Álgebra Linear

Notas da aula[1]
MA327 2021-2

versão preliminar

Joa Weber

[1]versão final vai aparecer la:
www.math.stonybrook.edu/∼joa/PUBLICATIONS/00-publications.html

Extensão

Totalitarismo defronte de Democracia[1]

A ferramenta chave do totalitarismo é medo; suportado de pânica e histeria.
Meias palavras, difamações, e denunciações formam a estratégia.
Não tem discussões livres, nem diferenças de opinião honestas.
Argumentos não tem mais valor – o pensamento baixo já levou a melhor.
O pensamento mesmo é o inimigo.

Democracia é o domínio da dignidade do humano
e o direito, a pensar propriamente, o direito para uma opinião própria,
ainda mais, o direito, afirmar explícito a opinião própria e
proteger-se contra a intrusão na sua psique e contra constrangimento psíquico.

Democracia solicita uma alta atividade intelectual dos seus membros.
Democracia rege a sociedade por os seus erros sem intimidação.

[1] Em parte tirado do sumário [Hir21] do livro [Mee56].

Prefácio

Este texto oriunda de notas da aula para o curso MA327 Álgebra Linear dado múltiplas vezes, isto é, nos semestres 2013-2, 2014-1, 2015-1, 2016-2, 2019-2, 2020-2, e 2021-2. Quando cheguei em agosto 2013 fui assinado ensinar este curso e como meu Português foi (ainda mais) fraco, na realidade quase inexistente, eu busquei um livro em Português mesmo. Encontrei um texto excelente, o livro do Elon Lages Lima [Lim11], no qual eu baseei meu manuscrito em 2013-2. Nos semestres na seguida eu usei como base meu manuscrito de 2013, adicionando e melhorando uma ou outra coisa. Só em 2020-2 quando a aula foi mandado ser remota eu digitei meus manuscritos no computador resultando no texto presente o qual em grandes partes ainda é um condensado do Lima. Um outro texto excelente o qual eu recomendo particularmente para alunos de disciplinas de estudo não matemáticas é o Pulino [Pul12].

O que é diferente neste texto é na seção 5 a abordagem a matrizes de transformações lineares como ilustrado no diagrama (5.0.1).
O texto na forma atual ainda precisa ser estendido ca e la, o que vai acontecer no semestre 2021-2 e no futuro.

Agradecimentos

É um prazer agradecer os pagadores de imposto do Brasil para as condições excelentes de pesquisar e até 2019 de ensinar.

Espero que o Deus protege todos os cidadãos de todas as nações
e leve a responsabilidade todos fomentando medo e gerando pânica.

Campinas, *Joa Weber*
Semestre 2021-2

Introdução

Àlgebra Linear

é o estudo dos espaços lineares e das transformações lineares.

Uma outra palavra para espaço linear é espaço vetorial.

O próximo exemplo descreve como os conceitos de vetor e espaço vetorial foram descobertos - como flechas no plano onde se considera igual todos da mesma direção e do mesmo comprimento. A identificação "considerar igual" lida a uma enorme importância e poder do conceito na física (campos de forças).

Exemplo 0.0.1 (O espaço vetorial F das flechas equipolentes no plano)**.** Seja F o conjunto das flechas no plano Π, onde *consideramos iguais* duas flechas se

(i) as duas flechas são paralelas,

(ii) têm o mesmo sentido de percurso, e

(iii) têm o mesmo comprimento.

Chama-se duas flechas satisfazendo (i-iii) de **flechas equipolentes**, símbolo $\sim$. Chamamos de **vetores** os elementos de F. Assim um vetor é uma flecha v onde consideramos iguais todas flechas equipolente a v, todas as quais denotamos de v também, e cada uma chamamos de um **representante** do vetor.[2] Se fixamos um ponto do plano, vamos nomear este ponto O, cada um vetor possui um representante, uma flecha equipolente, cujo ponto inicial é o ponto O.

Seja F munido de duas operações, primeiro, multiplicar uma flecha v com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ e, segundo, adicionar duas flechas v e w. Veja Figura 1.

Multiplicação (escalar). Pela definição αv é a flecha na direção de v cujo comprimento é α vezes aquele de v (muda-se a direção caso o número α é negativo).

Adição (vetorial). Pela definição $v + w$ é a flecha cujo ponto inicial é aquela de v e cujo ponto termino p é obtido depois fazer uma translação de w movendo o ponto inicial de w no ponto termino de v. Então p é definido como o ponto termino do novo w.

[2] Esta definição dos elementos de F é informal e só serve para nossa introducao. Uma excelente referência básica para a definição de F como um conjunto composto de coleções de flechas equipolentes é [Lim05].

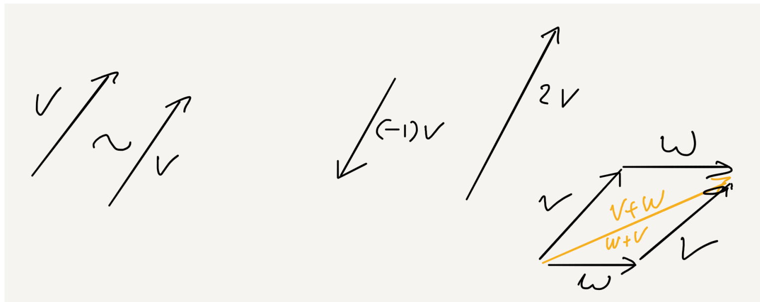

Figura 1: Flechas consideradas iguais, multiplicação escalar, e adição

O conjunto F munido das duas operações é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Um exemplo de uma transformação linear em F é uma rotação $r_\theta : F \to F$ que vira cada uma flecha v pelo ângulo θ em torno do ponto inicial.

Exemplo 0.0.2 (Pares de números reais)**.** Seja $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas listas ordenadas de dois membros reais munido de adição membro-por-membro e de multiplicação com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$, também membro-por-membro. Então $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Comentário 0.0.3 (Identificação dos conjuntos e operações – isomorfismo)**.** Os dois exemplos anteriores são "iguais" no sentido seguinte. Suponhamos que na reta podemos medir a distância 1. No plano Π escolha um **eixo** OX, ou seja uma reta com dois pontos diferentes O e X da distância 1, e um segundo eixo OY cujo primeiro ponto O é aquele do OX e qual intersecta OX no ponto O só (equivalentemente $OX \neq OY$). Uma tal escolha de dois eixos é chamado um **sistema de coordenadas** no plano, símbolo OXY. Veja Figura 2.

Observe-se que um eixo OX chega com uma direção (de O para X) e com um comprimento unitário (o comprimento do segmento entre O e X). Uma escolha de coordenadas OXY no plano Π nos da uma aplicação

$$F \to \mathbb{R}^2, \quad v = \overrightarrow{OP} \mapsto (x, y) \tag{0.0.1}$$

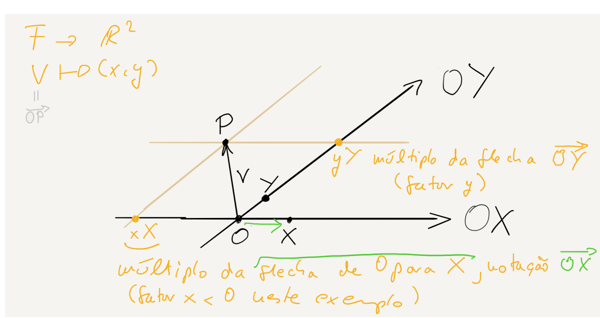

Figura 2: Sistema de coordenadas OXY composto de dois eixos OX e OY

a qual identifica os vetores de F (escolha representantes v com ponto inicial O) com as listas de $\mathbb{R}^2$ unicamente (bijetora) – e ainda é **linear**: compatível com as duas operações no domínio e as duas no contra-domínio. Uma tal aplicação (bijetora linear) é chamado um **isomorfismo** entre espaços vetoriais. Deixamos ao leitor definir esta aplicação.[3]

Definição 0.0.4 (Sistema de coordenadas Cartesianas)**.** Escolhendo dois eixos *ortogonais* René Descartes (1596-1650) introduziu em 1637 a identificação (0.0.1) a qual é assim chamado de **sistema de coordenadas Cartesianas**; veja [Koe85, p. 7].

Na Seção 9.2 vamos ver como ângulos e comprimentos no plano traduzem ao lado algébrico como um chamado produto interno no $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 0.0.5 (Funções contínuas e integração)**.** Sejam $a < b$ dois números reais. Então o quadruplo $V = (C^0([a,b],\mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ que é composto do conjunto das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ munido com as duas operações de adicionar $f + g$ duas funções e multiplicar αf uma função com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Também $W = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$ composto dos números reais $\mathbb{R}$ e munido das operações óbvias é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Integração $T : V \to W$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$, *é compatível com*, as duas adições e as duas multiplicações (em V e em W) no sentido que

$$T(f + g) = Tf + Tg, \qquad T(\alpha f) = \alpha Tf$$

para todos os vetores $f, g \in V$ e escalares α do corpo $\mathbb{R}$. Uma aplicação T entre espaços vetoriais qual respeita as duas operações no domínio e no contra-domínio é chamada de **transformação linear**.

Notações

Para uma lista extensiva dos símbolos usados veja o Índice Remissivo D.3.

Comentário 0.0.6 (Números)**.** Vamos trabalhar com os seguintes **números**

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$	naturais
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	inteiros
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$	racionais
$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ "a reta real"	reais
$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ "o plano complexo"	complexos

Com $\lvert\alpha\rvert$ denotamos o absoluto de um número real α. Denotamos **intervalos** fechados de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e abertos de $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Usamos os símbolos

$\forall$ "para todos os" $\quad \exists$ "existe um" $\quad \exists!$ "existe um único"

[3] Dica: Os pontos O, X e O, Y dão duas flechas. Represente um elemento v de F por uma flecha equipolente com ponto inicial O. Pensa num paralelogramo tal que O e o ponto termino da flecha equivalente são dois vértices opostos.

A notação $A := B$ significa que A **é definido** pelo lado direito B. Escrevendo $\dim E = n$ ou $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ indica sem ser mencionado explicitamente que n e k são números naturais, particularmente têm valor **finito**.

"Sejam $x_1, \ldots, x_\ell$ elementos de um conjunto X" é uma frase encontrada frequentemente e depois quer-se trabalhar com o conjunto composto destes elementos. Um ponto útil é que não é proibido que uns dos elementos, ainda todos, são iguais. O jeito certo de escrever o conjunto correspondente é assim $\{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_\ell\}$. Para este conjunto usa-se também a notação $\{x_i \mid i = 1, \ldots, \ell\}$. Veja Definição 1.1.2.

Convenções

É comum usar para o mesmo conceito às vezes terminologia diferente, por exemplo **transformação linear** e **operador linear**, ou ainda só **operador**, denota todo o mesmo conceito.

Cor cinza. Parágrafos e maiores partes de texto em cinza indicam matéria avançada direcionado às turmas A e B do "cursão", mas não às outras turmas. Palavras individuais em cinza geralmente são nomes ou informações complementares.

Referências Bibliográficas

[Art91] Michael Artin. *Algebra*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[EHH+92] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, and R. Remmert. *Zahlen*, volume 1 of *Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1992. Edited and with an introduction by K. Lamotke.

[Hir21] Oliver Hirsch. Die Psychologie der Gedankenkontrolle, des Mentizids und der Gehirnwäsche. Zugang pdf, January 2021.

[Koe85] Max Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Grundwissen Mathematik 2. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, Zweite Auflage,

[Lan93] Serge Lang. *Algebra. 3rd ed.* Reading, MA: Addison Wesley, 1993.

[Lim05] Elon Lages Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Segunda Edição, 2005.

[Lim11] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Oitava Edição, 2011.

[Mee56] Joost A.M. Meerloo. *The Rape of the Mind. The Psychology of Thought Control, Menticide, and Brainwashing*. 1956. access pdf.

[Pul12] Petronio Pulino. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. Notas da Aula, UNICAMP, 2012. Acessível no site www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA.

[Sal19] Dietmar A. Salamon. *Análise em dimensões superiores*. Tradução de J. Weber de Alemão para Português. 2019. ix+376p. pdf

[San12] Reginaldo J. Santos. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. Manuscrito, UFMG, 03 2012.