DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IMECC UNICAMP
Joa Weber

1º SEMESTRE DE 2024

Álgebra Linear

MA327 – Turma O

Lista 1d

a) Repita/pratique eliminação (MA141)

Matrizes: imagem, núcleo, posto, espaço-coluna/linha

Uma matriz (real) $m \times n$ $\mathbf{a}$ define uma transformação linear

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \mathbf{a}x$$

onde $\mathbf{a}x$ denota o produto matriz $M(m \times n) \times M(n \times 1) \to M(m \times 1)$. O núcleo e a imagem da matriz $\mathbf{a}$ são os subespaços

$$N(\mathbf{a}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}x = \mathcal{O}\} \subset \mathbb{R}^n$$
$$\mathrm{Im}(\mathbf{a}) := \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \; y = \mathbf{a}x\} \subset \mathbb{R}^m.$$

A dimensão da imagem é chamado de **posto** da matriz. O **espaço-coluna**(**linha**) de uma matriz é o subespaço de $\mathbb{R}^m(\mathbb{R}^n)$ composto de todas combinações lineares das colunas(linhas) da matriz. A dimensão do espaço-coluna(linha) é chamado de **posto-coluna**(**linha**) da matriz.

Fatos uteis:

- a imagem de uma matriz é igual ao espaço-coluna,* então posto e posto-coluna são iguais, mas de fato $\qquad \mathrm{Im}(\mathbf{a}) = \text{esp-col}(\mathbf{a})$
- os 3 postos são iguais! $\qquad \text{posto-col}(\mathbf{a}) = \text{posto-linha}(\mathbf{a})$
- o espaço-coluna de $\mathbf{a}$ é o espaço-linha da matriz transposta $\mathbf{a^t}$, e vice versa,

$$\text{esp-col}(\mathbf{a}) = \text{esp-linha}(\mathbf{a^t}), \qquad \text{esp-linha}(\mathbf{a}) = \text{esp-col}(\mathbf{a^t}).$$

Exercícios.

a) Determine o posto da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

[Dica: Calcule o posto-linha da matriz transposta. Escalonamento (modificando linhas) não muda o espaço-linha.]

*fácil provar

b) Calcule a dimensão do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, 1, 1, -1, 1), \qquad v_3 = (0, 1, 1, -1, -1),$$
$$v_2 = (1, -1, -1, 0, 1), \qquad v_4 = (-1, 1, 1, -1, 1).$$

Decida se o vetor $b = (6, 18, 1, -9, 8)$ pertence ou não a este subespaço.

c) Obtenha uma base para o subespaço F de $\mathbb{R}^4$ gerado pelo conjunto

$$\{(1, 2, 3, 4), (3, 4, 7, 10), (2, 1, 3, 5)\}.$$

[Dica: Use os vetores como as linhas de uma matriz. Escalonamento.]
Determine a dimensão de F.

d) Encontre uma base para o núcleo da transformação linear

$$C : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z, t) \mapsto (2x + y - z + 3t, x - 4y + 2z + t, 2y + 4z - t)\,.$$

[Dica: Calcule a matriz de C. Escalonamento. Resolve o sistema linear homogêneo resultante.]

e) Use escalonamento para resolver o sistema linear

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 6y + 9z &= 7 \\ 2x + 8y + 8z &= 6 \end{aligned}$$

nas incógnitas $x, y, z \in \mathbb{R}$.

f) Decida quais das matrizes possuem inversa e calcule quando existir:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$

b) Transformações lineares e suas matrizes em respeito a bases canônicas

Exercícios.

a) Considere os elementos de $\mathbb{R}^2$ dados por

$$u_1 = (2, -1), \qquad u_2 = (1, 1), \qquad u_3 = (-1, -4),$$

e

$$v_1 = (1, 3), \qquad v_2 = (2, 3), \qquad v_3 = (-5, -6).$$

Decida se existe ou não um operador linear[†] $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$Au_1 = v_1, \qquad Au_2 = v_2, \qquad Au_3 = v_3.$$

Mesma pergunta com $v_3 = (5, -6)$ e com $v_3 = (5, 6)$.

b) Tem-se uma transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Sabe-se que

$$A(1, 2) = (1, 1, 1, -1) \quad \text{e} \quad A(3, 4) = (1, 1, 1, 1).$$

Pede-se a matriz $\mathbf{a} = [A] \in \mathrm{M}(4 \times 2)$ de A relativamente às bases canônicas $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}^4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$.[‡]

c) Qual é a matriz $\mathbf{a} := [A]$ do operador $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinado por

$$A(2, 3) = (2, 3) \qquad \text{e} \qquad A(-3, 2) = (0, 0)\ ?$$

d) Dado $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, determina a matriz $\mathbf{a} := [A]$ do operador[§]

$$A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto v \times u.$$

Descreva geometricamente o núcleo desse operador e obtenha a equação da sua imagem.

[†] **Operador linear** significa *transformação linear*.

[‡] Seja $\mathbb{K}$ um corpo, por exemplo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e seja $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Escolhe $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Por definição a **matriz $[A]$ da transformação linear A relativamente às bases canônicas** $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ e $\mathcal{E}^m = \{e_1, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{K}^m$ é a matriz $\mathbf{a} = (a_{k\ell}) \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$ cuja j-ésima coluna $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$ e formado pelos (únicos) escalares na combinação linear dos elementos da base $\mathcal{E}^m$ que representa o elemento Ae_j de $\mathbb{K}^m$:

$$Ae_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{mj}e_m. \tag{1}$$

Nas outras palavras

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde os escalares a_{ij} são (únicamente) determinados quando para cada um $j \in \{1, \dots, n\}$ representar o elemento $Ae_j \in \mathbb{K}^m$ como combinação linear (1) dos elementos da base $\mathcal{E}^m$.

Se composição de A e B faz sentido, vale $[AB] = [A][B]$ onde $[A][B]$ é multiplicação de matrizes.

Às vezes, para evitar confusão com os elementos de $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$, pode ser útil usar letras maiúsculas para os elementos de $\mathcal{E}^m$, ou seja usar a notação $\mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\}$.

[§] O *produto vetorial* de dois vetores $v = (a, b, c)$ e $w = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ é o vetor $v \times w$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$v \times w := (bz - cy, cx - az, ay - bx).$$

e) Considere as transformações lineares

$$A\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \quad (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$$

e

$$B\colon \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad p \mapsto (p(0), p(1), \ldots, p(n)).$$

Determina a matriz $\mathbf{c} := [BA]$ da composição $BA\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ e prove que $\mathbf{c}\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ é um isomorfismo (ou seja $\mathbf{c}$ é uma matriz invertível).

f) Uma transformação linear $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) =: (\mathbb{R}^3)^*$ é chamado um **funcional linear**. A expressão geral de um funcional linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é

$$\phi(x, y, z) = ax + by + cz$$

onde a, b, c são escalares determinando ϕ. Dados os elementos

$$u = (1, 2, 3), \qquad v = (-1, 2, 3), \qquad w = (1, -2, 3),$$

de $\mathbb{R}^3$ determine a, b, c de tal modo que se tenha $\phi u = 1$, $\phi v = 0$ e $\phi w = 0$.[¶]

g) Seja $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ uma base ordenada de um espaço vetorial E. Para cada $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, seja $\phi_i \in E^* := \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ o funcional linear determinado pelas condições

$$\phi_i\xi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \phi_i\xi_{i-1} = 0, \quad \phi_i\xi_i = 1, \quad \phi_i\xi_{i+1} = 0, \quad \ldots, \quad \phi_i\xi_n = 0.$$

Prove que $\mathcal{B}^* := \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ é uma base ordenada de E^* (chamada a **base dual** da base $\mathcal{B}$). Mostre que vale $\phi_i v = v_i$ para todo $v = v_1\xi_1 + \cdots + v_n\xi_n \in E$.

h) Lembre-se que uma base ordenada, em vez de enumerar os elementos, pode ser escrito como um lista ordenada. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$, onde

$$u = (1, 1, 1), \qquad v = (1, -1, 1), \qquad w = (1, 1 - 1).$$

Seja $\mathcal{B}^* = (\phi, \psi, \chi) \subset (\mathbb{R}^3)^*$ a base dual da base $\mathcal{B}$. Calcule as matrizes $[\phi], [\psi], [\chi] \in \mathrm{M}(1 \times 3)$ correspondente às transformações lineares $\phi, \psi, \chi \in (\mathbb{R}^3)^*$.

i) Seja $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ um conjunto LI no espaço vetorial E de dimensão finita. Dado arbitrariamente vetores $w_1, \ldots, w_m$ em um espaço vetorial F, prove que

i) existe uma transformação linear $A : E \to F$ tal que

$$Av_1 = w_1, \quad \ldots \quad, Av_m = w_m;$$

ii) A é única $\iff$ X é uma base de E.

j) Considere as transformações lineares $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dados por $A(x, y) = (x, y, x + y)$ e

$$B(x, y, z) = (ax + (a - 1)y + (1 - a)z, -bx + (1 - b)y + bz)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Determine o operador $BA \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

[Dica: Use as matrizes [A] e [B] que correspondem a A e B respectivamente.]

[¶]Observe que ϕu denota a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aplicado ao elemento $u \in \mathbb{R}^3$.