$ é isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Demonstração. Escolha uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ de E e defina a aplicação $A : \mathbb{K}^n \to E$ na forma $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$. Note-se que A é linear e que $Ae_j = A(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = 1 \cdot \xi_j = \xi_j$. Assim A leva a base canônica $A\mathcal{E}^n = \mathcal{B}$ na base $\mathcal{B}$, então A é um isomorfismo segundo Teorema 6.4.7. □

Corolário 6.4.9. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e de dimensões finitas, então*

$$E \simeq F \qquad \Leftrightarrow \qquad \dim E = \dim F.$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Seja $A\colon E \to F$ um isomorfismo e $\mathcal{B}$ uma base de E. Então $A\mathcal{B}$ é base de F segundo Teorema 6.4.7. e $|\mathcal{B}| = |A\mathcal{B}|$ como A é bijetivo. Daí $\dim E := |\mathcal{B}| = |A\mathcal{B}| =: \dim F$.
"$\Leftarrow$" Corolário 6.4.8 da dois isomorfismos $E \simeq \mathbb{K}^{\dim E} = \mathbb{K}^{\dim F} \simeq F$. □

Exemplo 6.4.10. O espaço vetorial $\mathcal{S}(n)$ das matrizes $n \times n$ simétricas e o espaço vetorial $\mathcal{P}_{\frac{n(n+1)}{2}-1}$ dos polinômios de grau menor ou igual $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ são isomorfos. Com efeito as dimensões são iguais – segundo as fórmulas (3.2.2) e (3.0.1) – e assim Corolário 6.4.9 aplica.

Exercício 6.4.11. Dado $A \in \mathcal{L}(E)$ onde $\dim E < \infty$, defina

$$\begin{aligned} T_A : \mathcal{L}(E) &\to \mathcal{L}(E), \\ X &\mapsto AX. \end{aligned}$$

Prove que T_A é linear e que T_A é invertível se, e somente se A é invertível. Mesmo problema com $S_A(X) := XA$.

Exercício 6.4.12. Estabeleça um isomorfismo entre o espaço vetorial das matrizes reais simétricas $n \times n$ e o espaço das matrizes reais *triangulares inferiores* ($a_{ij} = 0$ se $i < j$).
Idem entre as matrizes anti-simétricas e as triangulares inferiores com diagonal nula.

Exercício 6.4.13. Sejam E, F espaços vetoriais tais que $\dim E \le \dim F < \infty$. Prove que existem $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tais que A é injetiva e B é sobrejetiva.

Exercício 6.4.14. Sejam E, F espaços vetoriais (de dimensão finita ou infinita). Sejam $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tais que AB é invertível.

(a) Prove que A é sobrejetiva e B é injetiva.

(b) Se AB e BA são invertíveis, prove que A é invertível.

6.5 Teorema de Núcleo e Imagem

Teorema 6.5.1 (Teorema de núcleo e imagem)**.** *Para uma transformação linear* $A\colon E \to F$ *com domínio* E *de dimensão finita* n *vale*

$$\dim E = \dim \mathrm{N}(A) + \dim \mathrm{Im}(A).$$

Demonstração. Segundo Lema 6.0.15 os conjuntos $\mathrm{N}(A)$ e $\mathrm{Im}(A)$ são subespaços de E e F, respectivamente. Segundo Teorema 3.2.1 (c) e Corolário 6.0.19 temos

$$k := \dim \mathrm{N}(A) \le \dim E =: n < \infty;$$
$$\ell := \dim \mathrm{Im}(A) \le \dim E =: n < \infty.$$

Escolha uma base ordenada $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ de $\mathrm{N}(A)$ e uma $(A\nu_1, \dots, A\nu_\ell)$ de $\mathrm{Im}(A)$. Resta mostrar que

$$\mathcal{B} := (\xi_1, \dots, \xi_k, \nu_1, \dots, \nu_\ell)$$

é uma base de E, porque neste caso $\dim E = k + \ell = \dim \mathrm{N}(A) + \dim \mathrm{Im}(A)$.

***$\mathcal{B}$* é LI.** Suponha que uma CL em $\mathcal{B}$ representa o vetor nulo, ou seja

$$\alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_k\xi_k + \beta_1\nu_1 + \dots + \beta_\ell\nu_\ell = \mathcal{O}.$$

Resta mostrar que todos os coeficientes se anulam. Aplique A usando linearidade e que $\xi_i \in \mathrm{N}(A)$ para obter

$$\alpha_1 \underbrace{A\xi_1}_{\mathcal{O}} + \dots + \alpha_k \underbrace{A\xi_k}_{\mathcal{O}} + \beta_1 A\nu_1 + \dots + \beta_\ell A\nu_\ell = \mathcal{O}.$$

Então $\beta_1 = \dots = \beta_\ell = 0$ porque toda CL no conjunto LI $\{A\nu_1, \dots, A\nu_\ell\}$ e representando o vetor nulo tem todos coeficientes nulos. Neste caso a primeira identidade simplifica-se para $\alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_k\xi_k = \mathcal{O}$. Mas os ξ_i's formam uma base, então um conjunto LI, assim os coeficientes se anulam $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

***$\mathcal{B}$* gera *E*.** Dado $v \in E$, temos que exprimir v como CL em $\mathcal{B}$. Como temos uma base de $\mathrm{Im}(A)$, escrevemos $Av \in \mathrm{Im}(A)$ como CL $Av = \beta_1 A\nu_1 + \dots + \beta_\ell A\nu_\ell$ com coeficientes únicos β_j. Mas isso nos da um elemento w do núcleo

$$A\underbrace{(v - \beta_1\nu_1 - \dots - \beta_\ell\nu_\ell)}_{=:w} = \mathcal{O}.$$

Exprimindo w como CL na base do núcleo, com coeficientes únicos α_j, obtemos

$$\alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_k\xi_k = w := v - \beta_1\nu_1 - \dots - \beta_\ell\nu_\ell.$$

Assim temos exprimido

$$v = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_k\xi_k + \beta_1\nu_1 + \dots + \beta_\ell\nu_\ell$$

como CL em $\mathcal{B}$. □

Corolário 6.5.2. *Para uma transformação linear $A\colon E \to F$ entre espaços vetoriais da mesma dimensão finita $n = \dim E = \dim F$ são equivalente*

$$A \text{ injetivo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ sobrejetivo} \quad (\Leftrightarrow \quad A \text{ isomorfismo}).$$

Demonstração. Da hipótese da mesma dimensão e do Teorema 6.5.1 sabemos

$$\dim F = \dim E = \dim \mathrm{N}(A) + \dim \mathrm{Im}(A).$$

Injetividade (equivalente a $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$ segundo Lema 6.0.17) implica $\dim F = \dim \mathrm{Im}(A)$, então $F = \mathrm{Im}(A)$ (sobrejetividade) segundo Teorema 3.2.1 (d). Vice versa, sobrejetividade ($F = \mathrm{Im}(A)$) implica $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$ (injetividade). □

Exercício 6.5.3 (Errado na dimensão infinita)**.** Considere os operadores lineares $A, B\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ dado por empurrar todos os membros por um lugar

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \\ B(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_2, x_3, \dots). \end{aligned}$$

Mostre que A é linear e injetivo, mas não é sobrejetivo, enquanto B é linear e sobrejetivo, mas não é injetivo,

Corolário 6.5.4. *Na mesma dimensão finita $n = \dim E = \dim F$ ser inversa à esquerda é equivalente a ser inversa à direita, em símbolos para $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, E)$ são equivalentes*

$$BA = I_E \quad \Leftrightarrow \quad AB = I_F.$$

No todo caso A é invertível com inversa $A^{-1} = B = C$.

Demonstração. Temos as três equivalências

$$\begin{aligned} &\exists B \in \mathcal{L}(F, E)\colon BA = I_E \\ &\Leftrightarrow A \text{ injetivo} \\ &\Leftrightarrow A \text{ sobrejetivo} \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{L}(F, E)\colon AC = I_F \end{aligned}$$

segundo respectivamente os três resultados Teorema 6.3.6, Corolário 6.5.2, e Teorema 6.2.3. Mas neste caso $C = B$ e este operador é a inversa de A como mostrado na Definição 6.4.1. □

Exemplo 6.5.5. Dado uma lista não-nula $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{O}\}$, o subconjunto

$$\mathrm{H}_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_\alpha(x) := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\} = \mathrm{N}(\varphi_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$$

é chamado de hiperplano e foi introduzido no Exemplo 2.1.8. Já sabemos que

$$\dim \mathrm{H}_\alpha = n - 1$$

como no Exemplo 3.0.13 d) temos visto uma base composto de $n-1$ elementos.

Um caminho alternativo para calcular a dimensão é do ponto da vista como núcleo do funcional linear $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. O Teorema 6.5.1 diz que

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_{=n} = \dim \underbrace{\mathrm{N}(\varphi_\alpha)}_{\mathrm{H}_\alpha} + \underbrace{\dim \mathrm{Im}(\varphi_\alpha)}_{=1}.$$

Resta ver que $\mathrm{Im}(\varphi_\alpha) = \mathbb{R}$. O subespaço $\mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$ de $\mathbb{R}$ não é o trivial $\{0\}$ porque $\varphi_\alpha \alpha = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 > 0$ é não-nulo como $\alpha \neq (0, \ldots, 0)$. Entao $\mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$ deve ser o outro subespaço de $\mathbb{R}$, o $\mathbb{R}$ mesmo, veja Exercício 2.1.4.

6.6 Escalonamento: Núcleo e imagem

Aplicamos o processo de escalonar uma matriz $\mathbf{a}$ – conteúdo do curso MA141 e revisado no Apêndice A.2 – para calcular a dimensão do subespaço gerado por m vetores.

6.6.1 Sistemas lineares

Sistemas lineares foram introduzido em Definição A.3.1 e tratado em Exemplo 6.0.21. Estes conteúdos são pressupostos. Seja $\mathbf{a}$ uma matriz $m \times n$ com entradas num corpo $\mathbb{K}$ e $b \in \mathbb{K}^m$ uma lista. Lembre-se de (A.3.1) que a equação $\mathbf{a}x = b$ é chamado de sistema linear de m equações a n incógnitas $(x_1, \ldots, x_n) = x$.

Existência de uma solução x é equivalente ao fato que a lista b é localizada na imagem da matriz $\mathbf{a}$, em símbolos

$$\mathbf{a}x = b \text{ tem solução } x \quad \Leftrightarrow \quad b \in \mathrm{Im}(\mathbf{a}) \quad \Leftrightarrow \quad p := \mathrm{posto}(\mathbf{a}) = \mathrm{posto}[\mathbf{a} : b]$$

veja Exemplo 6.0.21. Mas neste caso, tem como saber quantas soluções haverá?

Lema 6.6.1. *Suponha que* $\mathbf{a}x = b$ *admite uma solução* x_0 $(b \in \mathrm{Im}(\mathbf{a}))$. *Então*

a) $p = n$ ($\mathbf{a} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *é injetivo*) $\Leftrightarrow$ *a solução é única;* $\qquad p := \mathrm{posto}(\mathbf{a})$

b) $p < n$ ($\mathbf{a}$ *não é injetivo*) $\Leftrightarrow$ *tem infinito muitas soluções.*

No caso b) o conjunto das soluções x *de* $\mathbf{a}x = b$ *é dado pela translação do núcleo*

$$x_0 + \mathrm{N}(\mathbf{a}) = \{\textit{soluções } x \textit{ de } \mathbf{a}x = b\}$$

e $\dim \mathrm{N}(\mathbf{a}) = n - p \geq 1$.

Demonstração. Como a dimensão p da imagem $\mathrm{Im}(\mathbf{a}) \subset \mathbb{K}^m$ é no máximo a dimensão n do domínio, segundo Corolário 6.0.19, temos que $p \leq \max\{n, m\}$.
a) Segundo o Teorema 6.5.1 de núcleo e imagem $n = p$ ($\dim \mathbb{K}^n = \dim \mathrm{Im}(\mathbf{a})$) é equivalente a $\mathrm{N}(\mathbf{a}) = \{\mathcal{O}\}$ o que, segundo Lema 6.0.17, é equivalente a $\mathbf{a} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ é injetivo. Equivalentemente $\mathbf{a} \colon \mathbb{K}^n \to \mathrm{Im}(\mathbf{a})$ é um isomorfismo, e assim $b \in \mathrm{Im}(\mathbf{a})$ corresponde a exatamente um elemento $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $\mathbf{a}x = b$.
b) Seja $\nu \in \mathrm{N}(\mathbf{a})$, então $x := x_0 + \nu$ satisfaz $\mathbf{a}x = \mathbf{a}x_0 + \mathbf{a}\nu = b$. □

Lembra o Lema A.3.3: Uma lista x é solução do sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ se e somente se x é solução do sistema linear associado à matriz escalonada $[\mathbf{a} : b]_{\mathrm{esc}}$.

Lembra o Comentário A.3.5: Para resolver o SL $\mathbf{a}x = b$

- escalona a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$
- obtendo uma matriz escalonada $[\mathbf{a} : b]_{\mathrm{esc}} =: [\tilde{\mathbf{a}} : \tilde{b}]$, então
- resolve o SL $\tilde{\mathbf{a}}x = \tilde{b}$ "de baixo para cima", veja Exemplo A.3.6, então
- uma lista x é solução de $\tilde{\mathbf{a}}x = \tilde{b}$ se e somente se x é solução de $\mathbf{a}x = b$.

6.6.2 Determinar bases de nucleo e imagem

Exemplo 6.6.2. Determine uma base do núcleo da transformação linear

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + 4y, 3x + 6y + 3z)\,.$$

Uma solução. Para obter uma matriz de A escolhemos as bases mais simples, a base canônica $\mathcal{E}^3$. Obtemos

$$\mathbf{a} := [A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Escalonamos a matriz

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(oe)}} \cdots \xrightarrow{\text{(oe)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_{\mathrm{esc}} : \mathcal{O}].$$

Agora resolvemos o sistema escalonado $\mathbf{a}_{\mathrm{esc}} x = \mathcal{O}$, ou seja

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \alpha = -2\beta,\ \beta \in \mathbb{R}, \\ \qquad -2\gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = 0, \\ \qquad\quad 0 = 0. \end{cases}$$

Então $\mathrm{N}(\mathbf{a}) = \mathbb{R}\xi$ onde $\xi = (-2, 1, 0)$ e $\mathcal{B} := \{\xi\}$ é uma base.

Exemplo 6.6.3. Seja $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ a base canônica e $A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinado por

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \ 2e_1 - e_2 - e_3 \\ Ae_2 &= -e_1 + e_2 \\ Ae_3 &= -e_1 \qquad + e_3. \end{aligned}$$

Determine os subespaços $\mathrm{N}(A)$, $\mathrm{Im}(A)$, as dimensões, e uma base de cada um. (Tenhamos encontrado A antes nos Exercícios 5.2.3 e 5.4.8.)

Uma solução. A definição de A já mostra que a matriz e dada por

$$\mathbf{a} := [A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

• Como $\mathcal{E}$ corresponde ao isomorfismo identidade, veja (5.0.1) com $\mathcal{U} = \mathcal{E}$, e usando (4.2.2) obtemos passos 1 e 2 de

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(\mathbf{a}) = \text{Esp-col}(\mathbf{a}) = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}^t).$$

Escalonamos

$$\mathbf{a}^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(oe)}} \cdots \xrightarrow{\text{(oe)}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \ell_1 \\ \ell_2. \\ \end{array}$$

Então as listas $\{\ell_1, \ell_3\}$ formam uma base da imagem e assim $\dim \mathrm{Im}(A) = 2$.
• Em respeito ao núcleo de $A = \mathbf{a}$ escalonamos o SL $\mathbf{a}x = 0$, ou seja

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(oe)}} \cdots \xrightarrow{\text{(oe)}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos o SL escalonado de baixo para cima, ou seja

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 & \Rightarrow x = z,\ z \in \mathbb{R}, \\ \qquad y - z = 0 & \Rightarrow y = z,\ z \in \mathbb{R}, \\ \qquad\quad 0 = 0. \end{cases}$$

Assim $\mathrm{N}(A) = \mathbb{R}\xi$ onde $\xi = (1, 1, 1)$. Então $\{\xi\}$ é uma base e a dimensão é 1.

Exercício 6.6.4. Calcule a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 1, -1, 1), & v_2 &= (1, -1, -1, 0, 1), \\ v_3 &= (0, 1, 1, -1, -1), & v_4 &= (-1, 1, 1, -1, 1). \end{aligned}$$

Decida se o vetor $b = (6, 18, 1, -9, 8)$ pertence ou não a este subespaço.

Exercício 6.6.5. Encontre uma base para o núcleo da transformação linear

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^4 &\to \mathbb{R}^3, \\ (x, y, z, t) &\mapsto (2x + y - z + 3t, x - 4y + 2z + t, 2y + 4z - t)\,. \end{aligned}$$

[Dica: Calcule a matriz $\mathbf{c}$ de C. Escalonamento. Resolve o sistema linear homogêneo.]