Departamento de Matemática — 1º Semestre de 2024
Imecc Unicamp
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma O

Lista 1a – Conjuntos, corpos, espaços vetoriais

Definição 1. Um **conjunto** X é composto de elementos os quais são dois-a-dois diferentes. O conjunto que não contem nenhum elemento é chamado **o conjunto vazio** e denotado $\emptyset$. Denotamos de $|X|$ o **número de elementos de um conjunto** quando o número é finito. Um **subconjunto** de um conjunto X é um conjunto A tal que cada um elemento de A é elemento de X. Notação: $A \subset X$. Observe que conforme esta definição, o conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de todos conjuntos: para todo conjunto X temos $\emptyset \subset X$.

Definição 2. Um conjunto $G \neq \emptyset$ munido de uma operação

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G, \\ (f, g) &\mapsto f * g \end{aligned}$$

é chamado um **grupo** se vale o seguinte.

a) Associatividade: $f * (g * h) = (f * g) * h$ para todos $f, g, h \in G$;

b) Elemento neutro: Existe $e \in G$ tal que $\underline{e * g = g}$ e $\underline{g * e = g}$ para todo $g \in G$;

c) Elemento inverso: Para todo $g \in G$ existe $\bar{g} \in G$ tal que $\underline{g * \bar{g} = e}$ e $\underline{\bar{g} * g = e}$.

Um grupo é um **grupo abeliano** se também valer o seguinte.

d) Comutatividade: $f * g = g * f$ para todos $f, g \in G$.

Definição 3. Um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$

é chamado um **corpo** se vale o seguinte.

a) $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo abeliano;
(O *elemento neutro* seja denotado 0 e $-\alpha$ denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K}$)

b) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano;
(O *elemento neutro* seja denotado 1 e α^{-1} denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$)

c) Distributividade: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.

Definição 4. Um **espaço vetorial sobre um corpo** é um quádruplo $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$* composto de um conjunto E, um corpo $\mathbb{K}$, e duas operações

$$+ : E \times E \to E, \qquad\qquad \cdot : \mathbb{K} \times E \to E,$$
$$(v, w) \mapsto v + w \qquad\qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

chamado de *adição* e *multiplicação escalar*, respectivamente, tal que:

a) $(E, +)$ é um grupo abeliano (o *elemento neutro* $\mathcal{O}$ é chamado o *vetor nulo*);

b) Distributividade: $\begin{cases} (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v; \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w; \end{cases}$

c) Compatibilidade: $\begin{cases} (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v); \\ 1v = v; \end{cases}$

onde as identidades tem que ser validos para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e todos $v, w \in E$.

Exercícios.

1) Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sabemos da primeira aula que para todos $u, v, w \in E$ temos que $w + u = w + v \Rightarrow u = v$. Dado $\alpha \in \mathbb{K}$ e $w \in E$, mostre que

   i) $\alpha w = \mathcal{O} \iff \alpha = 0$ ou $w = \mathcal{O}$;

   ii) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$.

2) Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que para todos $a, b \in \mathbb{Z}_n$ temos

$$a +_n b := a + b \pmod{n} \qquad a \cdot_n b := ab \pmod{n},$$

   onde para todo $l \in \mathbb{Z}$: $l \,(\text{mod } n) := r$ se, e somente se, $l = kn + r$ com $0 \leq r < n$ e $k \in \mathbb{Z}$.

   Fato. $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ é um corpo $\iff$ n é um número primo.

   Seja $n = 6$:

   i) Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso $\mathbb{Z}_6$.

   ii) Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_6$. Eles sempre existem?

   iii) Para todo $a \in \mathbb{Z}_6$ identifique o elemento inverso aditivo.

   iv) Para todo $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.

   v) Mostre que $\mathbb{Z}_6$ não é um corpo.

*fala-se abreviando: *E é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ ou simplesmente *E é um espaço vetorial*.

3) Quais dos seguintes vetores de $\mathbb{R}^2$ formam um conjunto X linearmente independentes (LI)? Determine o conjunto X e explique porque é ou não é LI.

   i) Os vetores $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.
   ii) Os vetores $(2, \frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 2)$.
   iii) Os vetores $(1, 1)$ e $(1, 1)$.
   iv) Os vetores u, v, e $(1, 1)$ onde $u, v \in \mathbb{R}^2$ são quaisquer vetores fixos.

Desafio para os candidatos de 9 pontos ou mais:
Motivado pelas perguntas da Turma C na 1ª aula 2016-2 vamos dar um exemplo de um corpo onde a primeira operação não está relacionado à adição de números nem a segunda à multiplicação.

4) **Um corpo $(P, \cdot, \circ)$ onde $\cdot$ não é adição e $\circ$ não é multiplicação:**
   Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a função $p_\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $x \mapsto x^\alpha$. Seja o conjunto

$$P := \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

   de todas tais funções munido das operações

$$\begin{aligned} \cdot : P \times P &\to P, \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \cdot p_\beta \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \circ : P \times P &\to P, \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \circ p_\beta \end{aligned}$$

   chamado de *multiplicação*† e *composição*‡ de funções, respectivamente. Mostre:

   i) As duas operações são bem definidos: $p_\alpha \cdot p_\beta \in P$ e $p_\alpha \circ p_\beta \in P$;
   ii) $(P, \cdot)$ é um grupo abeliano;
   iii) $(P \setminus \{p_0\}, \circ)$ é um grupo abeliano;
   iv) Distributividade: $(p_\alpha \cdot p_\beta) \circ p_\gamma = (p_\alpha \circ p_\gamma) \cdot (p_\beta \circ p_\gamma)$ para todos $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma \in P$.

† $(p_\alpha \cdot p_\beta)(x) := p_\alpha(x) \cdot p_\beta(x)$
‡ $(p_\alpha \circ p_\beta)(x) := p_\alpha(p_\beta(x))$