Capítulo 5

Regra de Cadeia e Derivada Direcional

Neste[1] capítulo primeiro vamos aprender calcular a derivada de funções compostas (regra de cadeia). Segundo vamos conhecer o vetor gradiente ∇f de uma função e seu relacionamento com a derivada df e a derivada de Gateaux $D_v f$ o que é chamada de derivada direcional caso o vetor v é unitário (comprimento $|v| = 1$). E terceiro vamos ver como usar o vetor gradiente $\nabla F(p)$ para descrever o plano tangente a uma superfície de nível $\{F = \kappa\}$ num ponto p.

5.1 Regra de Cadeia

O lei que determine como a derivada de uma função composta é calculada em termos de derivadas das funções individuais é chamado de **regra de cadeia**.

Caso mais simples

No caso de mais de uma variável o cenário mais básico é o seguinte: um caminho $\gamma = (h, g)$ no plano $\mathbb{R}^2$ seguido por uma função f de duas variáveis

$$
\begin{array}{lll}
\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma=(g,h)} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\qquad\quad f \qquad\quad} & \mathbb{R} \\
t \longmapsto (g(t), h(t)) & & \\
\qquad\qquad (x,y) & \longmapsto & f(x,y)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
t \longmapsto f(g(t), h(t)) =: F(t) \\
\mathbb{R} \xrightarrow[F = f\circ(g,h)]{} \mathbb{R}
\end{array}
$$

[1]Cap. 5 de MA211 2024-1, autor Joa Weber: 26 de março de 2024

A demonstração do teorema seguinte é exatamente a mesma, se substituirmos f de duas variáveis por f de k variáveis.

Teorema 5.1.1 (RC-I)**.** *Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável e sejam $x = g(t)$ e $y = h(t)$ funções diferenciáveis. Então $z = F(t) := f(g(t), h(t))$ é uma função diferenciável na variável t e a derivada é dada pela fórmula simbólica*

$$\boxed{z' = f_x \cdot x' + f_y \cdot y'} \tag{RC-I}$$

ou, equivalentemente, pela fórmula detalhada

$$F'(t) = f_1(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f_2(g(t), h(t)) \cdot h'(t). \tag{5.1.1}$$

Demonstração. Suponhamos que $z = f(x, y)$ é diferenciável num ponto da forma $(x_0, y_0) = (g(t_0), h(t_0))$ e que $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são diferenciáveis no ponto t_0.

Vamos provar que $F(t) := f(g(t), h(t))$ é diferenciável no ponto t_0 e calcular a derivada $F'(t_0)$. Por hipótese f é diferenciável no ponto (x_0, y_0). Segundo D no § 4.2.1 as derivadas parciais de f em (x_0, y_0) existem e a função $r\colon \mathbb{R}^2 \supset B_\delta(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$ definida numa bola aberta com centro (x_0, y_0) pela equação

$$\begin{aligned} &f(x, y) - f(x_0, y_0) \\ &\qquad = f_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\,(y - y_0) + r(x - x_0, y - y_0) \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

satisfaz

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \tfrac{r(x-x_0,y-y_0)}{|(x-x_0,y-y_0)|} = 0. \tag{5.1.3}$$

Resta verificar que o limite seguinte existir (neste caso sendo $F'(t_0)$)

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \\ &\overset{(5.1.2)}{=} \lim_{t\to t_0} \frac{f_1(f(t_0), h(t_0)) \cdot (g(t) - g(t_0)) + f_2(f(t_0), h(t_0)) \cdot (h(t) - h(t_0))}{t - t_0} \\ &\quad + \lim_{t\to t_0} \underbrace{\frac{r(g(t) - g(t_0), h(t) - h(t_0))}{|(g(t) - g(t_0), h(t) - h(t_0))|}}_{\overset{(5.1.3)}{\longrightarrow} 0} \cdot \underbrace{\frac{|t - t_0|}{t - t_0}}_{\text{limitado}} \cdot \underbrace{\left|\frac{(g(t) - g(t_0), h(t) - h(t_0))}{t - t_0}\right|}_{\overset{(4.2.1)}{\longrightarrow} |(g'(t_0), h'(t_0))|} \\ &= \quad f_1(f(t_0), h(t_0)) \underbrace{\lim_{t\to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}}_{\overset{(4.2.1)}{=} g'(t_0)} + f_2(f(t_0), h(t_0)) \underbrace{\lim_{t\to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}}_{\overset{(4.2.1)}{=} h'(t_0)}. \end{aligned}$$

Assim o limite existe. Isso prova a formula (5.1.1) e Teorema 5.1.1. □

Exemplo 5.1.2. Seja $F(t) := f(g(t), h(t))$ onde são dadas as funções

$$z = f(x, y) := x^2 y + 3xy^4, \quad x = g(t) := \sin 2t, \quad y = h(t) := \cos t.$$

Determine $F'(0)$ e esboce o caminho $\gamma(t) := (\sin 2t, \cos t)$ para $t \in [0, 2\pi]$.

Solução. Calculamos $f_x = 2xy + 3y^4$ e $f_y = x^2 + 12xy^3$. Obtemos $g'(0) = 2\cos 0 = 2$ e $h(0) = 1$ e $h'(0) = -\sin 0 = 0 = g(0)$. A fórmula (5.1.1) nos da

$$F'(0) = f_1(g(0), h(0)) \cdot \underbrace{g'(0)}_{=2} + f_2(g(0), h(0)) \cdot \underbrace{h'(0)}_{=0} = 4\underbrace{g(0)}_{=0} h(0) + 6\underbrace{h(0)}_{=1}{}^4 = 6.$$

Segundo caso mais simples

Em vez de uma variável t vamos agora permitir duas variáveis (s,t) para nosso par de funções (g,h), assim chegando no diagrama

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad (g,h) \quad} & \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\qquad\quad f \qquad\quad} & \mathbb{R} \\
(s,t) \longmapsto & (g(s,t), h(s,t)) & \\
& (x,y) \longmapsto & f(x,y)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
(s,t) \longmapsto & & f(g(s,t), h(s,t)) =: z(s,t) \\
\mathbb{R} & \xrightarrow[z = f \circ (g,h)]{\qquad\qquad\qquad\qquad} & \mathbb{R}
\end{array}$$

Teorema 5.1.3 (RC-II)**.** *Seja $z = f(x,y)$ uma função diferenciável e sejam $x = g(s,t)$ e $y = h(s,t)$ funções diferenciáveis. Então $z = F(s,t) := f(g(s,t), h(s,t))$ é uma função diferenciável em (s,t), a derivada da composição é dada por composição das derivadas*

$$dF = df_{(g,h)} \circ D(g,h)$$

em todo ponto (s,t). As derivadas parciais são dadas pelas fórmulas simbólicas

$$\boxed{z_s = f_x \cdot x_s + f_y \cdot y_s, \qquad z_t = f_x \cdot x_t + f_y \cdot y_t,}$$

ou, equivalentemente, pelas fórmulas detalhadas

$$\begin{aligned}
F_1(s,t) &= f_1(g(s,t), h(s,t)) \cdot g_1(s,t) + f_2(g(s,t), h(s,t)) \cdot h_1(s,t), \\
F_2(s,t) &= f_1(g(s,t), h(s,t)) \cdot g_2(s,t) + f_2(g(s,t), h(s,t)) \cdot h_2(s,t).
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Demonstração. A demonstração de (RC-II) segue as passos daquela de (RC-I), Teorema 5.1.1, começando assim $\lim_{(s,t)\to(s_0,t_0)} \frac{F(s,t)-F(s_0,t_0)}{|(s-s_0,t-t_0)|}$. A fórmula (5.1.4) para F_2 segue de (5.1.1) se consideramos a função $t \mapsto F(s,t)$ tratando s como uma constante; analogamente para F_1. □

Exemplo 5.1.4. Seja $z = f(x,y) := e^x \cdot \sin y$ e sejam $x = g(s,t) := st^2$ e $y = h(s,t) := s^2 t$. Seja $F(s,t) := f(g(s,t), h(s,t))$. Determine F_s e F_t.

Solução. Temos $f_x = e^x \cdot \sin y$ e $f_y = e^x \cdot \cos y$. Temos $x_s = t^2$ e $y_s = 2st$. Aplica regra (RC-II) para obter

$$F_s(s,t) = f_x \cdot x_s + f_y \cdot y_s = e^{st^2} (\sin s^2 t)\, t^2 + e^{st^2} (\cos s^2 t)\, 2st.$$

Deixamos ao leitor calcular $F_t(s,t)$.

Caso geral

No caso geral temos n variáveis $(t_1, \dots, t_n) =: t$ e listas de funções $(g^1, \dots, g^k) =: g$ e $(f^1, \dots, f^m) =: f$, assim chegando no diagrama

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^n & \xrightarrow{g=(g^1,\dots,g^k)} & \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f=(f^1,\dots,f^m)} & \mathbb{R}^m \\
t=(t_1,\dots,t_n) & \longmapsto & (g^1(t),\dots) & & \\
 & & x=(x_1,\dots,x_k) & \longmapsto & (f^1(x),\dots)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
t=(t_1,\dots,t_n) & \longmapsto & (f^1(g^1(t_1,\dots),\dots),\dots) \\
\mathbb{R} & \xrightarrow[F=f\circ g]{} & \mathbb{R}
\end{array}
$$

Teorema 5.1.5 (RC-geral)**.** *Seja $u = f(x_1, \dots, x_k)$ uma função diferenciável com valores em $\mathbb{R}^m$ e sejam $x_i = g^i(t_1, \dots, t_n)$ funções diferenciáveis para $i = 1, \dots, k$ organizadas numa lista $g := (g^1, \dots, g^k)$. Então a função composta*

$$F := f \circ g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto f(g_1(t_1, \dots, t_n), \dots, g_k(t_1, \dots, t_n))$$

é diferenciável em $t := (t_1, \dots, t_m)$, a derivada da composição é dada por composição das derivadas $DF(t) = Df(g(t)) \circ Dg(t)$ e as derivadas parciais por

$$(F^i)_{t_j} = \frac{\partial f^i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f^i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f^i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j}$$

ponto por ponto para cada membro $F^1, \dots, F^m$ de F e cada variável $t_1, \dots, t_m$.

5.2 Diferenciação Implícita

Suponha que uma equação $F(x, y) = 0$ defina y implicitamente como uma função diferenciável $y = g(x)$ de x. Se F é diferenciável, podemos aplicar a regra de cadeia (RC-I), veja (5.1.1), para diferenciar ambos os lados da equação $0 = F(x, g(x))$ para x obtendo $0 = F_x \frac{d}{dx} x + F_y \frac{d}{dx} g = 0 = F_x + F_y g'$. Caso $F_y \neq 0$ nao anula-se, resolvimos para $\frac{\partial y}{\partial x} = g' = -\frac{F_x}{F_y}$.

Teorema 5.2.1 (Teorema da Função Implícita – Caso $F(x, y) = 0$)**.**
Seja $F \colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(U)$. Seja $(a, b) \in U$ um ponto tal que $F(a, b) = 0$ e $F_y(a, b) \neq 0$. Então o seguinte é verdadeiro. Existem intervalos abertos $I \ni a$ e $J \ni b$ tais que para cada $x \in I$ existe um único $g(x) \in J$ anulando $F(x, g(x)) = 0$. A função $g \colon I \to \mathbb{R}$ é diferenciável (de fato C^1)[2] *e*

$$\tfrac{\partial y}{\partial x} = g'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}.$$

[2] g diferenciável implica continuidade, assim o lado direito na fórmula para $g'(x)$ é contínuo

Demonstração. Veja [Gui01, §12.2 p. 239]. □

Tem várias versões do Teorema da Função Implícita ([Gui01, §12.2]):

a) Para k variáveis se temos um ponto com $F(p) = 0$ e $F_k(p) \neq 0$ podemos resolver $F(x_1, \ldots, x_k) = 0$ exprimindo $x_k = g(x_1, \ldots, x_{k-1})$ como função de $\hat{x} := (x_1, \ldots, x_{k-1})$ tal que $F(\hat{x}, g(\hat{x})) = 0$ e tal que

$$\tfrac{\partial x_k}{\partial x_1} = g_{x_1}(\hat{x}) = -\frac{F_{x_1}(\hat{x}, g(\hat{x}))}{F_y(\hat{x}, g(\hat{x}))}, \ \ldots \ \tfrac{\partial x_k}{\partial x_{k-1}} = g_{x_{k-1}}(\hat{x}) = -\frac{F_{x_{k-1}}(\hat{x}, g(\hat{x}))}{F_y(\hat{x}, g(\hat{x}))}.$$

b) Para resolver duas equações $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ simultaneamente $F(x, g(x), h(x)) = 0$ e $G(x, g(x), h(x)) = 0$ obtendo ambas variáveis $y = g(x)$ e $z = h(x)$ como funções de x de classe C^1 precisamos ter um ponto p tal que $F(p) = 0 = G(p)$ e $\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \neq 0$. Neste caso

$$\tfrac{\partial y}{\partial x} = g'(x) = -\frac{\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}, \qquad \tfrac{\partial z}{\partial x} = h'(x) = -\frac{\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}.$$

onde $\frac{\partial(\cdot,\cdot)}{\partial(\cdot,\cdot)}$ são as matrizes Jacobianas definidas em (4.4.1).

Exercício 5.2.2. (i) A equação $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$ define implicitamente alguma função diferenciável $z = g(x, y)$? (ii) Em caso afirmativo, expresse $\frac{\partial z}{\partial x} = g_x$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = g_y$ em termos de x, y, e z.

Solução. (i) Escrevemos $F(x, y, z) := x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Conforme versão a) acima com $k = 3$ precisamos encontrar um ponto p tal que $F(p) = 0$ e $F_z(p) \neq 0$. Esse primeiro passo depende da nossa intuição. Vemos que $F(1, 0, 0) = 0 = F(0, 1, 0) = F(0, 0, 1)$. Calculamos

$$F_x(x, y, z) = 3x^2 + 6yz, \quad F_y(x, y, z) = 3y^2 + 6xz, \quad F_z(x, y, z) = 3z^2 + 6xy.$$

Dos três pontos só $p = (x_0, y_0, z_0) := (0, 0, 1)$ não anula F_z, ou seja $F_z(0, 0, 1) = 3 \neq 0$ e $F(0, 0, 1) = 0$. Assim respondemos (i) com "Sim".

(ii) Segundo o Teorema da Função Implícita – Caso a) $F(x, y, z) = 0$ – existe uma bola aberta $B(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2$ de centro $(x_0, y_0) = (0, 0)$, um intervalo J_{z_0} contendo $z_0 = 1$, e uma função diferenciável

$$g\colon \mathbb{R}^2 \supset B(x_0, y_0) \to J_{z_0} \subset \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g(x, y), \quad (x_0, y_0) = (0, 0) \mapsto 1$$

com $F(x, y, g(x, y)) = 0$ e

$$\tfrac{\partial z}{\partial x} = g_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))}, \quad \tfrac{\partial z}{\partial y} = g_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, g(x, y))}{F_z(x, y, g(x, y))}.$$

No nosso caso obtemos

$$\tfrac{\partial z}{\partial x} = g_x(x, y) = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}, \qquad \tfrac{\partial z}{\partial y} = g_y(x, y) = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}.$$

5.3 Derivada Direcional

A **derivada direcional** tem caracter de derivada parcial, só em vez de variar ao longo de um eixo coordenada (gerado por um vetor canônico e_i) variamos ao longo de uma reta gerada por qualquer vetor $\hat{v}$ de comprimento 1. A mesma formula faz sentido para vetores de qualquer comprimento, neste caso sendo chamada de **derivada de Gateaux**. Ainda que usamos o mesmo símbolo D_v em ambos casos, vamos reservar o termo "derivada direcional" exclusivamente para vetores de comprimento 1 os quais denotamos, geralmente, pelo símbolo $\hat{v}$.

Existência da derivada de Gateaux num ponto ainda em todas as direções, não implica diferenciabilidade. Enquanto a derivada de Gateaux é multiplicativo no sentido que respeita a multiplicação de um vetor v com um numero real α, geralmente não respeita a adição $v + w$ de dois vetores – não é aditivo.

Destacamos que para definir derivada direcional num ponto p não precisamos diferenciabilidade em p. Mas logo depois vamos focar só em funções diferenciáveis em p começando com a definição do vetor gradiente. Para funções diferenciáveis em p vale a relação $D_v f(p) = df(p)v = \nabla f(p) \cdot v$ da qual segue existência e aditividade: a derivada $df(p)$ é linear (aditivo e multiplicativo).

Definição 5.3.1. (i) A **derivada de Gateaux** aplicada a uma função $f\colon \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}$ num ponto $p \in U$ na direção de um vetor $v \in \mathbb{R}^k$ é o número

$$D_v f(p) := \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} \tag{5.3.1}$$

se o limite existir. Intuitivamente $D_v f(p)$ representa a *velocidade-dependente-taxa-de-variação-instantânea* da função f, viajando através do ponto p com uma velocidade especificada pelo comprimento $|v|$ de v.

(ii) Elimina-se dependência de velocidade permitindo só **vetores unitários** (comprimento 1) $\hat{v}$, assim viajando com velocidade 1. O conjunto de todos os vetores unitários em $\mathbb{R}^k$ é a **esfera unitária**

$$\mathbb{S}^{k-1} := \{\text{todos os vetores de } \mathbb{R}^k \text{ de comprimento } 1\} \subset \mathbb{R}^k.$$

Cada um vetor não-nulo v gera um vetor unitário $\hat{v} := \frac{1}{|v|} v$.

(iii) Aplicado a vetores unitários $\hat{v}$ chamamos a derivada de Gateaux $D_{\hat{v}} f(p)$ de **derivada direcional**. Intuitivamente $D_{\hat{v}} f(p)$ é a **taxa de variação** instantânea da função f, viajando através do ponto p com velocidade 1.

A derivada de Gateaux de uma função, diferenciável ou não, é **homogêneo** (respeita multiplicação escalar). Para derivada direcional noções como multiplicatividade ou aditividade não fazem nenhum sentido, porque estas operações geralmente não preservam comprimento 1.

Lema 5.3.2 (Multiplicatividade da derivada de Gateaux)**.** *Suponha que $D_v f(p)$ existe. Então para qualquer número real λ existe também $D_{\lambda v} f(p)$ e*

$$D_{\lambda v} f(p) = \lambda D_v f(p). \tag{5.3.2}$$

Demonstração. No limite (5.3.1) para $D_{\lambda v} f(p)$, denomina $t\lambda$ de $\tilde{t}$ e substitua no denominador t por $\tilde{t}/\lambda$ e $\lim_{t\to 0}$ por $\lim_{\tilde{t}\to 0}$. □

Os **vetores canônicos** $e_1, \dots, e_k \in \mathbb{R}^k$ são as listas $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ com todos os membros nulos exceto membro i quem é 1. O subconjunto $\mathcal{E}^k = \{e_1, \dots, e_k\} \subset \mathbb{S}^{k-1}$ é chamado de **base canônica** de $\mathbb{R}^k$. É fácil verificar que as derivadas direcionais $D_{e_i} f$ reproduzem as derivadas parciais f_i caso existam

$$D_{e_1} f(p) = f_1(p), \quad \dots \quad , D_{e_k} f(p) = f_k(p).$$

Verifique isso no caso de duas variáveis para $p = (a, b)$ e $v = (\alpha, \beta)$. Observe que $p + hv = (a, b) + h(\alpha, \beta) = (a + h\alpha, b + h\beta)$.

Exemplo 5.3.3 (Todas derivadas direcionais existem, f não é diferenciável)**.** Sabemos do Exercício 4.2.3 que a função

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0), \end{cases} \tag{5.3.3}$$

na origem é contínua, mas não diferenciável, ainda que a derivada direcional existe em todas as direções:

$$D_{\hat{v}} f(0, 0) = \alpha^3, \qquad \hat{v} = (\alpha, \beta), \quad 1 = \alpha^2 + \beta^2 = |\hat{v}|^2. \tag{5.3.4}$$

Solução. A derivada direcional $D_{\hat{v}} f(0, 0)$ é o limite seguinte

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(t\alpha)^3}{(t\alpha)^2+(t\alpha)^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\alpha^3}{t^3(\alpha^2 + \beta^2)} = \alpha^3.$$

Comentário 5.3.4 (Derivada de Gateaux não é aditivo)**.** Para f em (5.3.3) vale $D_{(1,0)} f(0, 0) = 1$ e $D_{(0,1)} f(0, 0) = 0$, mas $D_{(1,1)} f(0, 0) = \frac{1}{2} \neq 1 + 0$.
Mas no §5.3.1 veremos que aditividade num ponto p vale sob a hipótese que f é diferenciável em p.

Funções diferenciáveis

Daqui para frente consideramos funções diferenciáveis num ponto p. Eles não só admitem todas derivadas parciais (da primeira ordem), segundo § 4.2 C, mas ainda derivada direcional em todas as direções.

$$\boxed{\widehat{\mathrm{C}}.\ f \text{ diferenciável em } p \underset{(\not\Leftarrow)}{\Rightarrow} D_v f(p) \text{ existe } \forall \text{ direções } v.}$$

O reciproco de $\hat{\mathrm{C}}$ é falso como Exemplo 5.3.3 acima mostra. Aprenderemos um critério novo para não ser diferenciável e o usamos no Exercício 5.3.8.

5.3.1 Vetor Gradiente

Definição 5.3.5. Seja a função $f\colon \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}$ diferenciável no ponto $p \in U$. A lista das derivadas parciais de f em p é chamada de **vetor gradiente**, símbolo

$$\nabla f(p) := (f_1(p), \dots, f_k(p))$$

Teorema 5.3.6. *Se f é diferenciável em p, então $D_v f(p)$ existe $\forall v \in \mathbb{R}^k$ e*

$$D_v f(p) = df(p)v = \nabla f(p) \cdot v$$

onde a transformação linear $df(p)\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é a derivada; veja (4.4.2).

Demonstração. Seja f diferenciável no ponto $p = (p_1, \dots, p_k)$ do seu domínio aberto $U \subset \mathbb{R}^k$. No caso $v = \mathcal{O}$ a identidade a provar é $0 = 0$, verdadeiro. Fixe $v \neq \mathcal{O}$. Usando que U é aberto, escolhemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que a bola aberta $B_{\varepsilon|v|}(p)$ é contida em U. Considere a função $F\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ dada por $F(t) := f(p + tv)$. Como f é diferenciável em p e $g_i(t) := p_i + tv_i$, $i = 1, \dots, k$, em $t = 0$ com $g_i'(0) = v_i$ a regra da cadeia (5.1.1) acerta que

$$F'(0) = \underbrace{f_1(p)v_1 + \dots + f_k(p)v_k}_{=\nabla f(p)\cdot v} = df(p)v.$$

Assim $F'(0)$ – o limite em (5.3.1) – existe, mas este limite se existir é $D_v f(p)$. $\square$

Corolário 5.3.7 (Critério para "não diferenciável"). *Desigualdade $D_v f(p) \neq \nabla f(p) \cdot v$ numa direção v implica que f não é diferenciável em p.*

Exemplo 5.3.8. A função f em (5.3.3) não é diferenciável em $(0, 0)$.

Solução. Segundo (5.3.4), para $\hat{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ obtemos $D_{\hat{v}} f(0, 0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$. Assim $\nabla f(0, 0) \cdot \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq \hat{v} f(0, 0)$.

Exercício 5.3.9. Seja $f(x, y) := x^3 - 3xy + 4y^2$ e seja $v \in \mathbb{R}^2$ aquele vetor unitário tal que o ângulo θ do eixo-x para v é $\frac{\pi}{6}$. Determine $D_v f(x, y)$.

[Dicas. $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.]

5.3.2 Taxa de Variação

Exercício 5.3.10. Seja $f(x, y) := x\sin(yz)$. a) Determine $\nabla f(x, y)$. b) Determine a taxa de variação de f no ponto $p = (1, 3, 0)$ na direção $v = e_1 + 2e_2 - e_3$.

Maximizando a Taxa de Variação

Teorema 5.3.11. *Seja f diferenciável no ponto p. O máximo da taxa de variação de f no ponto p é $|\nabla f(p)|$ e ocorre na direção $\widehat{\nabla f}(p) := \frac{1}{|\nabla f(p)|}\nabla f(p)$:*

$$\max_{\hat{v}=1} D_{\hat{v}} f(p) = |\nabla f(p)| = D_{\widehat{\nabla f}(p)} f(p).$$

Demonstração. Segundo Teorema 5.3.6 e uma propriedade do produto escalar

$$\max_{\hat v=1} D_{\hat v} f(p) = \max_{\hat v=1} \nabla f(p)\cdot \hat v = \max_{\hat v=1} |\nabla f(p)|\,\underbrace{|\hat v|}_{=1}\,\underbrace{\cos\angle(\nabla f(p),\hat v)}_{=1 \text{ para angulo } 0} = |\nabla f(p)|.$$

O coseno tem valores $[-1,1]$, o máximo sendo 1. □

Comentário 5.3.12 (Coordenadas do vetor v do ponto p ao ponto q)**.** Se $p=(p_1,\dots,p_k)$ e $q=(q_1,\dots,q_k)$ obtemos

$$\boxed{v=-p+q=(-p_1+q_1,\dots,-p_k+q_k).}$$

Isso segue da adição de vetores (flechas) colocando o ponto inicial da segunda flecha ao ponto final da primeira. Use as flechas de $\mathcal{O}$ para q e de p para $\mathcal{O}$.

Exercício 5.3.13. Seja $f(x,y):=xe^y$. a) Determine a taxa de variação de f no ponto $p=(2,0)$ na direção v de p a $q=(\frac{1}{2},2)$. b) Determine a direção na qual ocorre a taxa de variação máxima de f em p. c) Determine a taxa de variação máxima de f em p.

5.3.3 Superfície de nível e plano tangente

Definição 5.3.14 (Valor regular)**.** Seja $F(x,y,z)$ uma função no $\mathbb{R}^3$ de classe C^1. Chamamos $\kappa\in\mathbb{R}$ de **valor regular** de F se o vetor gradiente ∇F não se anula ao longo do nível $\{F=\kappa\}$, em símbolos $F(p)=\kappa \Rightarrow \nabla F(p)\neq \mathcal{O}$. Chamamos κ de **valor crítico** de F se nao é regular, ou seja se ∇F anula-se em pelo menos um ponto no nível $\{F=\kappa\}$.

Dado um valor regular κ de $F(x,y,z)$, escrevemos o conjunto de todos os pontos q onde F tem valor $F(q)=\kappa$ na forma

$$\{F=\kappa\} \quad \text{ou} \quad F^{-1}(\kappa)$$

chamado de **superfície de nível**. Suponha que $t\mapsto r(t)=(x(t),y(t),z(t))\in\{F=\kappa\}$ é um caminho continuamente diferenciável (C^1) no nível κ tal que o vetor velocidade $\dot r:=\frac{d}{dt}r$ nunca se anula, particularmente a função composta $F(r(t))\equiv\kappa$ é constante. Calculamos a derivada com a regra da cadeia (RC-I)

$$0=\tfrac{d}{dt}\kappa=\tfrac{d}{dt}F(r(t)) \overset{(5.1.1)}{=} F_x\dot x+F_y\dot y+F_z\dot z=\nabla F(r(t))\cdot\dot r(t).$$

Observe que nenhum dos dois vetores no produto escalar se anula. Assim o vetor gradiente $\nabla F(r(t))$ é ortogonal ao vetor tangente $\dot r(t)$ a qualquer curva na superfície de nível passando o ponto $p=r(t)$. Mas isso determine unicamente um plano, o plano tangente $T_p\{F=\kappa\}$.

Definição 5.3.15 (Plano tangente – superfície de nível)**.** Seja $F\in C^1(\mathbb{R}^3)$ uma função e κ um valor regular de F. O **plano tangente** num ponto $p=(x_0,y_0,z_0)$

da superfície de nível κ é o plano em $\mathbb{R}^3$ passando p e ortogonal ao vetor gradiente $\nabla F(p)$, em símbolos

$$\begin{aligned} T_p\{F=\kappa\} &:= \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla F(p)\cdot(q-p)=0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{pmatrix} F_x(p) \\ F_y(p) \\ F_z(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

O **vetor normal** é

$$N_p := \tfrac{1}{|\nabla F(p)|}\nabla F(p) \perp T_p\{F=\kappa\} \tag{5.3.6}$$

e a **reta normal**

$$R_p := p + \mathbb{R}\nabla F(p) := \{p + \mu \nabla F(p) \mid \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 5.3.16 (Superfície dada como gráfico)**.** Seja $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e seja a superfície $S = \mathrm{gr}(f) = \{z = f(x,y)\}$ o gráfico. Encontre a equação de $T_P S$ num ponto $P = (x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \in S$, conforme Definição 5.3.15, representando S como superfície de nível $S = \{F = \kappa\}$ usando a função $F(x,y,z) := z - f(x,y)$ e o valor $\kappa := 0$. Compare seu resultado com (4.3.1).

Exemplo 5.3.17. Dado o elipsoide $\mathcal{E} = \{\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 3 = 0\}$, determine a equação de $T_p\mathcal{E}$ em $p = (-2,1,-3)$, o vetor normal N_p, e a reta normal R_p.

Solução. Definimos $F(x,y,z) := \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} - 3$ e $\kappa := 0$. Calculamos $\nabla F(x,y,z) = (x/2, 2y, 2z/9)$, assim $\nabla F(p) = (-1, 2, -2/3)$. Assim

$$T_q\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z+3 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{-3x - 6y + 2z = -18\}$$

e

$$N_p = \tfrac{3}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \qquad R_p = \left\{ \begin{pmatrix} -2-\mu \\ 1+2\mu \\ -3-2\mu/3 \end{pmatrix} \middle| \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$