

p. III: Cálculo Vetorial

§1 Campos Vetoriais

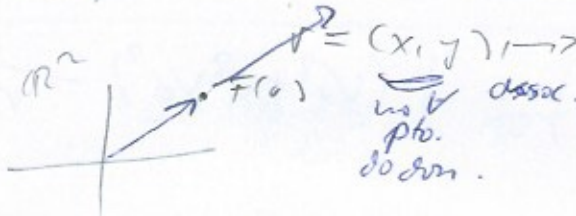
no seguinte
 v não é coord. polar!

Def.1 Uma aplicação $F: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$
 é chamado de campo vetorial (CV)

Coment.2 ($n=2$)

$$F: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$F(x, y) = \begin{pmatrix} p(x, y) \\ q(x, y) \end{pmatrix}$$

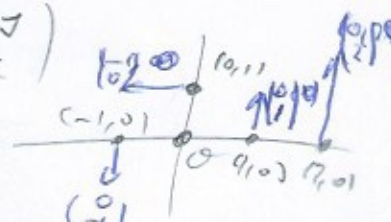
um
 vet
 $= p(x, y)e_1 + q(x, y)e_2$

para visualizar: para os eixos $F(x, y)$
 diretamente no p. v

Ex.3 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$v = (x, y) \mapsto -y e_1 + x e_2 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



R_{90} não muda
 comprimento!

$$\|v\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

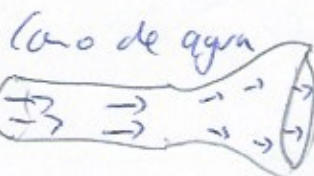
$$\|F(v)\| = \|(-y, x)\| = \sqrt{(-y)^2 + x^2}$$

Coment.4

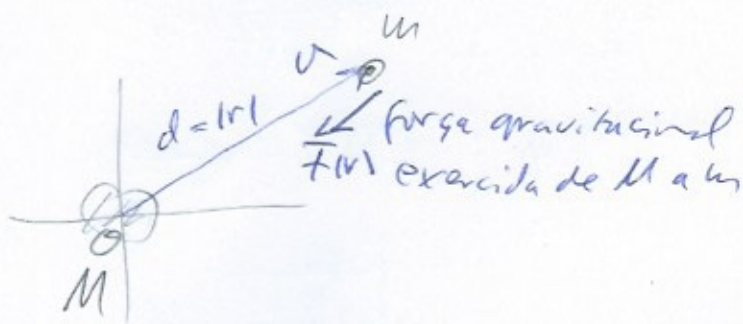
use CVs

para modelar

- velocidade
- forças
- ...



Ex.5 (Lei de Newton - gravitação)



sabe-se

intensidade da força F no pb. v = $\frac{m M G}{|r|^2}$

const. grav.

direção no pb. v : $-\frac{r}{|r|}$ vetor unitário

$$\Rightarrow F(v) = -\frac{m M G}{|v|^3} v$$

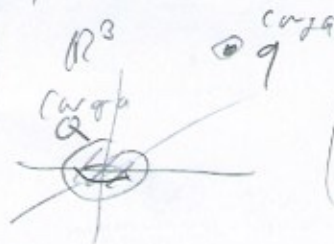
$F: \mathbb{R}^3 \setminus E \rightarrow \mathbb{R}^3$
campo gravitacional

Ex.6 (Lei de Coulomb - força elétrica)

força electr.

$$F(v) = \frac{\epsilon q Q}{|v|^3} v$$

const. electr.



$qQ > 0$ repul.
 < 0 atrac.

campo elétrico

$$E(v) := \frac{1}{q} F(v) = \frac{\epsilon Q}{|v|^3} v$$

"força por unidade q de carga"

Exc.7 Esboce os campos de vetores $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $U = (x,y) \mapsto F(u)$

a) $F(v) = v$

b) $F(v) = -v$

c) $F(x,y) = y e_2$

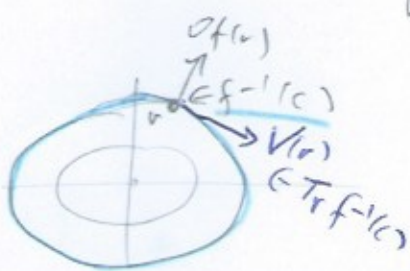
d) $F(x,y) = |x,y| e_2$

Campo Gradiente

Def. 8 Dado $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ dif.

$\leadsto \nabla f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$

$v = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_{x_1}(v), \dots, f_{x_n}(v)) =: \nabla f(v)$



$\nabla f(v) \perp T_v f^{-1}(c) \quad ;$

$\langle \nu, \nabla f(v) \rangle = D_v f(v) = 0$
 $\nu \perp$
const. ou direç. ν

Def. 9 Dado $F: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ CV.

Caso existir funç. $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$

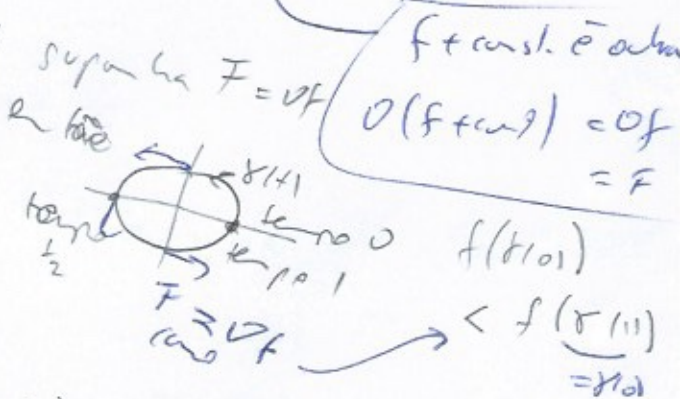
cujos gradiente $\nabla f = F$ é igual F

então chamamos F CV conservativo

F uma func. potencial

Coment. 10 Todo CV F é conservativo?? de F

Ex. 11 $F(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
 é conservativo??
NÃO!

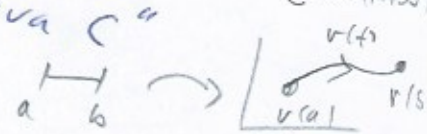


Exc. 12 Mostre que $f(x,y,z) = \frac{mm6}{(x,y,z)}$ é uma func. potencial $(x,y,z) = mm6(x,y,z)^{-1}$
 do Campo $F(x,y,z) = -\frac{mm6}{(x,y,z)^2}$

sol. $f_x = mm6 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (x,y,z)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{mm6}{(x,y,z)^3} \cdot x$
 $f_y = \dots$
 $f_z = \dots$
 $\Rightarrow \nabla f = -\frac{mm6}{(x,y,z)^3} (x,y,z)$

§2 Integrais de linha

melhor: III §2-4 (15)
 de curva C^n $C = \text{diff}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$



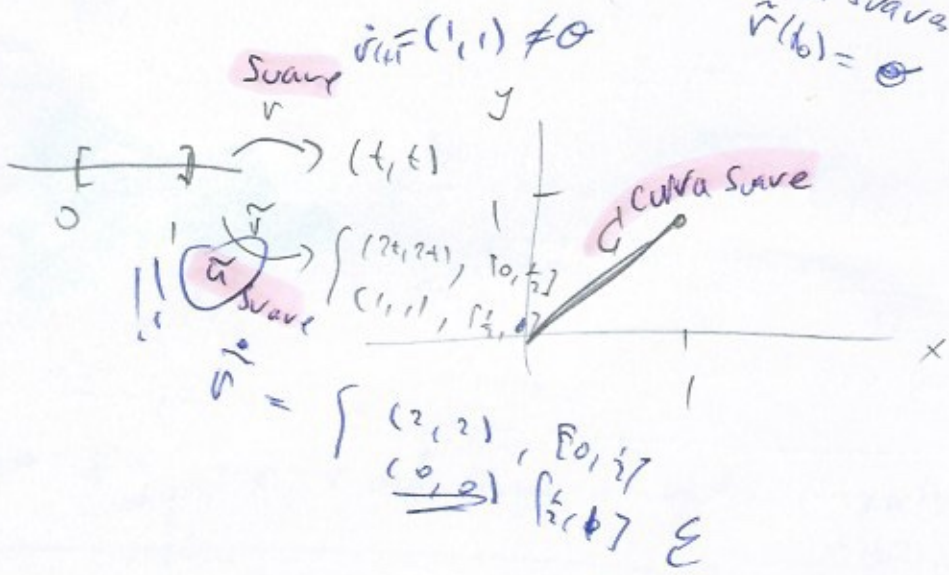
Def.1 a) Uma aplicação contínua $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada de uma curva parametrizada e $C := \text{Im}(v) := \{v(t) \mid t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$ é a curva a qual é parametrizada por v .

b) Caso $v \in C^1$ e $v'(t) := \frac{d}{dt} v(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$ então v é chamado de suave e C de curva suave.

(pode se parametrizar suave.)
 $v'(t_0) = 0$

não pode se image de uma c.p. suave

Ex.2



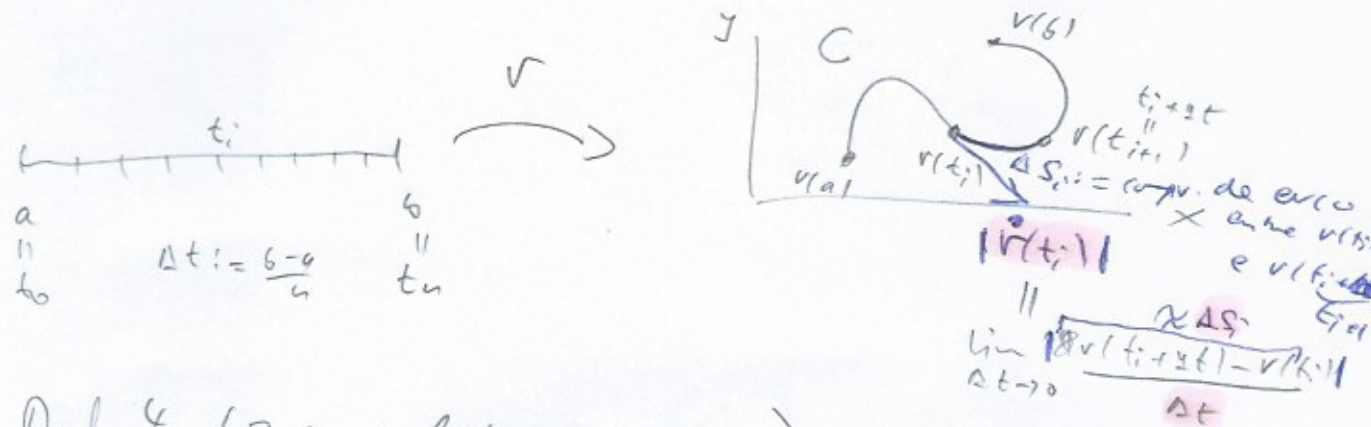
Def.3 Um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ chamada de curva suave $\Leftrightarrow \exists$ uma curva parametr. suave v cuja image é C . ($\text{Im}(v) = C$).

A) Integral linha de $f(x,y)$ ao longo C em resp. S

Dado \bullet curva suave $C \subset \mathbb{R}^2$
 $\bullet f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{D} \xrightarrow{C} \mathbb{R}$ tg. $\mathbb{D} \supset G$



então: $C = \text{Im}(v)$ para um $v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $v'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$



Def. 4 (Integral linha em resp. S)

Área da Superf. entre $C \subset \mathbb{R}^2$ e gr $f|_C$

$\int_C f(x,y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(v(t_i)) \cdot \Delta S_i$

onde $\Delta S_i \approx ||v'(t_i)|| \Delta t$

caso exista $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(v(t_i)) \cdot ||v'(t_i)|| \Delta t$

caso $f \in C^0$ e v def. num intervalo compacto (fechado e limitado) distribuição de $C = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

Teor. 5

$(x,y) = \sigma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\text{Im}(\sigma) = C \subset \mathbb{D}$

$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$

prática

integr. de fun. de 2 var.!

Exc. 6 Mostra indep. da curva parametrizada suave v repr. C ($\text{Im } v = C$) \rightarrow indep. da orientação!

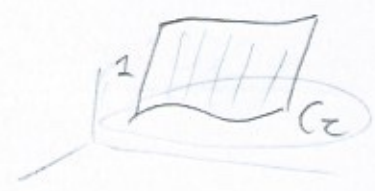
[Dica: fórmula mudança de variável]

Cor. 7 Dado $v: [a, b] \xrightarrow{C'} \mathbb{R}^2$, $v(t) \neq 0 \forall t$

(Comprimento de arco $S(z)$)
 $S(z) = \int_{C_2} 1 ds$
 $C_2 = \gamma \circ v^{-1}([a, z])$
 $\int_a^z 1 \cdot |v(t)| dt$

\bar{s} é o comprimento da curva C entre $v(a)$ e $v(z)$

Pr $\int_{C_2} 1 ds$



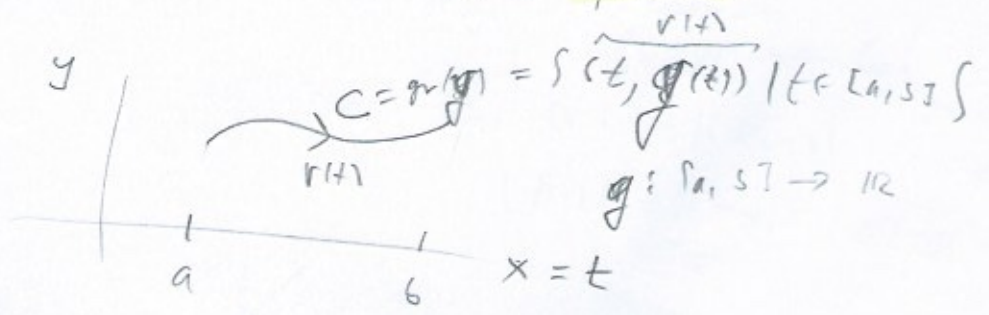
$= \text{área (entre } C_2 \text{ e } \gamma f|_{C_2})$

$= 1 \cdot \text{compr. } (C_2)$

Obs. 8 $S'(z) = |v'(z)|$ ou TFC

Def. 9 $L(C) := \int_a^b |v'(t)| dt$
 (Comprimento da curva sobre C entre

Coment. 10 caso $C \subset \mathbb{R}^2$ é um gráfico



$L(C) = \int_a^b \underbrace{|v'(t)|}_{(1, g'(t))} dt = \int_a^b \sqrt{1 + g'(t)^2} dt$

$\int \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} = \text{área } (S = \gamma(t))$