Capítulo 7

Fórmula de Taylor

7.1 Uma variável

O caso de uma variável é tratado no Cálculo I. Vamos repetir uns fatos como motivação. Denotamos de $f^{(n)}(x)$ e n-ésima derivada de f no ponto $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.1.1. *Se uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiver uma representação em série de potencias num ponto a e de raio de convergência $R > 0$, ou seja se vale*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad |x-a| < R$$

então os coeficientes são $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. $0! := 1$ e $x^0 := 1$

Demonstração. Por hipótese $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$, assim $f(a) = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots = c_0$ e $f'(a) = 0 + c_1 + 2c_2(a-a)^2 + 3c_3(a-a)^3 + \cdots = c_1$ etc. □

Corolário 7.1.2. *Uma função f como no Teorema 7.1.1 é da forma*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

no todo ponto x com $|x-a| < R$.

Definição 7.1.3. Uma série da forma

$$T(x) = T^{f,a}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

é chamada de **série de Taylor** da função f no ponto a e a n-ésima soma parcial

$$T_n(x) = T_n^{f,a}(x) := \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

é chamada de n-ésimo **polinômio de Taylor** da função f no ponto a.

Observe que $T_0(x) = f(a)$ é constante e $T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ aproxima f pela tangente no ponto a.

Exemplo 7.1.4. A função

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , x = 0, \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0, \end{cases}$$

não é igual a sua série de Taylor em 0 a qual é a função nula porque toda derivada anula-se $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n$. Por exemplo

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{he^{1/h^2}} = 0.$$

Exemplo 7.1.5 (Exponencial)**.** A série de Taylor no ponto 0 de $f(x) := e^x$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

e converge para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim O raio da convergência R é infinito.

A fórmula vale como todas derivadas em 0 são 1. Dado $x \in \mathbb{R}$, pelo teste de razão $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n}| = \frac{|x|}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$, como o limite é menor de 1, obtemos convergência no ponto x, para todo x.

Corolário 7.1.6. *Dado $x \in \mathbb{R}$, o limite seguinte é nulo*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0. \tag{7.1.1}$$

Demonstração. Se o limite não fosse nulo, a soma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ seria infinita. □

Observação 7.1.7. Se e^x tiver uma expansão em serie de potencias no ponto 0, então $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ segundo Corolário 7.1.2.

Função iguale sua série de Taylor

Chegamos à questão quando uma função, a qual admite derivadas de todas as ordens, é igual a sua série de Taylor num ponto a?

Teorema 7.1.8 (Série de Taylor)**.** *Dado $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ e um ponto $a \in \mathbb{R}$, definimos a função n-ésimo resto $R_n = R_n^{f,a} := f - T_n^{f,a}$. Dado $R > 0$, se a seqüência resto se anula no intervalo aberto de centro a e raio R, ou seja*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad |x-a| < R$$

então f iguale no mesmo intervalo sua série de Taylor no ponto a, em símbolos

$$f(x) = T^{f,a}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad |x-a| < R.$$

Demonstração. Seja $|x-a| < R$, então

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) \overset{\substack{\text{def.}\\ R_n}}{=} \lim_{n\to\infty}(f(x) - R_n(x)) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) \overset{\text{hipot.}}{=} f(x) - 0.$$

□

Para verificar a hipótese $R_n \to 0$ no teorema é útil o critério seguinte.

Proposição 7.1.9 (Critério – Desigualdade de Taylor)**.** *Na situação de Teorema 7.1.8, se nos pontos de um intervalo fechado a $(n+1)$-esima derivada é limitada por a mesma constante M, em símbolos*

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M, \quad |x-a| \le d$$

então

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\le \frac{M}{(n+1)!} \cdot |x-a|^{n+1}, \quad |x-a| \le d \\ &\le M \frac{d^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\overset{(7.1.1)}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0. \end{aligned}$$

Em cinza é o caso que todas as derivadas são limitadas pela mesma constante M.

Idéia de demonstração. Seja $n = 1$ e $x \in [a, a+d]$. Aplicando integração $\int_a^x \dots dt$ à desigualdade $f''(t) \le M$ obtemos segundo o Teorema Fundamental de Cálculo (TFC)

$$f'(x) - f'(a) \overset{\text{(TFC)}}{=} \int_a^x f''(t)\, dt \le \int_a^x M\, dt = M(x-a).$$

A esta estimativa aplique $\int_a^x \dots dt$ para obter similarmente

$$\begin{aligned} R_1(x) := f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) &\overset{\text{(TFC)}}{=} \int_a^x \underbrace{f'(t) - f'(a)}_{\le M(t-a)} dt \\ &\le M \tfrac{(t-a)^2}{2}\Big|_{t=a}^{x} = \tfrac{M}{2}(x-a)^2. \end{aligned}$$

O caso $x \in [a-d, a]$ funciona analogamente. No caso geral de $n \in \mathbb{N}$ usa-se indução fazendo integração n vezes. □

Corolário 7.1.10. *Para todo $x \in \mathbb{R}$ vale $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.*

Demonstração. Escolhemos $a = 0$. Dado $d > 0$, como $f(x) := e^x = f^{(n+1)}(x)$ iguale todas suas derivadas temos $|f^{(n+1)}(x)| = |e^x| \le e^d =: M$ quando $|x| \le d$, independente de n. Proposição 7.1.9 verifica a hipótese de Teorema 7.1.8. □

Exercício 7.1.11. Determine a série de Taylor $T^{f,2}$ de $f(x) := e^x$ no ponto $a = 2$ e mostre que é igual à própria função exponencial, ou seja $T^{f,2}(x) = e^x$.

Exercício 7.1.12. Determine a série de Taylor $T^{\sin,0}$ de $g(x) := \sin x$ no ponto $a = 0$ e mostre que é igual à própria função seno, ou seja $T^{\sin,0}(x) = \sin x$.

7.2 Várias variáveis

Deixa lembrar que neste texto U denota um subconjunto *aberto*.

Teorema 7.2.1 (Teorema do Valor Médio – TVM)**.** *Dado uma função diferenciável $f\colon \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}$ e dois pontos P_0 e P_1 tal que o* ***segmento fechado***

$$[P_0, P_1] := \{P_0 + t(P_1 - P_0) \mid t \in [0,1]\} \subset U$$

é contido em U. Então existe um ponto $\overline{P} \in (P_0, P_1)$ no segmento aberto[1] *com*

$$f(P_1) - f(P_0) = \nabla f(\overline{P}) \cdot (P_1 - P_0) = df(\overline{P})(P_1 - P_0).$$

Demonstração. A função $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(r(t))$, onde $r(t) := P_0 + t(P_1 - P_0)$, é contínua e diferenciável em $(0,1)$. Conforme o TVM para uma variável (Cor. A.0.11) existe um ponto $\bar{t} \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(\bar{t})(1-0)$. □

7.2.1 Gradiente nulo

Observação 7.2.2. Para qualquer função $f\colon \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}$ vale obviamente

$$f \equiv const \quad \underset{(\not\Leftarrow)}{\Rightarrow} \quad \nabla f \equiv 0.$$

O reciproco é falso já no caso de $k = 1$ variável, se a função é definida em dois intervalos abertos disjuntos. Exemplo: $f(x) := -1$, $x < 0$, e $f(x) := 1$, $x > 0$.

Definição 7.2.3. Um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ é chamado de **conexo por caminho** se qualquer dois pontos $P_0, P \in U$ podem ser conectados através de um número finito de segmentos em U:

$$\exists P_1, \dots, P_n = P \in U \colon \overline{P_0, P_1}, \overline{P_1, P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}, P} \subset U.$$

Teorema 7.2.4. *Seja U conexo por caminho e $f\colon \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}$ diferenciável:*

$$\nabla f \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv const.$$

[1] o segmento aberto $(P_0, P_1) := \{P_0 + t(P_1 - P_0) \mid t \in (0,1)\}$ não contem os extremidades P_0 e P_1

Demonstração. Fixe um ponto $P_0 \in U$. Vamos mostrar: qualquer ponto $P \in U$ tem o mesmo valor $f(P) = f(P_0)$. Conecte P_0 com P através de segmentos $\overline{P_0, P_1}$, $\overline{P_1, P_2}$, ..., $\overline{P_{n-1}, P} \subset U$. O Teorema 7.2.1 do Valor Médio diz que

$$f(P_1) - f(P_0) = \underbrace{\nabla f(\overline{P})}_{= 0 \text{ hip.}} \cdot (P_1 - P_0) = 0$$

ou seja $f(P_0) = f(P_1)$. O mesmo argumento para o segundo segmento $[P_1, P_2]$ mostra que $f(P_1) = f(P_2)$. Repetimos o argumento ate chegamos no último segmento $[P_{n-1}, P]$ com a conclusão $f(P_{n-1}) = f(P)$. □

Teorema 7.2.5. *Seja U conexo por caminho e $f, g\colon \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}$ diferenciável:*

$$\nabla f = \nabla g \qquad \Rightarrow \qquad g = f + const.$$

Demonstração. Para $h := g - f$ vale $\nabla h = 0$, consequentemente $h \equiv const$ segundo Teorema 7.2.4. □

Teorema 7.2.6. *Para funções $P, Q\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vale o seguinte:*

$$\exists f\colon U \to \mathbb{R} \text{ tal que } \underbrace{f_x = P,\ f_y = Q}_{\nabla f = (P,Q)} \qquad \Rightarrow \qquad P_y = Q_x.$$

Na parte III vamos interpretar a lista $(P, Q)\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^2$ como campo vetorial ao longo de $U \subset \mathbb{R}^2$. A aplicação do teorema será como um critério: Se $P_y \neq Q_x$ então o campo vetorial (P, Q) não é igual a um campo gradiente ∇f.

Demonstração. Pela hipótese $f_x = P$ e $f_y = Q$ são de classe C^1. Por isso $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y \in C^0$. Equivalentemente $f \in C^2$ e o Teorema 3.4.3 de Schwarz aplica: $P_y = f_{xy} = f_{yx} = Q_x$. □

7.2.2 Expansão de Taylor com resto de Lagrange R_1

Por razões da apresentação e legibilidade consideramos o caso de duas variáveis $\mathbb{R}^2$.

Teorema 7.2.7. *Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0) \in U$ e um vetor não-nulo $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tal que o segmento $\overline{P_0 P_1}$ é contido no aberto U onde $P_1 := P_0 + (h, k)$. Então existe um $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ no segmento aberto (P_0, P_1) tal que*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = T_1(h, k) + R_1(h, k)$$

onde $T_1 = T_1^{f, P_0}$

$$T_1(h, k) := f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

e $R_1 = R_1^{f, \overline{P}}$

$$R_1(h, k) := \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\bar{P})h^2 + 2f_{xy}(\bar{P})hk + f_{yy}(\bar{P})k^2\right).$$

Demonstração. Considere a função $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x_0 + ht, y_0 + kt)$. Aplique Teorema A.0.12 com $n = 1$ (expansão de Taylor – uma variável). □

7.2.3 Expansão de Taylor com resto de Lagrange R_n

Por razões da apresentação e legibilidade consideramos o caso de duas variáveis $\mathbb{R}^2$.

Teorema 7.2.8. *Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Dado um ponto $P_0 = (x_0, y_0) \in U$ e um vetor não-nulo $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tal que o segmento $\overline{P_0P_1}$ é contido no aberto U onde $P_1 := P_0 + (h,k)$. Então existe um $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y})$ no segmento aberto (P_0, P_1) tal que*

$$f(x_0+h, y_0+k) = T_n(h,k) + R_n(h,k)$$

onde $T_n = T_n^{f,P_0}$

$$T_n(h,k) := f(x_0,y_0) + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \frac{\partial^m f(x_0,y_0)}{\partial x^{m-i} \partial y^i} h^{m-i} k^i}_{g^{(m)}(0)}$$

e $R_n = R_n^{f,\overline{P}}$

$$R_n(h,k) := \frac{1}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{\partial^{n+1} f(\bar{x},\bar{y})}{\partial x^{n+1-i} \partial y^i} h^{n+1-i} k^i.$$

Demonstração. Considere a função $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x_0+ht, y_0+kt)$. Calcule $g^{(m)}(t)$ usando indução. Aplique Teorema A.0.12 (expansão de Taylor – uma variável). Veja também [Gui01, §15.6]. $\square$