

# Capítulo 6

## Valores máximo e mínimo

Neste<sup>1</sup> capítulo primeiro estudamos os pontos  $p$  onde uma função  $f$  assume um valor máximo ou mínimo, podemos buscar localmente numa vizinhança de  $p$  ou no domínio inteiro. Um papel importante, no caso diferenciável, são os pontos onde o gradiente  $\nabla f(p) = \mathcal{O}$  se anula,<sup>2</sup> chamado de pontos críticos.

Segundo buscamos os valores localmente máximas ou mínimas de uma função  $f$  ao longo de um dado conjunto de nível  $\{g = \kappa\}$  de uma segunda função  $g$  com valor regular  $\kappa$ . Resolvemos o problema com o método de multiplicadores de Lagrange. A ideia é identificar os níveis  $c$  e os pontos  $p$  tais que  $\{f = c\}$  toca  $\{g = \kappa\}$  em  $p$ . Em tal  $p$  os gradientes  $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$  são múltiplos e o fator  $\lambda$  é chamado de multiplicador de Lagrange. Junto com a equação  $g = \kappa$  tem-se o mesmo número de equações como incógnitas.

Só em tais pontos  $p$  pode-se encontrar máxima ou mínima locais de  $f$  ao longo do conjunto de nível  $\{g = \kappa\}$ . Ao fim tem-se que analisar cada um  $p$  encontrado se é extremo local, ou não.

### 6.1 Pontos críticos

**Definição 6.1.1** (Máximo e mínimo). Seja  $f(x, y)$  uma função de 2 variáveis.

- 1)  $(a, b)$  **máximo local**  $:\Leftrightarrow f(a, b) \geq f(x, y)$  para todos pontos  $(x, y) \neq (a, b)$  de uma bola aberta de centro  $(a, b)$ .
- 2)  $(a, b)$  **mínimo local**  $:\Leftrightarrow f(a, b) \leq f(x, y)$  para todos pontos  $(x, y) \neq (a, b)$  de uma bola aberta de centro  $(a, b)$ .
- 3) No caso de desigualdade estrita a) ' $>$ ', respectivamente b) ' $<$ ', chamamos  $(a, b)$  **máximo local estrito**, respectivamente **mínimo local estrito**.
- 4) Se as desigualdades valem para todos pontos do domínio de  $f$  falamos de

- 1) **máximo**;

---

<sup>1</sup>Cap. 6 de MA211 2024-1, autor Joa Weber: 26 de março de 2024

<sup>2</sup> de  $\mathcal{O}$  denotamos o vetor nulo - a lista  $(0, \dots, 0)$  cujos membros são todos nulos

- 2) **mínimo**;  
 3a) **máximo estrito**;  
 3b) **mínimo estrito**.

5) Máximos e mínimos são chamados de **valores extremos**.

**Teorema 6.1.2.** *Num máximo ou mínimo o gradiente, se existir, anula-se.*

*Demonstração.* Tratamos o caso de duas variáveis  $f(x, y)$ , o caso geral sendo análogo. Seja  $(a, b)$  um máximo ou mínimo de  $f$ . Defina  $g(x) := f(x, b)$ . Como a derivada  $g'(a)$  é igual a  $f_x(a, b)$  o que existe pela hipótese, e como a função de uma variável  $g$  tem máximo ou mínimo em  $a$  (porque  $f$  tem em  $(a, b)$ ), o Teorema de Fermat (Cálc. I) diz que a derivada  $g'(a) = 0$  anula-se.  $\square$

**Corolário 6.1.3.** *Seja  $S = \text{gr}(f)$  o gráfico de uma função  $f(x, y)$ . Num máximo ou mínimo  $p = (a, b)$  de  $f$  o plano tangente*

$$T_{(a,b,f(a,b))}S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} f_x(p) \\ f_y(p) \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \\ z - f(a, b) \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{z = f(a, b)\}.$$

*é o plano horizontal na altura  $f(a, b)$ .*

**Definição 6.1.4** (Ponto crítico). (i) Chama-se  $p$  um **ponto crítico** da função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  se a) o gradiente, equivalentemente a derivada (4.4.2), anula-se

$$\nabla f(p) = \mathcal{O} \Leftrightarrow df(p) = [f_1(p) \ \dots \ f_k(p)] = \mathcal{O}$$

anula-se ou b) uma das derivadas parciais  $f_i(p)$  não existir.<sup>3</sup> O valor  $f(p)$  de um ponto crítico é chamado de **valor crítico**.

(ii) Um **ponto regular** é um ponto  $p$  não crítico, ou seja  $\nabla f(p)$  existe e não anula-se. Um **valor regular** de  $f$  é um número  $\kappa \in \mathbb{R}$  tal que o nível  $\{f = \kappa\}$  s'ó contem pontos regulares (o vetor gradiente existe e é não-nulo).

**Comentário 6.1.5.** a) Na dimensão 2, ou maior, um ponto crítico não é necessariamente um máximo ou mínimo, por exemplo pode ser um ponto de sela. b) Um máximo, ou mínimo, local num aberto é um ponto crítico.

**Exemplo 6.1.6.** Determine os pontos críticos de  $f(x, y) := x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$ .

SOLUÇÃO. Sendo um polinômio  $f$  é diferenciável. Resta identificar os pontos  $(x, y)$  onde  $f_x = 2x - 2$  e  $f_y = 2y - 6$  se anulam. Obviamente  $(x, y) = (1, 3)$ .

**Exercício 6.1.7.** Determine os valores críticos de  $f(x, y) := y^2 - x^2$ .

**Definição 6.1.8** (Matriz Hessiana). Seja  $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  no aberto  $U$ . A matriz das segundas derivadas parciais  $f_{ij}$  num ponto crítico  $p \in U$  é chamado de **Hessiana**, símbolo<sup>4</sup>

$$H^f(p) := \begin{bmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{xy}(p) & f_{yy}(p) \end{bmatrix}, \quad df(p) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(p) = 0. \quad (6.1.1)$$

<sup>3</sup> se  $f$  é diferenciável em  $p$  a opção b) não acontece; veja §4.2 C

<sup>4</sup> pelo Teorema 3.4.4 de Schwarz sabemos que  $f_{yx} = f_{xy}$  ao longo de  $U$

Para o determinante da Hessiana usamos o símbolo

$$D := \det H^f(p) = f_{xx}(p)f_{yy}(p) - f_{xy}(p)^2.$$

Chama-se um ponto crítico de **não-degenerado** se  $D \neq 0$  é não-nulo.

**Teorema 6.1.9** (Teste da 2a derivada num ponto crítico). *Seja  $p$  um ponto crítico de uma função  $f \in C^2(U)$  num aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Então vale o seguinte.*

- a)  $D > 0$  e  $f_{xx}(p) > 0 \Rightarrow p$  é mínimo local estrito.
- b)  $D > 0$  e  $f_{xx}(p) < 0 \Rightarrow p$  é máximo local estrito.
- c)  $D < 0 \Rightarrow p$  é ponto de sela.

**Comentário 6.1.10** (Caso  $D = 0$  – não podemos concluir nada). Um ponto crítico com  $D = 0$  pode ser um máximo ( $f = -x^4 - y^4$ ) ou um mínimo ( $f = x^4 + y^4$ ) ou nada disso ( $f = x^4 - y^4$  tipo sela enquanto  $f = x^3 - y^3$  não é).

**Exercício 6.1.11.** Determine os valores máximos e mínimos e os pontos de sela da função  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$ .

**Teorema 6.1.12** (Teorema do Valor Extremo). *Uma função contínua com domínio compacto assume máximo e mínimo.*<sup>5</sup>

### Autovalores

A seção “Autovalores” nao é parte do Curriculum de MA211. Para interessados listamos uns fatos da álgebra linear e reformulamos o teste da 2a derivada em termos de autovalores.

Seja  $\mathbf{m} = (m_{ij})$  uma matriz quadrada  $k \times k$  e  $\xi$  um vetor não-nulo de  $\mathbb{R}^k$ . Se existe um  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathbf{m}$  age em  $\xi$  como multiplicação com  $\lambda$ , em símbolos

$$\mathbf{m}\xi = \lambda\xi,$$

então  $\lambda$  é chamado de **autovalor** e  $\xi = \xi_\lambda$  de **autovetor** correspondente a  $\lambda$ .

A matriz Hessiana  $H = H^f(p)$  em (6.1.1) admite dois autovalores reais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  possivelmente iguais. No caso  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  autovetores correspondentes são automaticamente ortogonais  $\xi_1 \perp \xi_2$ . No caso  $\lambda_1 = \lambda_2$  pode-se escolher dois autovetores ortogonais. Se um autovalor  $\lambda < 0$  é negativo, a função decresce na direção de um autovetor correspondente  $\xi_\lambda$ , e cresce no caso  $\lambda > 0$ . O determinante  $D$  da Hessiana  $H$  iguale ao produto dos autovalores.

Dado um ponto crítico  $p$ , são equivalentes:

- (a)  $p$  é não-degenerado;
- (b)  $D := \det H^f(p) \neq 0$ ;  $D = \lambda_1 \lambda_2$

<sup>5</sup> em outras palavras, existem dois pontos  $M$  e  $m$  no domínio de  $f$  tal que  $f$  não tem valores maior do que  $f(M)$  e  $f$  não tem valores menor do que  $f(m)$

- (c) ambos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da matriz Hessiana  $H^f(p)$  são não-nulos;
- (d) a matriz Hessiana  $H^f(p)$  é invertível.

**Teorema 6.1.13** (Teste da 2a derivada). *Seja  $p$  um ponto crítico não-degenerado de uma função  $f \in C^2(U)$  num aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da Hessiana  $H^f(p)$  satisfazem exatamente um dos três casos seguintes.*

- a)  $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow p$  é mínimo local estrito. *ambos positivos*
- b)  $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow p$  é máximo local estrito. *ambos negativos*
- c)  $\lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow p$  é ponto de sela. *um positivo, um negativo*