Capítulo 1

Espaços vetoriais

1.1 Axiomas

Definição 1.1.1. Um[1] **conjunto** X é composto de elementos os quais são dois-a-dois diferentes. Então não faz sentido escrever expressões da forma ~~$\{2,3,2\}$~~. Um conjunto não é ordenado, por exemplo $\{1,2\}=\{2,1\}$. A **união** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A\cup B$ cujos elementos pertencem a A ou a B. Por exemplo

$$\{2,3\}\cup\{2\}=\{2,3\}=\{3,2\}. \tag{1.1.1}$$

A **interseção** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A\cap B$ composto de todos os elementos que pertencem a ambos A e B. Um conjunto chama-se **ordenado** se seus elementos são enumerados, por exemplo $X=\{x_1,\dots,x_n\}$. O conjunto que não contem nenhum elemento é chamado **o conjunto vazio**, símbolo $\emptyset$. Usamos a notação $A\dot\cup B$ para transferir a informação adicional que os dois conjuntos A e B são **disjuntos**, ou seja não tem nenhum elemento comum, em símbolos $A\cap B=\emptyset$. Denotamos de $|X|$ o **número de elementos de um conjunto** quando o número é finito. Neste caso X é chamado de **conjunto finito**.

Um **subconjunto** de um conjunto X é um conjunto A tal que cada um elemento de A é elemento de X, notação $A\subset X$. Observe que conforme esta definição, o conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de todos conjuntos: para todo conjunto X temos $\emptyset\subset X$.

Definição 1.1.2. *"Sejam $x_1,\dots,x_\ell$ elementos de um conjunto X"* é uma frase encontrada frequentemente e depois quer-se trabalhar com o conjunto composto destes elementos. Um ponto sutil é que não é proibido que uns dos elementos, ainda todos, são iguais. Mas conforme nossa convenção para denotar conjuntos, veja Definição 1.1.1, a notação $\{x_1,\dots,x_\ell\}$ só faz sentido, e é permitida, quando os elementos são dois-a-dois diferente. A notação certa, junta com sua abreviação, para **o conjunto contendo os elementos $\boldsymbol{x_1,\dots,x_\ell}$ de $\boldsymbol{X}$** é

$$\{x_1\}\cup\dots\{x_\ell\}=:\{x_i\mid i=1,\dots,\ell\}.$$

[1] Cap. 1 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 14 de março de 2024

Uma escolha arbitraria forma o conjunto $\cup_{\lambda\in\Lambda}\{x_\lambda\} =: \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Definição 1.1.3. O **produto cartesiano** $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto de todas listas ordenadas (x, y) dos elementos $x \in X$ e $y \in Y$, ou seja

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Observe que se um fator fica vazio, ou seja $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, então $X \times Y = \emptyset$. Abreviamos

$$Y^{\times k} := Y \times \cdots \times Y \tag{1.1.2}$$

se na direita temos k fatores.

1.1.1 Grupo

Definição 1.1.4. Um conjunto não-vazio $G \neq \emptyset$ munido de uma operação

$$* : G \times G \to G, \quad (f, g) \mapsto f * g$$

é chamado um **grupo**, notação $(G, *)$, se valem os três axiomas

1. $f*(g*h) = (f*g)*h$ para todos os elementos $f, g, h \in G$ (associatividade)
2. existe um elemento $e \in G$ tal que (elemento neutro)
   $$e * g = g, \qquad g * e = g$$
   para todos os elementos $g \in G$.
3. para todo $g \in G$ existe um elemento $h \in G$ t.q. (inverso)
   $$g * h = e, \quad h * g = e.$$
   Chama-se h de **inverso** do elemento g e denota-se h com o símbolo $\bar{g}$.

Em palavras,

um grupo é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa, contendo um elemento neutro, e tal que cada um elemento admite um inverso.

O seguinte lema diz que um grupo G tem exatamente um elemento neutro, notação comum e, e cada um elemento g de G tem exatamente um inverso, notação $\bar{g}$. Ás vezes é comum e útil escrever o elemento neutro na forma 0 ou 1 e os inversos na forma $-g$ ou g^{-1}; veja os dois exemplos em Exercício 1.1.7 a).

Lema 1.1.5. *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*
1) *O elemento neutro é único.*
2) *Os elementos inversos são únicos.*
3) *Dado elementos $f, g, h \in G$, então vale:*
a) $f * g = f * h \ \Rightarrow\ g = h$ *(lei da corte)*
b) $f * g = f \ \Rightarrow\ g = e$
c) $f * g = e \ \Rightarrow\ g = \bar{f}$

Note que b) e c) são consequências imediatas de a).

Demonstração. Lema C.1.1. □

Definição 1.1.6. Um grupo $(G, *)$ é chamado de **abeliano** se a ordem dos dois elementos na operação não importa, em símbolos $f * g = g * f$. (comutatividade)

Exercício 1.1.7. Mostre que
a) são grupos (ainda abelianos): $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, \cdot)$
b) não são grupos: $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}_0, +)$ e $(\mathbb{Z}, \cdot)$
c) não são grupos abelianos:
– as matrizes 3×3 sob multiplicação matriz
– as rotações em $\mathbb{R}^3$ sob composição.

1.1.2 Corpo

Definição 1.1.8. Um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações[2]

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \qquad\qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$

é chamado um **corpo** se valem os três axiomas

1. $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* seja denotado 0 e $-\alpha$ denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K}$.)

2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* seja denotado 1 e α^{-1} denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.)

3. Distributividade: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.
   (É costume escrever $\alpha\beta$ em vez de $\alpha \cdot \beta$.)

Para distinguir chamamos o elemento neutro da primeira operação – para a qual temos usado o símbolo "+" ainda que geralmente não tem nada ver com adição de números – o **elemento neutro aditivo**. Chamamos o elemento neutro da segunda operação – motivado pelo uso do símbolo "·" – o **elemento neutro multiplicativo**. Como é feio escrever $\alpha + (-\beta)$ para a soma de um elemento com um elemento inverso aditivo definimos $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$. Isso é uma abreviação só, não é, nem tem diferença. Analogamente simplificamos a notação escrevendo α/β em vez de $\alpha\beta^{-1}$.

Corolário 1.1.9. *Um corpo contem pelo menos dois elementos.*

Demonstração. Pelos axiomas 1. e 2. cada uma operação tem um elemento neutro as quais não podem ser iguais por causa de 2. □

Lema 1.1.10. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e 0 o elemento neutro da adição. Então $0\beta = 0$ e $\beta 0 = 0$ para todos os elementos $\beta \in \mathbb{K}$.*

---

[2] as quais vamos batizar aos nomes "+" e "·" – ainda que *geralmente não tem nada ver com adição e multiplicação de números*, mas esta escolha é motivada pelos exemplos principais (Exemplo 1.1.12) nos quais "+" e "·" são adição e multiplicação de números

Demonstração. Lema C.1.2. □

Definição 1.1.11. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e 0 e 1 os elementos neutros da adição e multiplicação. O menor número natural $k \geq 2$, caso existisse, tal que a soma seguinte se anula

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{k \text{ vezes}} = 0$$

é chamado de **caraterística** do corpo. Caso não existe nenhum tal k chamamos o corpo de **caraterística nula**.

Exemplos de corpos

Exemplo 1.1.12 (Os corpos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$)**.** São corpos $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Exemplo 1.1.13 (O corpo dos números complexos $\mathbb{C}$)**.** Vamos chamar a letra i de **unidade imaginária**. Um **número complexo** é uma soma formal da forma $a + ib$ onde a e b são números reais. O conjunto $\mathbb{C}$ de todos os números complexos munido das duas operações definidas assim

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &:= (a + c) + i(b + d)\\ (a + ib) \cdot (c + id) &:= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

é um corpo, denotado $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, ou simplesmente $\mathbb{C}$.

Enquanto a regra da adição é fácil para memorizar, você consegue memorizar a multiplicação? Eu não. Deixa ver se tem um jeito simples para chegar na fórmula certa: Fazemos multiplicação formal como fossem números, ou seja

$$\begin{aligned}(a + ib) \cdot (c + id) &= ac + aid + ibc + i^2 bd\\ &= ac + i^2 bd + i(ad + bc)\\ &= (ac - bd) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Assim só precisamos memorizar que $i^2 = -1$, mas isso é uma fórmula famosa.

Considere um número complexo $z = a + ib$. Chama-se a a **parte real** de z, notação $\mathrm{Re}(z) = a$, e chama-se b a **parte imaginária** de z, notação $\mathrm{Im}(z) = b$.

O **complexo conjugado** de $z = a + ib$ é definido por $\bar{z} := a - ib$ e o **absoluto**, ou módulo, por $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercício 1.1.14. Os números inteiros $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não formam um corpo.

Exemplo 1.1.15 (Adição e multiplicação modulo n)**.** Dado um número natural $n \geq 2$,[3] defina no conjunto $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ as duas operações

$$a +_n b := a + b \pmod{n}, \qquad a \cdot_n b := ab \pmod{n}$$

[3] para $n = 1$ obtemos o grupo aditivo trivial $\mathbb{Z}_1 = \{0\}$ o qual nunca pode ser um corpo, porque contem 1 elemento só; veja Corolário 1.1.9

para todos os elementos $a, b \in \mathbb{Z}_n$.[4]

Fato. $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ é um corpo $\iff$ n é um número primo.

Um primo p é a caraterística de $\mathbb{Z}_p$. Para valores pequenos de n pode-se checar de mão se $\mathbb{Z}_n$ é um corpo ou não. Só precisa-se calcular as tabelas de adição e de multiplicação. Vamos ilustrar isso num exemplo.

Exemplo 1.1.16 ($\mathbb{Z}_4$ não é um corpo.)**.** Para checar se $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ e $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{e_{+_4}\}, \cdot_4)$ são grupos abelianos é útil calcular as tabelas de adição e de multiplicação.

• $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos os valores na tabela

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

São 4 passos:

1. Determinar o elemento neutro de $+_4$: Checamos se a linha em cima da linha solida horizontal, ou seja a linha 0 1 2 3, tem uma cópia nas linhas embaixo. Sim, tem 0 1 2 3. Neste caso o elemento em frente da cópia é o elemento neutro de $+_4$, certo? No nosso caso $e_{+_4} = 0$. Se não tem copia, não tem elemento neutro, e assim não seria um grupo.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 4) linhas de valores na tabela localiza o elemento neutro 0 (se existir). Então o elemento g em frente da linha de 0 e o elemento em cima da coluna de 0, notação $\bar{g}$, são inversos um do outro. Caso uma linha não contem 0, então este g não tem inverso, e assim não seria um grupo. No nosso caso todo elemento g tem um inverso:

g	$\bar{g}$ (denotado $-g$)
0	0
1	3
2	2
3	1

3. Associatividade: Calculando caso por caso temos que checar se $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ para todas as possibilidades. No nosso caso vale.
4. Grupo abeliano (comutatividade): Vale se a tabela é simétrica em respeito à diagonal. No nosso caso vale.

Na verdade temos esquecido um passo: No início de tudo temos que checar se a operação é bem definida, ou seja os valores da operação (os valores na tabela) realmente são elementos do conjunto, ou não. Olhamos a tabela - sim.
Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano.

• $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos a tabela

[4] Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\ell \in \mathbb{Z}$ um número inteiro. Pela definição o elemento $\ell \pmod n \in \mathbb{Z}_n$ é o resto $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ que falta depois você "enche" ℓ com múltiplos de n. Em símbolos, $\ell \pmod n := r$ onde $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ é o único elemento tal que $\ell = kn + r$ para um $k \in \mathbb{Z}$.

$\cdot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Como o valor 0 não é elemento de $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ a multiplicado $\cdot_4$ não é uma operação em $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$, então não pode ser um grupo.

Ainda assim vamos repetir os 4 passos para $\cdot_4$ (em vez de $+_4$) para ver se tem outras falhas ainda. As respostas são:

1. Elemento neutro de $\cdot_4$: Tem, é o elemento $e_{\cdot_4} = 1$.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 3) linhas de valores na tabela localizamos o elemento neutro 1 (se existir). No nosso caso

g	$\bar{g}$ (denotado g^{-1})
1	1
2	não tem!
3	3

   o elemento 2 não tem um inverso e já por isso não temos um grupo.
3. Associatividade: Ainda que a fórmula $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ vale, os valores não são todos em $Z_4 \setminus \{0\}$.
4. Grupo abeliano (comutatividade): A tabela é simétrica em respeito à diagonal, mas os valores não são todos em $Z_4 \setminus \{0\}$.

Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ não é um grupo abeliano.

Exercício 1.1.17. Seja $n = 6$:

1. Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso $\mathbb{Z}_6$.
2. Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_6$. Eles sempre existem?
3. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6$ identifique o elemento inverso aditivo.
4. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.
5. Cheque que $\mathbb{Z}_6$ não é um corpo. Quais dos axiomas não valem?

Matéria avançada

Motivado pelas perguntas da Turma C na 1ª aula 2016-2 vamos dar um exemplo de um corpo onde a primeira operação não está relacionada à adição de números nem a segunda à multiplicação de números.

Exercício 1.1.18 (Corpo $(P,\cdot,\circ,\mathbb{R})$ onde $\cdot$ não é adição e $\circ$ não é multiplicação). Para $\alpha\in\mathbb{R}$ considere a função $p_\alpha:(0,\infty)\to(0,\infty)$, $x\mapsto x^\alpha$. Seja o conjunto

$$P:=\{p_\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$$

composto de todas funções $p_\alpha(x)=x^\alpha$ com $\alpha\in\mathbb{R}$ e munido das operações

$$\begin{aligned}\cdot: P\times P&\to P & \circ: P\times P&\to P\\ (p_\alpha,p_\beta)&\mapsto p_\alpha\cdot p_\beta & (p_\alpha,p_\beta)&\mapsto p_\alpha\circ p_\beta\end{aligned}$$

chamado de **multiplicação**[5] e **composição**[6] de funções, respectivamente. Mostre que:

1. As duas operações são bem definidas: $p_\alpha\cdot p_\beta\in P$ e $p_\alpha\circ p_\beta\in P$, de fato
$$p_\alpha\cdot p_\beta=p_{\alpha+\beta},\qquad p_\alpha\circ p_\beta=p_{\alpha\beta}$$
2. $(P,\cdot)$ é um grupo abeliano com elemento neutro $p_0\equiv 1$.
3. $(P\setminus\{p_0\},\circ)$ é um grupo abeliano com elemento neutro $p_1(x)=x$.
4. Distributividade: $(p_\alpha\cdot p_\beta)\circ p_\gamma=(p_\alpha\circ p_\gamma)\cdot(p_\beta\circ p_\gamma)$, $\forall p_\alpha,p_\beta,p_\gamma\in P$.

1.1.3 Espaço vetorial

O conceito de espaço vetorial reportar-se a um livro de 1844 do suiço Hermann Günther Grassmann (1809-1877), professor num ginásio, veja [Koe85, p. 10-15]. A forma abstrata a qual introduzimos no seguinte só apareceu em torno de 1900.

Definição 1.1.19. Um **espaço vetorial E sobre um corpo** [7] $\mathbb{K}$ é um quádruplo $(E,+,\cdot,\mathbb{K})$ composto de um conjunto E, um corpo $\mathbb{K}$, e duas operações

$$\begin{aligned}+: E\times E&\to E & \cdot: \mathbb{K}\times E&\to E\\ (v,w)&\mapsto v+w & (\alpha,v)&\mapsto \alpha v\end{aligned}$$

chamadas de **adição** e **multiplicação escalar**, respectivamente, tal que vale

1. $(E,+)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* é denotado $\mathcal{O}$ e chamado o **vetor nulo**.)
2. Distributividade: $\begin{cases}(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v\\ \alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w\end{cases}$
3. Compatibilidade: $\begin{cases}(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)\\ 1v=v\end{cases}$

[5] $(p_\alpha\cdot p_\beta)(x):=p_\alpha(x)\cdot p_\beta(x)$
[6] $(p_\alpha\circ p_\beta)(x):=p_\alpha(p_\beta(x))$
[7] fala-se abreviando "*E é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$" ou ainda "*E é um espaço vetorial*".

Onde as identidades tem que ser válidas para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e todos $v, w \in E$. Chama-se **escalares** os elementos do corpo $\mathbb{K}$ e **vetores** os elementos de E.

Lema 1.1.20. *Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ um espaço vetorial e $0 \in \mathbb{K}$ e $\mathcal{O} \in E$, então:*

(i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *para todos os escalares* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $0v = \mathcal{O}$ *para todos os vetores* $v \in E$.

(iii) *Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ são equivalentes:*

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}. \tag{1.1.3}$$

Demonstração. Lema C.1.3. □

Corolário 1.1.21 (Compatibilidade dos inversos aditivos com multiplicação)**.** *Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ vale:*

a) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

b) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

Demonstração. Corolário C.1.4. □

Corolário 1.1.22. *Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ no qual $1 + 1 \neq 0$. Neste caso para $v \in E$ temos*

$$v + v = \mathcal{O} \qquad \Rightarrow \qquad v = \mathcal{O}.$$

Demonstração. Como $\mathcal{O} = v + v = 1v + 1v = (1 + 1)v$ segue de (1.1.3) que ou $1 + 1 = 0$ no corpo $\mathbb{K}$ ou $v = \mathcal{O}$. (Lembre-se que $1 \in \mathbb{K}$, assim 1 geralmente não é um número e $1+1$ não tem nada ver com 2... Veja nota de rodapé no Lema 7.2.5.) □

1.2 Exemplos de espaços vetoriais

Exemplo 1.2.1 (O espaço vetorial trivial $\{\mathcal{O}\}$)**.** Seja E um conjunto com 1 elemento só. Vamos já denotar aquele elemento com o símbolo $\mathcal{O}$ (porque?). Então $E = \{\mathcal{O}\}$. Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer. Não tem escolha nenhuma para definir as duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (\mathcal{O}, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\alpha, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned}$$

Então $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ satisfaz os axiomas de um espaço vetorial, denotado simplesmente $E = \{\mathcal{O}\}$ e chamado de **espaço vetorial trivial**.

Exemplo 1.2.2 (Um corpo $\mathbb{K}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$)**.** Usa-se as duas operações chegando com o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ como as duas operações necessárias para tornar um conjunto (escolhemos $E := \mathbb{K}$) num espaço vetorial sobre um corpo (escolhemos $\mathbb{K}$). Com efeito $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

1.2.1 Listas ordenadas

Números reais

Exemplo 1.2.3 (O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$)**.** Seja

$$\mathbb{R}^n := \{u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as listas ordenadas de n números reais. Chamamos α_i o i-ésimo membro da lista. As duas operações

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

são definidas como adição membro-por-membro e multiplicação de todos membros com um escalar $\beta \in \mathbb{R}$. Checando todos axiomas vê-se que $\mathbb{R}^n$ é um espaco vetorial sobre o corpo dos números reais, notação $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^n$ só. O vetor nulo, também chamado de **origem**, é a lista

$$\mathcal{O} = (0, \dots, 0)$$

e o inverso de um elemento $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a lista $(-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$ a qual denotamos com o símbolo $-u$.

O ***i*-ésimo vetor canônico** é a lista de n membros

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

cujo i-ésimo membro é o número 1 e todos outros sao nulo 0. O conjunto

$$\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \tag{1.2.1}$$

de todos os vetores canônicos é chamado de **base canônica** de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.2.4 (O espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$)**.** O conjunto

$$\mathbb{R}^\infty := \{u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \in \mathbb{R}\}$$

de todas as sequências reais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ sob adição e multiplicação membro-por-membro, notação $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Exemplo 1.2.5 (O espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty_0$ sobre $\mathbb{R}$)**.** O conjunto

$$\mathbb{R}^\infty_0 := \{u \in \mathbb{R}^\infty \mid \text{só um número finito de membros são não-nulos}\}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ sob adição e multiplicação membro-por-membro como no exemplo prévio, notação $(\mathbb{R}^\infty_0, +, \cdot, \mathbb{R})$.
Dado $i \in \mathbb{N}$, a sequência com todos membros nulos exceto o i-ésimo qual é 1 denotamos também de e_i. O conjunto de todos os e_i's é denotado de

$$\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\} \tag{1.2.2}$$

e chamado de **base canônica** de $\mathbb{R}^\infty_0$.

Corpos gerais

Comentário 1.2.6 ($\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^\infty$)**.** Os espaços vetoriais $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^\infty$ sobre qualquer corpo $\mathbb{K}$ são definidos analogamente Exemplos 1.2.3 e 1.2.4.

1.2.2 Matrizes

No Apêndice A.1 introduzimos o conjunto $\mathrm{M}(m \times n)$ das matrizes $m \times n$ cujas entradas a_{ij} são números reais, munido de duas operações, adição e multiplicação escalar. O conteúdo do Apêndice A.1, de fato do Apêndice A inteiro, também vale para matrizes com entradas num corpo $\mathbb{K}$. Repetimos uns fatos.

Exemplo 1.2.7 (Espaço vetorial das matrizes $m \times n$)**.** O **espaço vetorial das matrizes $\boldsymbol{m \times n}$ sobre um corpo** $\mathbb{K}$ é o conjunto

$$\mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) := \left\{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{K},\, i = 1, \dots m,\, j = 1, \dots, n \right\}$$

onde a matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ é o quadro de escalares com m linhas e n colunas [8]

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

munido da adição entrada por entrada e da multiplicação escalar com escalares $\beta \in \mathbb{K}$ também entrada por entrada.

O vetor nulo é a matriz nula $\mathbf{0}$ cujas entradas são todas o escalar nulo $0 \in \mathbb{K}$. Se na matriz nula $n \times n$ colocamos o escalar $1 \in \mathbb{K}$ ao longo da diagonal obtemos a **matriz identidade** $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n$. O elemento inverso aditivo, notação $-\mathbf{a}$, de uma matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ tem como entradas os inversos aditivos dos a_{ij}, notação $-a_{ij}$.

Definição 1.2.8 (Linhas e colunas de matrizes)**.** Seja $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$ uma matriz $m \times n$. Note-se que o primeiro índice i de uma entrada a_{ij} indica a linha e o segundo j a coluna dela. Tendo isso na vista vamos denotar a **$\boldsymbol{k}$-ésima coluna**, respectivamente a **$\boldsymbol{\ell}$-ésima linha**, de uma matriz $\mathbf{a}$ com os símbolos

$$\mathbf{a}_{\bullet k} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_{\ell \bullet} = \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & \dots & a_{\ell n} \end{bmatrix}. \tag{1.2.3}$$

Temos escolhido o símbolo $\bullet$ para sugerir "este índice é aberto" – ele corre e assim gera uma lista, ou vertical ou horizontal dependente se $\bullet$ fica no primeiro ou no segundo lugar. Assim podemos escrever a matriz $\mathbf{a}$ nas formas seguintes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\bullet 1} & \dots & \mathbf{a}_{\bullet n} \end{bmatrix}.$$

[8] Os escalares a_{ij} são chamadas as **entradas da matriz**. Por definição que a entrada a_{ij} está localizada na i-ésima linha e j-ésima coluna.

Definição 1.2.9 (Espaço-coluna e espaço-linha)**.** Seja $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$ uma matriz $m \times n$. O **espaço-coluna** é o conjunto de todas as somas das colunas $\mathbf{a}_{\bullet k}$ da matriz decorado com fatores escalares α_k, em símbolos

$$\text{Esp-col}(\mathbf{a}) := \{\alpha_1 \mathbf{a}_{\bullet 1} + \cdots + \alpha_n \mathbf{a}_{\bullet n} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\} \subset \mathrm{M}(m \times 1; \mathbb{K}).$$

Analogamente no **espaço-linha** usa-se as linhas da matriz $\mathbf{a}$, ou seja

$$\text{Esp-lin}(\mathbf{a}) := \{\alpha_1 \mathbf{a}_{1\bullet} + \cdots + \alpha_n \mathbf{a}_{n\bullet} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}\} \subset \mathrm{M}(1 \times n; \mathbb{K}).$$

Produto matriz

O produto entre duas matrizes de tipos adequadas é definido no apêndice na fórmula (A.1.2) e umas propriedades do produto encontram-se no Lema A.1.5.

Para matrizes quadradas faz sentido investigar se admitem uma inversa ou não. Uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ é chamada de **invertível** se existe uma matriz quadrada $\mathbf{b}$ tal que $\mathbf{ab} = \mathbb{1}$.

1.2.3 Funções e polinômios

Exercício 1.2.10. Dado um conjunto não-vazio $X \neq \emptyset$ e um corpo $\mathbb{K}$, seja

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \to \mathbb{K} \text{ função}\}$$

o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$. Adição de funções e multiplicação com um escalar são definidas assim

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

para todos os $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. No caso especial $X = \mathbb{K}$ vamos abreviar $\mathcal{F}(\mathbb{K}) := \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

Comentário 1.2.11. A próxima observação ilustra o poder da matemática e um *ponto fundamental* dela - economizar através de abstração e *encontrar o certo ponto da vista*.

Observação 1.2.12.

a) Se $X = \{1, \ldots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.
b) Se $X = \mathbb{N}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$.
c) Se $X = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathrm{M}(m \times n)$.

Exercício 1.2.13 (Polinômios reais e complexos)**.** Seja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dados escalares $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, então chama-se uma soma finita

$$p = p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$$

de **polinômio** na variável $x \in \mathbb{K}$, no caso $\alpha_n \neq 0$ de **polinômio de grau $\boldsymbol{n}$**, e no caso $\alpha_n = 1$ de **polinômio mónico**. Forneça o conjunto dos polinômios com uma estrutura de um espaço vetorial $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ ou $(\mathcal{P}(\mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{C})$.

1.3 Independência linear

1.3.1 Combinação linear

Definição 1.3.1. Uma soma *finita* da forma

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell}_{=:w} \qquad \text{com } \alpha_j \in \mathbb{K},\ v_j \in E \tag{1.3.1}$$

é chamada de **combinação linear (CL)**. Uma tal CL chama-se de **trivial** se todos os coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ são nulos. Dizemos que

"os vetores $v_1, \ldots, v_\ell$ representam o vetor w"

ou

"o vetor w é CL dos vetores $v_1, \ldots, v_\ell$".

Um problema central na teoria dos espaços vetoriais: Dado vetores $v_1, \ldots, v_\ell$, existe uma CL não-trivial deles representando o vetor nulo?
Nas outras palavras, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ não todos nulos, tal que a CL correspondente dos vetores representa o vetor nulo? Em símbolos,

"existem coeficientes $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \neq (0, \ldots, 0)$ tal que $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O}$?"

Exercício 1.3.2. a) Caso possível escreva o vetor $b = (1, -3, 10) \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores $u = (2, -3, 5)$, $v = (1, 1, 0)$, e $w = (1, 0, 0)$.
b) Sejam $u = (1, 1)$, $v = (1, 2)$ e $w = (2, 1)$. Encontre números a, b, c e α, β, γ todos não-nulos, tais que

$$au + bv + cw = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

com $a \neq \alpha$, $b \neq \beta$ e $c \neq \gamma$.

[Dica: a) Determinar os coeficientes α, β, γ na CL de u, v, w a qual representa b lida a um SL. Escalonamento.[9]
b) Defina $x = a - \alpha$, $y = b - \beta$, e $z = c - \gamma$ para obter um SLH. Resolve.][10]

1.3.2 Linearmente independente

Definição 1.3.3 (Independência linear)**.** **Vetores** $v_1, \ldots, v_\ell$ são chamados de

- **linearmente dependente (LD)** se representam o vetor nulo através de uma CL não-trivial;

[9] encontre "o certo ponto da vista" (Comentário 1.2.11) e o SL vai chegar já escalonada..
[10] Respostas para seu controle: a) $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, -6)$. b) $(x, y, z) = z(-3, 1, 1)$. Escolha um $z \neq 0$, por exemplo $z = 1$. Então $(a, b, c) = (\alpha - 3, 1 + \beta, 1 + \gamma)$. Toda escolha de reais $\alpha \neq 0, 3$ e $\beta, \gamma \neq 0, -1$ da uma solução. A escolha $\alpha = 5$ e $\beta = \gamma = 1$ resulta em $a = b = c = 2$.

- **linearmente independente (LI)** se não são linearmente dependente, em símbolos

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_\ell = 0 \tag{1.3.2}$$

  ou em palavras

  > *"não existe nenhuma CL não-trivial dos vetores $v_1, \ldots, v_\ell$ representando o vetor nulo".*

Um **subconjunto** X de um espaço vetorial E é dito de

- **linearmente independente (conjunto LI)** se cada uma escolha finita de elementos dois-a-dois diferentes[11] é linearmente independente;

- **linearmente dependente (conjunto LD)** se X não é linearmente independente, isto é se o vetor nulo é CL não -trivial de uma escolha finita de elementos dois-a-dois diferentes.

Ainda que se vetores $v_1, \ldots, v_\ell$ são elementos de um subconjunto X de E, uma CL deles não necessariamente encontra-se mais em X. Encontra-se sim, quando o subconjunto X de E é um chamado "subespaço" (Lema 2.1.2).

Comentário 1.3.4.

(i) O conjunto vazio $\emptyset$ é LI: Com efeito, com os elementos de $\emptyset$ não pode-se representar o vetor nulo nunca - simplesmente não tem elementos. Chama-se tal argumentação de **verdade vazia**.

(ii) Um conjunto $X = \{v\}$, contendo só um vetor, é LI se e somente se $v \neq \mathcal{O}$.

(iii) Se (1.3.2) vale para uma escolha $v_1, \ldots, v_\ell$, então vale para qualquer sub-escolha destes vetores. [Use os coeficientes $\alpha_i = 0$ nos restantes.]

Para provar a afirmação (ii), lembra (1.1.3).

Lema 1.3.5. *Sejam A, B, X subconjuntos de um espaço vetorial E.*

a) $\mathcal{O} \in X \Rightarrow X$ *LD.* *(O vetor nulo rende conjuntos LD)*

b) *Todo conjunto A contido num conjunto LI X é LI.*

c) *Todo conjunto B contendo um conjunto LD X é LD.*

Demonstração. a) O termo $1\mathcal{O}$ é uma CL não-trivial em X representando o vetor nulo (segundo Lema 1.1.20). b) Os elementos de A são elementos de X, agora usa a definição da independência linear de X. c) Cada uma CL não-trivial em X representando o vetor nulo é também em B. □

[11] Para que precisa-se a condição *dois-a-dois diferentes*?

Exemplo 1.3.6. Para saber se o subconjunto $X := \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é LI temos que checar (1.3.2) para cada uma escolha finita de elementos dois-a-dois diferentes de X. Como X é um conjunto finito, e tendo em vista Comentário 1.3.4 (iii), começamos com a escolha máxima, ou seja todos os (dois) elementos. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Conforme (1.3.2) suponhamos que

$$(0,0) = \alpha(1,0) + \beta(2,1) = (\alpha + 2\beta, \beta)$$

onde o termo cinza resulta através das regras de multiplicação escalar e adição em $\mathbb{R}^2$. Comparando os segundos membros vemos que $0 = \beta$ o qual usamos na comparação dos primeiros membros: recebemos $0 = \alpha + 2 \cdot 0 = \alpha$. Assim temos provado que ambos os coeficientes α e β são nulos. Então X é LI.

Exercício 1.3.7. Quais dos seguintes conjuntos X_i de vetores de $\mathbb{R}^2$ são ou não são conjuntos linearmente independentes (LI)? Explique porque são ou não são.

1. Elementos de X_1: os vetores $(1,1)$ e $(-1,-1)$.
2. $X_2 := \{(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)\}$.
3. Escolha dois vetores diferentes $u, v \in \mathbb{R}^2$ e defina $X_3 := \{u, v\} \cup \{(1,1)\}$.

Exercício 1.3.8. Prove as afirmações seguintes.

1. A base canônica $\mathcal{E}^n$ em (1.2.1) é um conjunto LI no $\mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$.
2. A base canônica $\mathcal{E}^\infty$ em (1.2.2) é um conjunto LI no $\mathbb{R}^\infty_0$ e no $\mathbb{R}^\infty$.
3. Suponha $u, v \in \mathbb{K}^2$ não são múltiplos um do outro. Prove que o conjunto $\{u, v\}$ é LI.

   [Dica: Seja $\alpha u + \beta v = \mathcal{O}$. Considere $\beta \neq 0$ e, lembrando (1.1.3), $\beta = 0$.]
4. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, para todo $i, j = 1, \dots, n$ temos $x_i y_j = x_j y_i$.
5. O subconjunto $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset \mathrm{M}(2 \times 2)$ composto das matrizes

   $$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

   é um conjunto LI.
6. O conjunto X composto dos três polinômios

   $$\begin{aligned} p &= p(x) = x^3 - 5x^2 + 1 \\ q &= q(x) = 2x^4 + 5x - 6 \\ r &= r(x) = x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

   é um conjunto LI no espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios reais.
7. Se o conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_m\}$ é LI, prove que o mesmo se dá com o conjunto $\{v_1, v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$. Vale a recíproca?

Exercício 1.3.9 (Funções com valores complexos)**.** Como introduzido em Exercício 1.2.10 seja $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ o espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ composto de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Considere os subconjuntos $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ e $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$ de E composto das funções

$$f_1(t) = \cos t - i \sin t, \qquad f_2(t) = \cos t + i \sin t, \qquad f_3(t) = 1,$$

e

$$g_1(t) = \sin t, \qquad g_2(t) = 1, \qquad g_3(t) = \cos t.$$

(a) Prove que cada um dos conjuntos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ é LI.

(b) Escreva cada g_i como combinação linear dos f_i's.

(c) Escreva cada f_i como combinação linear dos g_i's.

Este exercício vai ter continuação em Exercício 5.4.7.

Apêndice C

Demonstrações restantes

C.1 Espaços vetoriais

Lema C.1.1 (Lema 1.1.5)**.** *Seja*[1] $(G, *)$ *um grupo. Então vale o seguinte.*
1) *O elemento neutro é único.*
2) *Os elementos inversos são únicos.*
3) *Para todos os elementos* $f, g, h \in G$ *vale:*
   a) $f * g = f * h \;\Rightarrow\; g = h$ *(lei da corte)*
   b) $f * g = f \;\Rightarrow\; g = e$
   c) $f * g = e \;\Rightarrow\; g = \bar{f}$

Demonstração. 1) Se $e, \tilde{e} \in G$ satisfazem o axioma (elemento neutro), então usando o axioma para e e depois para $\tilde{e}$ obtemos que $e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$.
2) Seja $g \in G$. Se $\bar{g}, \tilde{g} \in G$ satisfazem o axioma (inverso) para g, então obtemos

$$\bar{g} = e * \bar{g} = \underbrace{(\tilde{g} * g)}_{=e} * \bar{g} = \tilde{g} * \underbrace{(g * \bar{g})}_{=e} = \tilde{g} * e = \tilde{g}$$

usando (elem. neutro) no início e fim, $(\text{inverso})_{\tilde{g}}$, (associatividade), $(\text{inverso})_{\bar{g}}$.
3) a) $g = e * g = (\bar{f} * f) * g = \bar{f} * (f * g) \overset{\text{hip.}}{=} \bar{f} * (f * h) = (\bar{f} * f) * h = e * h = h$.
b) Use a) com $h = e$. c) Use a) com $h = \bar{f}$. □

Lema C.1.2 (Lema 1.1.10)**.** *Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo e* $0 \in K$ *é o elemento neutro da adição. Então* $0\beta = 0$ *e* $\beta 0 = 0$ *para todos os elementos* $\beta \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Seja $\beta \in \mathbb{K}$, denotamos o inverso aditivo de $-\beta$. Então

$$\beta \overset{(\text{el.n.})_\cdot}{=} 1\beta \overset{(\text{el.n.})_+}{=} (1+0)\beta \overset{(\text{distr.})}{=} 1\beta + 0\beta \overset{(\text{el.n.})_\cdot}{=} \beta + 0\beta$$

Usamos esta identidade para obter a segunda igualdade no seguinte

$$0 \overset{(\text{inv.})}{=} (-\beta) + \beta = -\beta + (\beta + 0\beta) \overset{(\text{ass.})_+}{=} (-\beta + \beta) + 0\beta \overset{(\text{inv.})}{=} 0 + 0\beta \overset{(\text{el.n.})}{=} 0\beta$$

[1] Cap. C de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 14 de março de 2024

□

Lema C.1.3 (Lema 1.1.20)**.** *Para o vetor nulo $\mathcal{O} \in E$ de um espaço vetorial e o elemento neutro aditivo $0 \in \mathbb{K}$ do corpo vale o seguinte.*

(i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *para todos os escalares* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $0v = \mathcal{O}$ *para todos os vetores* $v \in E$.

(iii) *Para todo o escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e todo o vetor* $w \in E$ *são equivalentes:*

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}$$

Demonstração. (i) Caso $\alpha = 0$. Como $\alpha\mathcal{O} + 0\mathcal{O} = (\alpha + 0)\mathcal{O} = \alpha\mathcal{O}$, então $0\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema C.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$).
Caso $\alpha \neq 0$. Tal α tem um inverso aditivo, notação α^{-1}. Seja $v \in E$, então

$$v \overset{\text{(comp.)}}{=} 1v \overset{\text{(inv.)}_{\mathbb{K},\cdot}}{=} (\alpha\alpha^{-1})v \overset{\text{(comp.)}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v)$$

Usando este resultado no início e no fim do seguinte obtemos que

$$v + \alpha\mathcal{O} = \alpha(\alpha^{-1}v) + \alpha\mathcal{O} \overset{\text{(distr.)}_E}{=} \alpha((\alpha^{-1}v) + \mathcal{O}) \overset{\text{(el.n.)}_{E,+}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v) = v$$

Então $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema C.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$).

(ii) Como $v + 0v = 1v + 0v = (1 + 0)v = 1v = v$ a lei da corte diz que $0v = \mathcal{O}$.

(iii) '$\Rightarrow$' Suponha $\alpha w = \mathcal{O}$. Caso $\alpha = 0$, pronto. Caso $\alpha \neq 0$ concluímos que

$$w \overset{\text{(comp.)}}{=} 1w \overset{\text{(el.n.)}_{\mathbb{K},\cdot}}{=} (\alpha^{-1}\alpha)w \overset{\text{(comp.)}}{=} \alpha^{-1}(\alpha w) \overset{\text{hip.}}{=} \alpha^{-1}\mathcal{O} \overset{\text{(i)}}{=} \mathcal{O}$$

'$\Leftarrow$' Se $w = \mathcal{O}$, então $\alpha\mathcal{O} \overset{\text{(i)}}{=} \mathcal{O}$, pronto. Se $\alpha = 0$, então $0w \overset{\text{(ii)}}{=} \mathcal{O}$, pronto. □

Corolário C.1.4 (Corolário 1.1.21)**.** *Para todos os* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $w \in E$ *vale:*

a) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

b) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

Demonstração. a) Temos que mostrar que a soma de αw e o candidato para ser seu inverso aditivo iguale o vetor nulo. Com efeito

$$\alpha w + \alpha(-w) \overset{\text{(distr.)}_E}{=} \alpha(w + (-w)) \overset{\text{(el.n.)}_{E,+}}{=} \alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (i) de Lema C.1.3.
b) Temos o objetivo análogo de chegar ao vetor nulo, com efeito

$$\alpha w + (-\alpha)w \overset{\text{(distr.)}_E}{=} (\alpha + (-\alpha))w \overset{\text{(el.n.)}_{\mathbb{K},+}}{=} 0w = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (ii) de Lema C.1.3. □

Referências Bibliográficas

[Art91] Michael Artin. *Algebra*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[EHH+92] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, and R. Remmert. *Zahlen*, volume 1 of *Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1992. Edited and with an introduction by K. Lamotke.

[Hir21] Oliver Hirsch. Die Psychologie der Gedankenkontrolle, des Mentizids und der Gehirnwäsche. Zugang pdf, January 2021.

[Koe85] Max Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Grundwissen Mathematik 2. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, Zweite Auflage,

[Lan93] Serge Lang. *Algebra. 3rd ed.* Reading, MA: Addison Wesley, 1993.

[Lim05] Elon Lages Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Segunda Edição, 2005.

[Lim11] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Oitava Edição, 2011.

[Mee56] Joost A.M. Meerloo. *The Rape of the Mind. The Psychology of Thought Control, Menticide, and Brainwashing*. 1956. access pdf.

[Pul12] Petronio Pulino. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. Notas da Aula, UNICAMP, 2012. Acessível no site www.ime.unicamp.br/∼pulino/ALESA.

[Sal19] Dietmar A. Salamon. *Análise em dimensões superiores*. Tradução de J. Weber de Alemão para Português. 2019. ix+376p. pdf

[San12] Reginaldo J. Santos. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. Manuscrito, UFMG, 03 2012.