Departamento de Matemática — Imecc Unicamp
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma 0

Lista 2a – Núcleo e imagem

Exercícios.

a) Sejam $R, P, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ respectivamente a rotação de $30°$ em torno da origem, a projeção ortogonal sobre a reta $y = \frac{1}{3}x$ (notação na aula: $L_{\frac{1}{3}}$) e a reflexão em torno da mesma reta.

   Dado o elemento $v = (2, 5)$ de $\mathbb{R}^2$, determine os vetores Rv, Pv, Sv.

b) Considere os operadores lineares $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$R = R_{30°}, \qquad S = S_{L_2}, \qquad P = P_{L_2}.$$

   i) Mostre que se tem $PS = SP = P$.
   ii) Verifique a igualdade $RSR = S$.
   iii) Mostre que R não comuta com S nem com P.
   iv) Determine todos os vetores v tais que $PRv = (0, 0)$ e $RPv \neq (0, 0)$.

c) i) Mostre que $\{0\}$ e o próprio $\mathbb{R}$ são os únicos subespaços de $\mathbb{R}$.
   ii) Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Mostre que $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ é sobrejetivo ou igual a zero.
   iii) Mostre que a derivação $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, $p(x) \mapsto \frac{d}{dx}p(x)$, é sobrejetiva.
   iv) Mostre que a derivação $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x) \mapsto \frac{d}{dx}f(x)$, é sobrejetiva.
   v) Encontre uma inversa à direita $J : \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ para a derivação D em iii).

d) Encontre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que o operador

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (ax + by, cx + dy) \end{aligned}$$

   tenha como núcleo a reta $y = 3x$.

e) Seja $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$(x, y, z, t) \mapsto (x + y + z + 2t, x - y + 2z, 4x + 2y + 5z + 6t)\,.$$

   Encontre $b \in \mathbb{R}^3$ que não pertença à imagem de A. Com b, exiba um sistema linear de 3 equações e 4 incógnitas sem solução.

f) Defina operadores lineares $A, B : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ como

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots) \\ B(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_2 - 2x_1, x_3 - 2x_2, \dots). \end{aligned}$$

Determine o núcleo e a imagem de A e de B.

g) Dado $A \in \mathcal{L}(E)$ onde $\dim E < \infty$, defina

$$\begin{aligned} T_A : \mathcal{L}(E) &\to \mathcal{L}(E) \\ X &\mapsto AX \quad . \end{aligned}$$

Prove que T_A é linear e que T_A é invertível se, e somente se A é invertível. Mesmo problema com $S_A(X) := XA$.

h) Determine uma base para a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas.

i) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - y, x - y)$;

ii) $B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (x, y, z, t) \mapsto (x + y, z + t, x + z, y + t)$;

iii) $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \left(x + \frac{1}{2}y, y + \frac{1}{2}z, z + \frac{1}{2}x\right)$;

iv) $D : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2), X \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$;

v) $E : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R}), p = p(x) \mapsto xp$.

i) Estabeleça um isomorfismo entre o espaço vetorial das matrizes reais simétricas $n \times n$ e o espaço das matrizes reais *triangulares inferiores* ($a_{ij} = 0$ se $i < j$).

Idem entre as matrizes anti-simétricas e as triangulares inferiores com diagonal nula.

j) Sejam E, F espaços vetoriais tais que $\dim E \leq \dim F < \infty$. Prove que existem $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tais que A é injetiva e B é sobrejetiva.

k) Sejam E, F espaços vetoriais (de dimensão finita ou infinita). Sejam $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tais que AB é invertível.

(a) Prove que A é sobrejetiva e B é injetiva.

(b) Se AB e BA são invertíveis, prove que A é invertível.