Capítulo 6

Valores máximo e mínimo

Neste[1] capítulo primeiro estudamos os pontos p onde uma função f assume um valor máximo ou mínimo, podemos buscar localmente numa vizinhança de p ou no domínio inteiro. Um papel importante, no caso diferenciável, são os pontos onde o gradiente $\nabla f(p) = \mathcal{O}$ se anula,[2] chamado de pontos críticos.

Segundo buscamos os valores localmente máximas ou mínimas de uma função f ao longo de um dado conjunto de nível $\{g = \kappa\}$ de uma segunda função g com valor regular κ. Resolvemos o problema com o método de multiplicadores de Lagrange. A ideia é identificar os níveis c e os pontos p tais que $\{f = c\}$ toca $\{g = \kappa\}$ em p. Em tal p os gradientes $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ são múltiplos e o fator λ é chamado de multiplicador de Lagrange. Junto com a equação $g = \kappa$ tem-se o mesmo número de equações como incógnitas.
Só em tais pontos p pode-se encontrar máxima ou mínima locais de f ao longo do conjunto de nível $\{g = \kappa\}$. Ao fim tem-se que analisar cada um p encontrado se é extremo local, ou não.

6.1 Pontos críticos

Definição 6.1.1 (Máximo e mínimo)**.** Seja $f(x, y)$ uma função de 2 variáveis.

1) (a, b) **máximo local** $:\Leftrightarrow f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos pontos $(x, y) \neq (a, b)$ de uma bola aberta de centro (a, b).

2) (a, b) **mínimo local** $:\Leftrightarrow f(a, b) \leq f(x, y)$ para todos pontos $(x, y) \neq (a, b)$ de uma bola aberta de centro (a, b).

3) No caso de desigualdade estrita a) '$>$', respectivamente b) '$<$', chamamos (a, b) **máximo local estrito**, respectivamente **mínimo local estrito**.

4) Se as desigualdades valem para todos pontos do domínio de f falamos de

   1) **máximo**;

[1] Cap. 6: 26 Ago 2023
[2] de $\mathcal{O}$ denotamos o vetor nulo - a lista $(0, \ldots, 0)$ cujos membros são todos nulos

2) **mínimo**;
3a) **máximo estrito**;
3b) **mínimo estrito**.

5) Máximos e mínimos são chamados de **valores extremos**.

Teorema 6.1.2. *Num máximo ou mínimo o gradiente, se existir, anula-se.*

Demonstração. Tratamos o caso de duas variáveis $f(x,y)$, o caso geral sendo análogo. Seja (a,b) um máximo ou mínimo de f. Defina $g(x) := f(x,b)$. Como a derivada $g'(a)$ é igual a $f_x(a,b)$ o que existe pela hipótese, e como a função de uma variável g tem máximo ou mínimo em a (porque f tem em (a,b)), o Teorema de Fermat (Cálc. I) diz que a derivada $g'(a) = 0$ anula-se. □

Corolário 6.1.3. *Seja $S = \mathrm{gr}(f)$ o gráfico de uma função $f(x,y)$. Num máximo ou mínimo $p = (a,b)$ de f o plano tangente*

$$T_{(a,b,f(a,b))}S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} f_x(p) \\ f_y(p) \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-f(a,b) \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{z = f(a,b)\}.$$

é o plano horizontal na altura $f(a,b)$.

Definição 6.1.4 (Ponto crítico)**.** (i) Chama-se p um **ponto crítico** da função $f\colon U \to \mathbb{R}$ se a) o gradiente, equivalentemente a derivada (4.4.2), anula-se

$$\nabla f(p) = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad df(p) = \begin{bmatrix} f_1(p) & \dots & f_k(p) \end{bmatrix} = \mathcal{O}$$

anula-se ou b) uma das derivadas parciais $f_i(p)$ não existir.[3] O valor $f(p)$ de um ponto crítico é chamado de **valor crítico**.

(ii) Um **ponto regular** é um ponto p não crítico, ou seja $\nabla f(p)$ existe e nao anula-se. Um **valor regular** de f é um número $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que o nível $\{f = \kappa\}$ s'o contem pontos regulares (o vetor gradiente existe e é não-nulo).

Comentário 6.1.5. a) Na dimensão 2, ou maior, um ponto critico não é necessariamente um máximo ou mínimo, por exemplo pode ser um ponto de sela. b) Um máximo, ou mínimo, local num aberto é um ponto crítico.

Exemplo 6.1.6. Determine os pontos críticos de $f(x,y) := x^2+y^2-2x-6y+14$.
SOLUÇÃO. Sendo um polinômio f é diferenciável. Resta identificar os pontos (x,y) onde $f_x = 2x-2$ e $f_y = 2y-6$ se anulam. Obviamente $(x,y) = (1,3)$.

Exercício 6.1.7. Determine os valores críticos de $f(x,y) := y^2 - x^2$.

Definição 6.1.8 (Matriz Hessiana)**.** Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto U. A matriz das segundas derivadas parciais f_{ij} num ponto crítico $p \in U$ é chamado de **Hessiana**, símbolo[4]

$$\mathrm{H}^f(p) := \begin{bmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{xy}(p) & f_{yy}(p) \end{bmatrix}, \qquad df(p) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(p) = 0. \tag{6.1.1}$$

[3] se f é diferenciável em p a opção b) não acontece; veja §4.2 C
[4] pelo Teorema 3.4.3 de Schwarz sabemos que $f_{yx} = f_{xy}$ ao longo de U

Para o determinante da Hessiana usamos o símbolo

$$D := \det \mathrm{H}^f(p) = f_{xx}(p) f_{yy}(p) - f_{xy}(p)^2.$$

Chama-se um ponto crítico de **não-degenerado** se $D \neq 0$ é não-nulo.

Teorema 6.1.9 (Teste da 2a derivada num ponto crítico)**.** *Seja p um ponto crítico de uma função $f \in C^2(U)$ num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Então vale o seguinte.*

a) $D > 0$ *e* $f_{xx}(p) > 0 \Rightarrow p$ *é mínimo local estrito.*

b) $D > 0$ *e* $f_{xx}(p) < 0 \Rightarrow p$ *é máximo local estrito.*

c) $D < 0 \Rightarrow p$ *é ponto de sela.*

Comentário 6.1.10 (Caso $D = 0$ – não podemos concluir nada)**.** Um ponto crítico com $D = 0$ pode ser um máximo ($f = -x^4 - y^4$) ou um mínimo ($f = x^4 + y^4$) ou nada disso ($f = x^4 - y^4$ tipo sela enquanto $f = x^3 - y^3$ não é) .

Exercício 6.1.11. Determine os valores máximos e mínimos e os pontos de sela da função $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

Teorema 6.1.12 (Teorema do Valor Extremo)**.** *Uma função contínua com domínio compacto assume máximo e mínimo.*[5]

Autovalores

A seção "Autovalores" nao é parte do Curriculum de MA211. Para interessados listamos uns fatos da álgebra linear e reformulamos o teste da 2a derivada em termos de autovalores.

Seja $\boldsymbol{m} = (m_{ij})$ uma matriz quadrada $k \times k$ e ξ um vetor não-nulo de $\mathbb{R}^k$. Se existe um $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\boldsymbol{m}$ age em ξ como multiplicação com λ, em símbolos

$$\boldsymbol{m}\xi = \lambda\xi,$$

então λ é chamado de **autovalor** e $\xi = \xi_\lambda$ de **autovetor** correspondente a λ.

A matriz Hessiana $H = \mathrm{H}^f(p)$ em (6.1.1) admite dois autovalores reais λ_1 e λ_2 possivelmente iguais. No caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovetores correspondentes são automaticamente ortogonais $\xi_1 \perp \xi_2$. No caso $\lambda_1 = \lambda_2$ pode-se escolher dois autovetores ortogonais. Se um autovalor $\lambda < 0$ é negativo, a função decresce na direção de um autovetor correspondente ξ_λ, e cresce no caso $\lambda > 0$. O determinante D da Hessiana H iguale ao produto dos autovalores.

Dado um ponto crítico p, são equivalentes:

(a) p é não-degenerado;

(b) $D := \det \mathrm{H}^f(p) \neq 0$; $D = \lambda_1\lambda_2$

[5] em outras palavras, existem dois pontos M e m no domínio de f tal que f não tem valores maior do que $f(M)$ e f não tem valores menor do que $f(m)$

(c) ambos autovalores λ_1 e λ_2 da matriz Hessiana $\mathrm{H}^f(p)$ são não-nulos;

(d) a matriz Hessiana $\mathrm{H}^f(p)$ é invertível.

Teorema 6.1.13 (Teste da 2a derivada)**.** *Seja p um ponto crítico não-degenerado de uma função $f \in C^2(U)$ num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Os autovalores λ_1 e λ_2 da Hessiana $\mathrm{H}^f(p)$ satisfazem exatamente um dos três casos seguintes.*

a) $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow p$ *é mínimo local estrito.* *ambos positivos*

b) $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow p$ *é máximo local estrito.* *ambos negativos*

c) $\lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow p$ *é ponto de sela.* *um positivo, um negativo*