DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IMECC UNICAMP
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma O

Lista 3a – A Adjunta

Exercícios.

a) Determine uma inversa à direita para

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2x - y - z),$$

e uma inversa à esquerda para

$$B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y, x + 3y, 4x + y).$$

b) Dado

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

calcule $\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ e, a partir daí, encontre uma matriz $\mathbf{b} \in M(3 \times 2)$ tal que $\mathbf{ab} = \mathbb{1}_2$.

c) Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Seja P uma projeção em E: $P \in \mathcal{L}(E)$ e $P^2 = P$. Prove que a adjunta P^* também é uma projeção em E. Dê um exemplo em que $P^* \neq P$.

d) Considere o produto interno no espaço vetorial $M(n \times n)$ definido por

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \operatorname{tr}\left(\mathbf{a}^T \mathbf{b}\right) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

Mostre que o subespaço $\mathcal{A}$ das matrizes anti-simétricas é o complemento ortogonal em $M(n \times n)$ do subespaço $\mathcal{S}$ das matrizes simétricas:

$$\mathcal{A} = \mathcal{S}^\perp \quad \text{e} \quad \mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = M(n \times n).$$

e) Uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ chama-se *diagonalizável* quando é semelhante a uma matriz $\mathbf{d} = (d_{ij})$ do *tipo diagonal* ($d_{ij} = 0$ se $i \neq j$), ou seja, quando existe $\mathbf{p}$ invertível tal que $\mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p} = \mathbf{d}$. Prove que:

   i) $\mathbf{a}$ diagonalizável $\Rightarrow$ $\mathbf{a}^T$ diagonalizável.

   ii) Se a matriz do operador $A \in \mathcal{L}(E)$ relativamente a uma base de E é diagonalizável, então o é em relação a qualquer outra base.

f) Seja $A \in \mathcal{L}(E)$. Se E possui uma base formada por autovetores de A, prove que existe também uma base de E formada por autovetores de $A^* : E \to E$. (Veja Lista 2c Exercício g)).