Lista 1d - Regra de Cadeia, TFI, Derivada Direcional, Vetor Gradiente

Lista 1d

MA211
2023-1

Regra de Cadeia

(TFI) Teorema da Função Implícita

Derivada Direcional $D_v f$

Vetor Gradiente ∇f

Regra de Cadeia

14.5

Exc.1 Sejam $z = f(x,y) := \sqrt{1+x^2+y^2}$, 3

$x = g(t) := \ln t$, $y = h(t) := \cos t$.

Calcule a derivada $z'(t)$ de z como função de t.

Exc.2 Acha $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$ no caso 9

$z = f(\theta, \phi) := \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \phi$

$\theta = g(s,t) := st^2$ $\quad$ θ "theta"

$\phi = h(s,t) := s^2 t$ $\quad$ ϕ "phi"

13

Exc.3 Suponha $z = f(x,y)$, f diferenciável,

$x = g(t)$	$y = h(t)$
$g(3) = 2$	$h(3) = 7$
$g'(3) = 5$	$h'(3) = -4$
$f_x(2,7) = 6$	$f_y(2,7) = -8$.

Determine $z'(t)$ para $t = 3$.

Exc. 4 Seja $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + ve^w$. 14.5 21

Determine $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$

quando $u = 2$, $v = 1$, $w = 0$.

TFI

Exc. 5 Suponha a eq. $e^z = xyz$ 33

determine $z = f(x,y)$ como

função de x e y.

Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Exc. 6 Mostre que uma função da forma 49

$$z = f(x+at) + g(x-at)$$

resolve a

(eq. da onda) $$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

[Dica: $u := x + at$, $v := x - at$]

Funções homogêneas de grau n

Def. 7 Uma função $f(x,y)$ é **homogênea de n-ésimo grau**

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{a) } f(tx,ty) = t^n f(x,y) \quad \forall t \\ \quad \text{onde } n \in \mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\} \\ \text{b) } f \text{ tem derivs. parcs. de} \\ \quad 2^a \text{ ordem contínuas} \end{cases}$$

Exc. 8 Verifique se $f(x,y) := x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ é homog. de grau 3.

Exc. 9 Mostre:

f homog. de grau $n \Rightarrow x f_x + y f_y = n f(x,y)$

[Dica: Regra de cad. para derivar a função $t \mapsto f(tx,ty)$.]

Note

Derivada direcional $D_v f$ e vetor gradiente ∇f

Seja $f : \mathbb{R}^n \supset \overset{\text{aberto}}{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ dif. em $a \in U$

então o vetor gradiente de f no ponto a é o vetor cujos componentes são as derivadas parciais de f em a:

$$\nabla f(a) := \begin{pmatrix} f_{x_1}(a) \\ f_{x_2}(a) \\ \vdots \\ f_{x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

e a derivada direcional de f em $a \in U$ na direção de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é

$$D_v f(p) := \nabla f(p) \cdot v \quad \in \mathbb{R}.$$

produto escalar de dois elementos de $\mathbb{R}^n$

Obs. $D_{\lambda v} f(p) = \lambda D_v f(p) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$D_{v+w} f(p) = D_v f(p) + D_w f(p) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$

"Linearidade na direção"

A taxa de variação de f em $p \in U$ na direção de um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq (0, \dots, 0)$ é a deriv. direc. de f em p na direção do vetor unitário $\hat{v} := \frac{1}{|v|} v$

$$D_{\hat{v}} f(p) \in \mathbb{R}.$$

Teor. O máx. da taxa de var. de uma função dif. f num ponto p é $|\nabla f(p)|$ e occore na direção do vetor gradiente $w = \nabla f(p)$:

$$\max_{\substack{v \in \mathbb{R}^n \\ |v| = 1}} D_v f(p) = |\nabla f(p)|$$

$$= D_{\hat{w}} f(p)$$

Planos tangentes a superfícies de nível

Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dif.

e $K \in \mathbb{R}$ t.q. $\nabla F(p) \neq (0,0,0)$

no todo ponto p da superfície de nível K

$$\Sigma := \{F(x,y,z) = K\}$$
$$:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = K\} =: F^{-1}(K)$$

"pre-imagem" de K sob F

Seja $p \in \Sigma$ então

$$T_p\Sigma = T_p\{F = K\}$$
$$:= \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \nabla F(p) \cdot (q-p) = 0\}$$

"plano tangente a Σ em p"

$$\hat{N}_p := \frac{1}{|\nabla F(p)|} \nabla F(p)$$ "o vetor normal"

$$R_p := \{p + \mu N_p \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$ "a reta normal a Σ passando p"

Exc. 10 Determine a deriv. direc. 14.6 5
de $f(x,y) = y\,e^{-x}$ em $p = (0,4)$
na direção indicada pelo ângulo $\theta = 2\pi/3$.

Exc. 11 Seja $f(x,y,z) = x\,e^{2yz}$, 9
$p = (3,0,2)$ e $v = \frac{1}{3}(2,-2,1)$.

a) Determine o gradiente de f.

b) Calcule " " " " em p.

c) Determine a taxa de var. de f em p na direção do vetor v.

Exc. 12 Determine $D_v f(p)$ para 15
$f(x,y,z) = x e^y + y e^z + z e^x$,
$p = (0,0,0)$, $v = (5,1,-2)$.

Exc. 13 Determine a taxa de var. máxima
de $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ em $p = (3,6,-2)$ 25
e a direção em que isso ocorre.

Exc. 14 Seja $\Sigma = \{ xyz^2 = 6 \} \subset \mathbb{R}^3$ 43
e $p = (3, 2, 1)$.

a) Encontre uma eq. de $T_p\Sigma$.

b) " a reta normal R_p

Exc. 15 Onde a reta normal R_p 59
à parabola $S = \{ z = x^2 + y^2 \} \subset \mathbb{R}^3$
no ponto $p = (1, 1, 2)$ intercepta
S uma segunda vez?