DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IMECC UNICAMP
Joa Weber

1º SEMESTRE DE 2024

Álgebra Linear

MA327 – Turma O

Lista 3c – Operadores ortogonais

Exercícios.

a) Dê os seguintes exemplos:

   i) Uma matriz invertível cujas linhas são duas a duas ortogonais mas as colunas não são.
   ii) Uma matriz (não-quadrada) cujas linhas são ortogonais e têm a mesma norma, mas as colunas não são ortogonais.
   iii) Uma matriz cujas linhas (e colunas) são duas a duas ortogonais mas as normas das linhas são diferentes.

b) Para quaisquer bases ortonormais $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ e $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ de E, prove que existe um operador ortogonal $A \in \mathcal{L}(E)$ tal que

$$A\xi_1 = \eta_1, \quad \dots, \quad A\xi_n = \eta_n.$$

No caso $E = \mathbb{R}^3$ e se as bases dadas são formadas pelos vetores

$$\xi_1 = \tfrac{1}{3}(1,2,2), \qquad \xi_2 = \tfrac{1}{3}(2,1,-2), \qquad \xi_3 = \tfrac{1}{3}(2,-2,1),$$
$$\eta_1 = \tfrac{1}{7}(2,3,6), \qquad \eta_2 = \tfrac{1}{7}(6,2,-3), \qquad \eta_3 = \tfrac{1}{7}(3,-6,2),$$

determine a matriz A na base canônica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_2)$ de $\mathbb{R}^3$.

c) Se uma matriz triangular é ortogonal, prove que ela é diagonal e seu quadrado é igual à matriz identidade.

d) Seja $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \in M(1 \times 4)$ tal que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$. Prove que $\mathbf{a}^T\mathbf{a} \in M(n \times n)$ é uma matriz de uma projeção ortogonal. Determine a imagem e o núcleo dessa projeção.

e) Ache uma matriz ortogonal 4×4 cujos elementos são todos da forma $\pm\frac{1}{2}$.

f) Ache a *decomposição polar*[1] da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

g) Obtenha a decomposição polar da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

[1] $\mathbf{a} = \mathbf{p}\mathbf{u}$ onde $\mathbf{u}$ é ortogonal e p satisfaz $\mathbf{p}^T = \mathbf{p}$ e $\langle \mathbf{p}v, v\rangle \geq 0$ para todo vetor v.