

Werk

Titel: Commentarii Mathematici Helvetici

Verlag: Birkhäuser

Jahr: 1940/41

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN358147735_0013

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN358147735_0013

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN358147735

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN358147735>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

COMMENTARII MATHEMATICI HELVETICI

VOLUMEN **13**
MCMXL/XLI

EDITI
SOCIETATE MATHEMATICA
HELVETICA IN AEDIBUS
ORELL FÜSSLI TURICI

Universitätsbibliothek
Göttingen

741.4442

INHALTSVERZEICHNIS

TABLE DES MATIÈRES

INDICE

	Seite - page pagina
<i>Alexits, Georges</i> , Les espaces réguliers et le problème de métrisation	1
<i>Blanc, Charles</i> , Les réseaux Riemanniens	54
<i>Egerváry, Eugène</i> , et <i>Alexits, Georges</i> , Fondements d'une théorie générale de la courbure linéaire	257
<i>Feldheim, E.</i> , Une propriété caractéristique des polynômes de Laguerre	6
<i>Fiala, F.</i> , Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive	293
<i>Fleckenstein, J. O.</i> , Notiz zur Lagrangeschen Lösung des Keplerschen Problems	83
<i>Hadwiger, H.</i> , Über ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope	90
<i>Hadwiger, H.</i> , Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate	195
<i>Hadwiger, H.</i> , Über Parallelinvarianten bei Eibereichen	252
<i>Hopf, Heinz</i> , Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen	119
<i>Hopf, Heinz</i> , Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra	219
<i>Hopf, H.</i> und <i>Samelson, H.</i> , Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen	240
<i>Humbert Pierre</i> , Note relative à l'article: Sur les nombres de classes de certains corps quadratiques	67
<i>de Kerékjártó, B.</i> , Nouvelle méthode d'édifier la géométrie plane de Bolyai et de Lobatchefski	11
<i>de Kerékjártó, B.</i> , Sur le groupe des homographies et des antihomographies d'une variable complexe	68
<i>Kollros, Louis</i> , Une propriété des variétés du second ordre	108
<i>Merz, K.</i> , Heptaeder aus verschiedenen Netzen	49
<i>Ostrowski, Alexandre</i> , Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions. I.	156
<i>Pfluger, A.</i> , Konforme Abbildung und eine Verallgemeinerung der Jensenschen Formel.	284
<i>Pontrjagin, L.</i> , Über die topologische Struktur der Lieschen Gruppen	277
<i>Samelson, Hans</i> , Über die Sphären, die als Gruppenräume auftreten	144
<i>Stiefel, Eduard</i> , Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra	201

Les espaces réguliers et le problème de métrisation

Par GEORGES ALEXITS, Budapest

1. Un espace à écart symétrique est un ensemble dont les points d'accumulation sont définis par l'intermédiaire d'un écart assujéti aux conditions suivantes :

- 1° $pq = qp \geq 0$;
- 2° $pq = 0$ équivaut à $p = q$.

Nous appelons *espace semi-distancié* un espace à écart symétrique qui est en même temps un espace topologique de M. Hausdorff. Un espace semi-distancié s'appelle *espace distancié*, si l'écart pq satisfait aussi à l'inégalité triangulaire

$$3^\circ \quad pq + qr \geq pr .$$

Le problème de métrisation consiste à trouver des conditions auxquelles un espace de Hausdorff doit satisfaire pour être homéomorphe avec un espace distancié. Il est évident qu'un tel espace métrisable E est à caractère dénombrable, c'est-à-dire que la famille originelle des voisinages d'un point arbitraire p de E contient une infinité dénombrable de voisinages $V_1(p), V_2(p), \dots, V_n(p), \dots$ de sorte que

$$V_{n+1}(p) \subset V_n(p) \quad \text{et} \quad \prod_{n=1}^{\infty} V_n(p) = (p) .$$

Une autre condition évidemment nécessaire est la régularité de E . Cette expression signifie, pour un espace à caractère dénombrable, que la suite alternante des voisinages $V_n(p)$ et de leurs fermetures $\overline{V_n(p)}$ est monotone; en autres termes, l'espace E est *régulier*, lorsque

$$\overline{V_{n+1}(p)} \subset V_n(p) .$$

2. Le problème de métrisation des espaces réguliers a été résolu, grâce à un théorème de M. Tychonoff¹⁾, par P. Urysohn²⁾ sous la condition supplémentaire que l'espace régulier E soit *parfaitement séparable*. On entend par cette expression : non seulement les voisinages des points

¹⁾ A. Tychonoff, Math. Ann. 95 (1925), p. 139 — 142.

²⁾ P. Urysohn, Math. Ann. 94 (1925), p. 309 — 315.

individuels de E forment une infinité dénombrable, comme dans le cas des espaces à caractère dénombrable, mais aussi la famille de *tous* les voisinages de E est dénombrable. Cette condition restrictive intervient explicitement aussi dans la métrisation des espaces compacts; problème résolu par le même auteur³). Si E est semi-distancié, l'introduction explicite de cette condition est superflue, car M. Niemytzki⁴) a démontré que tout espace semi-distancié compact est homéomorphe avec un espace distancié. Dans ce qui suit, nous allons voir que les points d'accumulation des espaces réguliers à caractère dénombrable se laissent définir par l'intermédiaire d'un écart symétrique d'où nous tirerons immédiatement le théorème qu'un espace compact et à caractère dénombrable est homéomorphe avec un espace distancié. Dans ce théorème, la condition de séparabilité parfaite n'intervient pas explicitement; notre théorème surpasse donc en généralité le théorème correspondant de Urysohn. Nous donnerons enfin, à titre d'application de notre méthode, une démonstration simple d'un théorème de métrisation dû à M^{me} Frink⁵).

3. *Tout espace E à caractère dénombrable et régulier est homéomorphe avec un espace semi-distancié.*

Etant donnés deux points arbitraires p et q de E , envisageons tous les voisinages $V_n(p)$ et $V_n(q)$ pour lesquels $V_n(p) \cdot V_n(q) = 0$. Désignons par $n_{p,q}$ le plus petit indice n pour lequel cette relation a lieu. Nous définissons l'écart pq des points p et q par la relation

$$pq = \frac{1}{n_{p,q}} .$$

Il est évident que pq satisfait aux conditions 1^o et 2^o. Désignons par E^* l'espace dont les points d'accumulation sont définis par l'intermédiaire de l'écart pq . A étant un sous-ensemble de l'espace E , nous désignerons par A^* le sous-ensemble de E^* correspondant à l'ensemble A . Nous avons à démontrer que les points d'accumulation d'un ensemble arbitraire $A \subset E$ sont identiques avec les points d'accumulation de l'ensemble correspondant $A^* \subset E^*$. Soit donc p un point d'accumulation de A . Tout voisinage $V_n(p)$ contient un point $p_n \in A$ différent de p , donc $V_n(p) \cdot V_n(p_n) \neq 0$; par suite $pp_n < 1/n$, c'est-à-dire p est un point d'accumulation de A^* . Si, au contraire, p est un point d'accumulation de l'ensemble A^* , il existe pour tout $k = 1, 2, \dots$ un point $p_k \in A^*$ différent

³) P. Urysohn, Math. Ann. 92 (1924), p. 275 — 293.

⁴) V. Niemytzki, Math. Ann. 104 (1934), p. 666 — 671.

⁵) A. H. Frink, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), p. 133 — 142.

de p de sorte que $pp_k < 1/k$. S'il existait un entier fixe n tel que p_k soit pour tout $k = 1, 2, \dots$ un point de $E - V_n(p)$, alors p_k serait a fortiori situé, en vertu de la régularité de E , dans l'ensemble $E - \overline{V_{n+1}(p)}$. L'ensemble $E - \overline{V_{n+1}(p)}$ étant ouvert, on peut déterminer un entier k_n tel que $V_{k_n}(p) \subset E - \overline{V_{n+1}(p)}$. Il en résulterait

$$V_{k_n}(p) \cdot V_{k_n}(p_k) \subset V_n(p) \cdot V_{k_n}(p_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

par conséquent $pp_k \geq 1/k_n$, contrairement à notre hypothèse $pp_k < 1/k$. La relation $p_k \in E - V_n(p)$ nous a conduit à une contradiction. Il existe donc pour tout indice n un entier i_n de sorte que, pp_k étant $< 1/i_n$, on ait $p_k \in V_n(p)$, c'est-à-dire tout point d'accumulation p de A^* est aussi un point d'accumulation de A ; ce qui achève la démonstration.

4. Dans un espace E à caractère dénombrable et régulier, tout ensemble fermé est le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts.

Introduisons, en vertu du théorème précédent, l'écart pq pour définir les points d'accumulation de E . Alors, la proposition de notre théorème revient à une proposition que l'auteur a démontrée ailleurs⁶⁾ et d'après laquelle tout ensemble fermé F d'un espace semi-distancié est le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts. Voilà la démonstration. En désignant par $S(p, 1/n)$ l'ensemble de tous les points $q \in E$ tels que $pq < 1/n$, il existe un voisinage $V_{k_n}(p) \subset S(p, 1/n)$. Posons

$$G_n = \sum_{p \in F} V_{k_n}(p).$$

G_n étant la somme des ensembles ouverts $V_{k_n}(p)$, il est lui-même ouvert. Soit q un point du produit des ensembles G_n , ($n = 1, 2, \dots$). Alors, il existe pour tout $n = 1, 2, \dots$ un point $q_n \in F$ tel que $qq_n < 1/n$. L'écart qq_n tend, par conséquent, vers zéro, q est donc un point d'accumulation de l'ensemble F . Or, F étant fermé, il contient tous ses points d'accumulation. Le point arbitraire q du produit $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$ est donc un point de F , c'est-à-dire que

$$\prod_{n=1}^{\infty} G_n \subset F.$$

Mais, on a par définition $F \subset \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, par conséquent $F = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$; c. q. f. d.

5. Un espace de Hausdorff E compact et à caractère dénombrable est homéomorphe avec un espace distancié.

⁶⁾ G. Alexits, C. R. Soc. Sci. Lett. Varsovie 81 (1938), p. 36—42.

Puisqu'un espace régulier à caractère dénombrable est, d'après 3, homéomorphe avec un espace semi-distancié et tout espace semi-distancié compact est, en vertu du théorème précité de M. Niemytzki, homéomorphe avec un espace distancié, nous n'avons qu'à démontrer que notre espace E est régulier. Admettons le contraire et nous en déduisons une contradiction. En effet, si E n'est pas régulier, il existe un entier n tel qu'on puisse déterminer pour tout $k = 1, 2, \dots$ un point

$$q_k \in \overline{V_k(p)} \cdot (E - V_n(p)). \quad (1)$$

E étant compact, on peut extraire de la suite $\{q_k\}$ une suite partielle $\{q_{i_k}\}$ convergente vers un point-limite q . Soit $V_m(q)$ un voisinage arbitraire de q et choisissons i_k de sorte que $q_{i_k} \in V_m(q)$. Alors, il existe un entier j_k tel que

$$V_{j_k}(q_{i_k}) \subset V_m(q). \quad (2)$$

Or q_{i_k} est, d'après (1), un point de $\overline{V_{i_k}(p)}$, le voisinage $V_{j_k}(q_{i_k})$ contient par suite un point p_k de $V_{i_k}(p)$ d'où on obtient, d'après (2), que p_k est un point de $V_m(q)$. Comme $V_m(q)$ est un voisinage arbitraire de q , il s'ensuit que q est un point d'accumulation de la suite $\{p_k\}$. Mais, p_k étant un point de $V_{i_k}(p)$, la suite $\{p_k\}$ tend vers p . On a donc à la fois $p_k \rightarrow p$ et $p_k \rightarrow q$, ce qui équivaut à $p = q$. Or, q étant, d'après (1), un point d'accumulation de l'ensemble fermé $E - V_n(p)$, on a $q \in E - V_n(p)$, contrairement à la relation justement démontrée $p = q$. Cette contradiction prouve que E est un espace régulier, c. q. f. d.

6. Nous allons encore démontrer que le théorème mentionné de M^{me} Frink se laisse ramener au théorème suivant de M. Niemytzki⁷⁾: S'il existe, dans un espace semi-distancié E , une fonction $\varphi(p, \varepsilon)$ de sorte que, les relations $pq < \varphi(p, \varepsilon)$ et $qr < \varphi(p, \varepsilon)$ ayant lieu, on ait $pr < \varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$, alors E est homéomorphe avec un espace distancié. Voici le théorème de M^{me} Frink:

Pour qu'un espace de Hausdorff E soit homéomorphe avec un espace distancié, il faut et il suffit que E soit à caractère dénombrable et qu'il existe, pour tout point p et tout entier n , un entier $k_n = k(p, n)$ tel que, la relation $V_{k_n}(p) \cdot V_{k_n}(q) \neq 0$ ayant lieu, on ait $V_{k_n}(q) \subset V_n(p)$.

La nécessité de cette condition est, comme l'a démontré M^{me} Frink, une conséquence immédiate de la métrisabilité de E . Quant à sa suffisance,

⁷⁾ V. W. Niemytzki, Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), p. 507 — 513.

soit q un point arbitraire de $\overline{V_{k_n}(p)}$; alors $V_{k_n}(p) \cdot V_{k_n}(q) \neq 0$, par conséquent $V_{k_n}(q) \subset V_n(p)$. On a donc

$$\overline{V_{k_n}(p)} \subset \sum_{(q)} V_{k_n}(q) \subset V_n(p).$$

E est par suite un espace régulier, nous y pouvons donc introduire l'écart pq que nous avons défini au no. 3. Choisissons maintenant n de sorte que $1/n < \varepsilon$, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$. Alors, si $pq < 1/k_n$ et $qr < 1/k_n$, il résulte de la définition de l'écart pq que $V_{k_n}(p) \cdot V_{k_n}(q) \neq 0$ et $V_{k_n}(q) \cdot V_{k_n}(r) \neq 0$. On en tire $V_{k_n}(q) \subset V_n(q)$, par conséquent

$$V_n(p) \cdot V_n(r) \supset V_n(p) \cdot V_{k_n}(r) \supset V_{k_n}(q) \cdot V_{k_n}(r) \neq 0.$$

Cette relation équivaut, grâce à la définition de l'écart pr , à l'inégalité $pr < 1/n < \varepsilon$. En posant donc $\varphi(p, \varepsilon) = k_n$, nous avons défini une fonction satisfaisant aux conditions de M. Niemytzki, ce qui était justement notre but.

(Reçu le 12 avril 1940.)

Une propriété caractéristique des polynômes de Laguerre

Par E. FELDHEIM, Budapest

On sait que les polynômes de Laguerre¹⁾

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^k}{k!} \quad (R\alpha > -1) \quad (1)$$

satisfont à la relation de multiplication

$$\lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^n (\lambda - 1)^{n-k} \binom{n+\alpha}{n-k} L_k^{(\alpha)}(x), \quad (2)$$

λ étant un facteur arbitraire.

Cette relation forme un cas particulier de la relation de multiplication établie, pour les fonctions de Whittaker, dans un travail de *M. A. Erdélyi*²⁾; explicitement, elle figure dans une Note récente du même auteur³⁾, et dans un de nos travaux actuellement sous presse⁴⁾.

Nous nous proposons de chercher, dans la présente Note, tous les polynômes possédant une relation de multiplication de forme semblable, et de déterminer, parmi ces polynômes ceux qui forment un système orthogonal.

Considérons donc le système de polynômes

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{nk} x^k \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

et cherchons à déterminer les coefficients a_{nk} de manière que ces polynômes admettent la relation de multiplication

$$\lambda^n \Phi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^n A_{nk} (\lambda - 1)^{n-k} \Phi_k(x), \quad (4)$$

1) Si α n'est pas entier, on remplace, comme il est d'usage, le coefficient $\binom{n+\alpha}{n-k}$ par $\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-k)! \Gamma(k+\alpha+1)}$.

2) *A. Erdélyi*, Funktionalrelationen mit konfluenten hypergeometrischen Funktionen. *Math. Zeitschrift*. t. 42. 1936, p. 125—143.

3) *A. Erdélyi*, On certain Hankel Transforms, *Quarterly Journal of Math.* t. 9. 1938, p. 196—198, paru au mois de Septembre 1938.

4) *E. Feldheim*, Formules d'inversion et autres relations pour les polynômes orthogonaux classiques. *Bull. Soc. Math. de France*, sous presse.

λ étant quelconque, et les coefficients A_{nk} étant encore inconnus. Or, de (3),

$$\lambda^n \Phi_n \left(\frac{x}{\lambda} \right) = \sum_{k=0}^n a_{nk} \lambda^{n-k} x^k ,$$

d'où, moyennant la relation

$$\lambda^{n-k} = \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n-k}{r} (\lambda - 1)^r ,$$

on tire

$$\lambda^n \Phi_n \left(\frac{x}{\lambda} \right) = \sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{n-r} a_{nk} \binom{n-k}{r} (\lambda - 1)^r x^k . \quad (5)$$

En confrontant cette relation à (4), on aura

$$A_{n,n-r} \Phi_{n-r}(x) = \sum_{k=0}^{n-r} a_{rk} \binom{n-k}{r} x^k ,$$

et, faisant usage de (3),

$$\binom{n-k}{n-s} a_{nk} = A_{ns} a_{sk} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, s; s = 0, 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6)$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(n-s)! A_{ns} = \frac{(n-k)! a_{nk}}{(s-k)! a_{sk}} . \quad (7)$$

Nous voyons que le second membre de (7) doit être indépendant de k , ce qui n'est possible que si l'on a

$$(n-k)! a_{nk} = b_n c_k ,$$

c'est-à-dire

$$a_{nk} = \frac{b_n c_k}{(n-k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Alors, de (7),

$$A_{ns} = \frac{b_n}{b_s \cdot (n-s)!} \quad (s = 0, 1, 2, \dots, n) .$$

En résumé, les polynômes

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{b_n c_k}{(n-k)!} x^k \quad (8)$$

possèdent la relation de multiplication

$$\lambda^n \Phi_n \left(\frac{x}{\lambda} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{b_n}{b_k (n-k)!} (\lambda-1)^{n-k} \Phi_k(x), \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

et ce sont les seuls polynômes admettant cette propriété.

Si l'on fait tendre, dans (9), le paramètre λ vers 0, on trouve la formule d'inversion des polynômes (8) :

$$x^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{c_n b_k (n-k)!} \Phi_k(x). \quad (10)$$

Si nous posons ici

$$\Phi_n(x) = b_n \omega_n(x), \quad (8')$$

la relation (9) prend la forme

$$\lambda^n \omega_n \left(\frac{x}{\lambda} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda-1)^{n-k}}{(n-k)!} \omega_k(x), \quad (9')$$

et nous voyons que les coefficients de ce développement sont parfaitement définis en tant qu'ils ne dépendent d'aucun facteur arbitraire. On peut en déduire, par des passages à la limite $\lambda \rightarrow \infty$ et $\lambda = 0$, les expressions inverses de $\omega_n(x)$ et x^n .⁵⁾

Passons maintenant à la recherche des polynômes $\Phi_n(x)$ ou $\omega_n(x)$ satisfaisant à (8), (9), et (8'), (9'), qui forment un système orthogonal.

Rappelons que si les polynômes $\omega_n(x)$ forment un système orthogonal, ils doivent vérifier une relation de récurrence de la forme

$$x \omega_n(x) = A_n \omega_{n+1}(x) + B_n \omega_n(x) + C_n \omega_{n-1}(x), \quad (11)$$

où, moyennant (8) et (8'), les coefficients A_n , B_n et C_n ont la valeur

$$A_n = \frac{c_n}{c_{n+1}}, \quad B_n = A_{n-1} - A_n, \quad C_n = \frac{1}{2} (B_{n-1} - B_n). \quad (12)$$

La formule (11) entraîne, entre les coefficients du développement (8'), la relation

$$\frac{c_{k-1}}{c_k} = A_{k-1} = A_n + (n-k+1) B_n + (n-k+1)(n-k) C_n, \quad (k=0, 1, 2, \dots, n+1). \quad (13)$$

On en tire

⁵⁾ Si l'on fait, dans (4), $\frac{x}{\lambda} = y$, et $\lambda \rightarrow \infty$, on trouve, eu égard à (3), la relation: $A_{nk} a_{kk} = a_{nk}$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$). Les A_{nk} seront liés par la relation $\binom{n-k}{n-s} A_{nk} = A_{ns} A_{sk}$ ($k=0, 1, 2, \dots, s; s=0, 1, 2, \dots, n$), identique à (6).

$$A_{k-1} - 2A_k + A_{k+1} = B_k - B_{k+1} = 2C_n = B_{n-1} - B_n$$

$$(k=0, 1, 2, \dots, n; n=0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Cette relation n'est possible que si les deux membres sont des constantes indépendantes des indices k et n , que nous appelons 2ρ . Alors

$$C_n = \rho, \quad B_n = B_0 - 2n\rho = -(A_0 + 2n\rho),$$

d'où encore

$$A_n = (n+1)(A_0 + n\rho).$$

La relation (11) prend ainsi la forme

$$x\omega_n(x) = (n+1)(A_0 + n\rho)\omega_{n+1}(x) - (A_0 + 2n\rho)\omega_n(x) + \rho\omega_{n-1}(x). \quad (11')$$

D'autre part, comme

$$A_n = \frac{c_n}{c_{n+1}} = \rho(n+1) \left(n + \frac{A_0}{\rho} \right),$$

on en tire l'expression suivante des coefficients c_k :

$$c_k = \frac{c_0 \Gamma\left(\frac{A_0}{\rho}\right)}{\rho^k k! \Gamma\left(\frac{A_0}{\rho} + k\right)} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

Ensuite, si l'on écrit

$$\int_a^b \omega_n^2(x) p(x) dx = S_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

(a, b) étant l'intervalle d'orthogonalité, et $p(x)$ la fonction-poids, on déduit de (11') l'expression

$$S_n = \rho^n c_n = \frac{S_0 \Gamma\left(\frac{A_0}{\rho}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{A_0}{\rho} + n\right)} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Si nous posons finalement

$$\frac{A_0}{\rho} = \alpha + 1 \quad (R\alpha > -1)$$

nous trouvons que le polynôme satisfaisant à notre problème est :

$$\omega_n(x) = c_0 \Gamma(\alpha + 1) \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)! \Gamma(k + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{\rho}\right)^k, \quad (16)$$

ρ étant un paramètre arbitraire. En comparant à l'expression (1) des polynômes de Laguerre, nous voyons que

$$\omega_n(x) = \frac{\Phi_n(x)}{b_n} = \frac{c_0 \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1)} L_n^{(\alpha)}\left(-\frac{x}{\rho}\right). \quad (17)$$

Le seul polynôme orthogonal vérifiant la relation de multiplication (4) est donc, à un facteur constant, et un changement d'unité près, le polynôme de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$, donné par le développement (1).

On reconnaît aussi, dans (11'), la relation de récurrence bien connue liant trois polynômes de Laguerre consécutifs.

Remarquons que les polynômes d'Hermite classiques, étant des cas particuliers (pour $\alpha = \pm \frac{1}{2}$) des polynômes de Laguerre, vérifient une relation de multiplication de forme analogue à (4). En effet, tenant compte des relations connues :

$$H_{2n}(x) = (-1)^n n! 2^{2n} L_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2), \quad H_{2n+1}(x) = (-1)^n n! 2^{2n+1} x L_n^{(\frac{1}{2})}(x^2),$$

on déduit de (2), que ⁶⁾

$$\lambda^n H_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (1 - \lambda^2)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} H_{n-2k}(x). \quad 7)$$

⁶⁾ Voir, pour cette formule, les travaux cités sous 2), ⁸⁾ et 4).

⁷⁾ En général, on aura la relation de multiplication

$$\lambda^n \Phi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^n g_{n-k}(\lambda - 1) \Phi_k(x),$$

où $g_{n-k}(\lambda - 1)$ est un polynôme de degré $n - k$ en $\lambda - 1$: $g_{n-k} = \sum_{r=0}^{n-k} A_r (\lambda - 1)^r$, et les coefficients A_r ont pour valeur : $A_r = \sum_{s=k}^{n-r} a_{ns} b_{sk} \binom{n-s}{r}$. Ici a_{ns} et b_{ns} désignent respectivement les coefficients du développement (3), et de son inversion :

$$x^n = \sum_{s=0}^n b_{ns} \Phi_s(x).$$

(Reçu le 7 mai 1940.)

Nouvelle méthode d'édifier la géométrie plane de Bolyai et de Lobatchefski

Par B. de KERÉKJÁRTÓ, Budapest

INTRODUCTION

Dans le présent mémoire, je donne une nouvelle méthode d'édifier la géométrie hyperbolique plane de *Bolyai* et de *Lobatchefski*. Le système d'axiomes que je prends à la base de mon traitement est équivalent à celui adopté par M. *Hilbert* dans son mémoire: „*Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewskischen Geometrie*“⁽¹⁾ sauf que je ne considère pas la notion d'égalité des angles comme notion primaire, mais je la définis au moyen de l'égalité de segments.

Mon traitement du problème diffère essentiellement de celui de M. *Hilbert* et correspond plutôt au programme réalisé par M. *Hessenberg* pour la géométrie elliptique plane⁽²⁾. L'avantage de cette méthode consiste en ce qu'elle fait connaître plus profondément les relations mutuelles entre les géométries euclidienne et hyperbolique.

L'idée guide de mon raisonnement est la suivante. Voici le modèle de la géométrie hyperbolique plane dû à *Poincaré*. Nous entendons par plan hyperbolique le demi-plan euclidien déterminé par une ligne droite l ; les droites hyperboliques y sont représentées par les demi-droites et demi-circonférences euclidiennes perpendiculaires sur l . La distance hyperbolique de deux points P et Q est le logarithme du rapport anharmonique:

$$(PQQ'P') = \frac{PQ' \cdot QP'}{PP' \cdot QQ'}$$

où P' et Q' désignent les points communs de l avec la circonférence perpendiculaire sur l , passant par les points P et Q ; ou, si P et Q se trouvent sur une droite perpendiculaire sur l , la distance hyperbolique des points P et Q est le logarithme du rapport

$$(PQQ') = \frac{PQ'}{QQ'}$$

où Q' désigne le point commun de cette droite avec l . De cette façon, nous avons obtenu un modèle dont on peut démontrer par le moyen des

¹⁾ *D. Hilbert*: Grundlagen der Geometrie, Leipzig et Berlin (1930), 7^{me} éd. Anhang III.

²⁾ *G. Hessenberg*: Begründung der elliptischen Geometrie. Mathem. Annalen, t. 61.

théorèmes élémentaires de la géométrie euclidienne qu'il satisfait aux axiomes de la géométrie hyperbolique.

Ce modèle sert seulement pour vérifier l'existence de la géométrie hyperbolique; il n'est pourtant pas certain que toute géométrie hyperbolique plane, définie par un système d'axiomes, est équivalente à la géométrie réalisée par ce modèle.

Dans le présent mémoire, je donne la réponse affirmative à cette question. A partir de la géométrie hyperbolique plane définie par un système d'axiomes, j'établis un modèle dont je vérifie qu'il est identique à la géométrie euclidienne. Ensuite je montre que dans cette géométrie euclidienne, la géométrie hyperbolique primitive apparaît sous la forme du modèle de *Poincaré*.

Dans le modèle de la géométrie hyperbolique établi dans le demi-plan euclidien, les demi-droites euclidiennes perpendiculaires sur l forment un faisceau (a) de droites hyperboliques parallèles; les droites euclidiennes parallèles à l sont les horocycles du faisceau (a); les demi-droites euclidiennes obliques à l sont les lignes équidistantes des droites hyperboliques (a).

Pour rétablir le plan euclidien à partir du plan hyperbolique, je prends deux copies de celui-ci que je réunis suivant leurs „points à l'infini“. Je prends un faisceau (a) de droites hyperboliques parallèles dans l'une des deux copies et le faisceau correspondant (\bar{a}) dans l'autre; je considère leurs horocycles et leurs lignes équidistantes. Par le moyen de ces lignes, je définis les droites euclidiennes et je démontre qu'elles satisfont aux axiomes de la géométrie euclidienne, en particulier à l'axiome des parallèles. En introduisant une notion de distance dans la géométrie ainsi établie, je démontre que la géométrie obtenue est la géométrie euclidienne ordinaire.

Mon procédé peut être caractérisé en disant que *c'est le procédé par lequel il faudrait vérifier l'existence de la géométrie euclidienne si la géométrie hyperbolique avait une évidence de telle sorte qu'on attribue à la géométrie euclidienne.*

Par cette méthode, nous obtenons une représentation analytique uniquement déterminée de la géométrie hyperbolique plane, dans un sens similaire à ce que les recherches de M. *Hilbert* sur les fondements de la géométrie euclidienne ont conduit à une représentation analytique uniquement déterminée, à la géométrie analytique de *Descartes*.

*

Dans une conférence faite à l'Université de Genève le 14 mai 1937, dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques*,

j'ai esquissé la méthode que j'expose dans le présent mémoire. Je tiens à remercier l'Université de Genève et le Comité d'organisation des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* de leur invitation et hospitalité. Le présent mémoire a été présenté en deux parties à l'Académie Hongroise des Sciences dans les séances du 11 mai 1936 et 19 février 1940.

§ 1. Le système d'axiomes de la géométrie hyperbolique plane

I. Axiomes d'incidence

1. *A toute droite appartiennent deux points, au moins.*
2. *A deux points appartient une droite et une seule.*
3. *Il y a trois points n'appartenant pas à une droite.*
4. *Tous les points appartiennent à un plan.*

II. Axiomes d'ordre

1. *Si A, B, C sont des points d'une droite, et si B est entre A et C , alors B est entre C et A .*
2. *Si A, B, C sont des points distincts d'une droite, il y a un et un seul parmi ces trois points qui est entre les deux autres. Si A, B, C sont des points d'une droite dont l'un est entre les deux autres, ces trois points sont distincts.*
3. *Si A, B sont des points de la droite a , il y a un point D de a tel que B est entre A et D .*
4. *Si A, B, C sont des points n'appartenant pas à une droite et si a est une droite à laquelle n'appartient aucun des points A, B, C et si la droite a a un point commun avec le segment AB (c'est-à-dire si a a un point commun avec la droite AB qui est entre A et B) alors la droite a a un point en commun ou avec le segment BC ou avec le segment AC .*

III. Axiomes d'égalité

1. *Tout segment AB est égal à lui-même: $AB = AB$ et $AB = BA$. Si $AB = A'B'$, alors $A'B' = AB$. Si $AB = A'B'$ et $AB = A''B''$, alors $A'B' = A''B''$.*
2. *Si AB est un segment et si A' est un point de la droite a' , il y a de chaque côté de A' un point B' de a' et un seul tel que $AB = A'B'$.*
3. *Si les segments AB et BC de la droite a n'ont pas de point commun, et si les segments $A'B'$ et $B'C'$ de la droite a' n'ont pas de point commun, les égalités $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$ entraînent l'égalité $AC = A'C'$.*

4. Si A, B, C sont des points n'appartenant pas à une droite, et si A', B' sont des points tels que $AB = A'B'$, il y a de chaque côté de la droite $A'B'$ un point C' et un seul pour lequel $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$. (Au lieu des trois égalités ci-dessus, nous écrirons: $ABC \equiv A'B'C'$).

5. Si A, B, C sont des points n'appartenant pas à une droite, et si P est un point de la droite AB , si ensuite A', B', C', P' sont des points tels que $ABC \equiv A'B'C'$ et $ABP \equiv A'B'P'$, alors $CP = C'P'$.

Définition. Nous appelons *angle* la figure formée par deux demi-droites a et b issues d'un même point O lesquelles n'appartiennent pas à une même droite; le *sommet* O et les *côtés* a et b de l'angle appartiennent à l'angle. En conséquence des axiomes I et II, un angle divise le plan en deux portions que nous appelons l'*intérieur* et l'*extérieur* de l'angle. Si A et B sont des points quelconques de a et de b , les points du segment AB appartiennent à l'intérieur de l'angle.

IV. Axiome des parallèles

Si b est une droite et si A est un point n'appartenant pas à b , il y a deux demi-droites a_1 et a_2 issues de A n'appartenant pas à une même droite telles qu'elles n'ont pas de point commun avec b mais toute demi-droite issue de A dans l'intérieur de l'angle ($a_1 a_2$) a un point commun avec la droite b .

Définition. Si l'énoncé de cet axiome est vérifié pour la droite b et pour les demi-droites a_1 et a_2 , nous disons que les demi-droites a_1 et a_2 sont *parallèles* à la droite b . Soit B un point quelconque de la droite b ; désignons par b_1 et b_2 les deux demi-droites de b déterminées par B , de telle façon que a_1 et b_1 se trouvent du même côté de la droite AB . Nous appelons la demi-droite a_1 parallèle à b_1 (et aussi a_2 parallèle à b_2).

Il résulte de la définition que, si la demi-droite a_1 est parallèle à la demi-droite b_1 , aussi b_1 est parallèle à a_1 ; ensuite si chacune des demi-droites a_1 et b_1 est parallèle à la demi-droite c_1 , alors a_1 est parallèle à b_1 .

Définition. Nous attribuons à chaque demi-droite un *bout* (ou *point à l'infini*); nous disons que deux demi-droites ont le même bout si elles sont parallèles, et alors seulement. Nous obtenons tous les bouts en prenant les bouts des demi-droites issues d'un même point O ; il s'ensuit que l'ensemble des bouts admet un ordre cyclique naturel.

Définition. Nous disons que l'angle $\sphericalangle bAc$ formé par les demi-droites Ab et Ac issues du point A , et l'angle $\sphericalangle b'A'c'$ formé par les demi-droites $A'b'$ et $A'c'$ issues de A' sont égaux: $\sphericalangle bAc = \sphericalangle b'A'c'$, si la condition suivante est vérifiée: soient B, C, B', C' des points des

demi-droites b, c, b', c' tels que les segments AB et $A'B'$ sont égaux, et les segments AC et $A'C'$ sont égaux, alors aussi les segments BC et $B'C'$ sont égaux.

Définition. Si les demi-droites Ab et Ab' forment une droite, et si $\sphericalangle bAc = \sphericalangle b'A'c$, nous appelons ces angles : *angles droits*, et nous disons que les demi-droites b et c sont *perpendiculaires*.

Concernant les théorèmes auxiliaires suivants, nous renvoyons le lecteur au mémoire de M. Hilbert.

1. Si la droite c forme avec les droites a et b des angles correspondants égaux, alors a et b n'ont pas de point commun et elles ne sont pas parallèles.

2. Si a et b sont des droites non parallèles et sans point commun, il y a une droite c et une seule qui est perpendiculaire sur toutes deux.

3. Si les demi-droites b_1 et b_2 ne sont pas parallèles, il y a une droite et une seule qui est parallèle à b_1 et à b_2 ; en d'autres mots : deux bouts quelconques peuvent être joints par une droite et une seule.

De cette dernière proposition, on peut déduire facilement la suivante :

4. Si a est une droite et si b_1 est une demi-droite non parallèle à a , il y a une droite et une seule qui est perpendiculaire sur a et parallèle à b_1 ; en d'autres mots, à partir du bout de b_1 , on peut mener une perpendiculaire et une seule sur a .

Soit, en effet, b'_1 une demi-droite parallèle à b_1 issue d'un point A de a , et soit a_1 l'une des demi-droites de a déterminées par le point A . Soit b'_2 la demi-droite issue de A de l'autre côté de la droite a pour laquelle $\sphericalangle a_1Ab'_1 = \sphericalangle a_1Ab'_2$. La droite b qui est parallèle à b'_1 et à b'_2 est perpendiculaire sur a .

§ 2. Les mouvements et les symétries du plan hyperbolique

A la base des axiomes I, II, III, nous définissons les mouvements et les symétries du plan.

La *symétrie* du plan par rapport à la droite a change tout point P en son symétrique P' par rapport à a , c'est-à-dire en le point P' pour lequel la droite a est perpendiculaire au milieu du segment PP' . Nous appelons la droite a la *médiane* du couple de points P, P' .

Une *translation du plan* admettant pour base la droite a est définie de la façon suivante. A un point A de a nous faisons correspondre un point A' de a ; à tout point B de a nous faisons correspondre le point B' de a

pour lequel les segments AA' et BB' sont égaux et de même sens. Si P est un point quelconque du plan, soit B le pied de la perpendiculaire sur a passant par P ; soit B' le point de a correspondant à B ; soit enfin P' le point de la perpendiculaire sur a passant par B' pour lequel les segments BP et $B'P'$ sont égaux et de même sens par rapport à la droite a (cela veut dire que P et P' se trouvent du même côté de la droite a). Au point P nous faisons correspondre le point P' déterminé uniquement par la prescription ci-dessus.

Définition. Nous entendons par une *ligne équidistante* de la droite a un ensemble de points qui se trouvent du même côté et en distance égale de la droite a . La droite a sera désignée comme *base* de cette ligne équidistante.

Par une translation ayant pour base la droite a , les lignes équidistantes de a se changent en elles-mêmes.

5. *Les translations ayant pour base la droite a forment un groupe commutatif.* Cela signifie que le produit de deux translations ayant pour base la droite a est aussi une translation admettant la même base et, de plus, elle est indépendante de l'ordre dans lequel nous effectuons les deux translations données.

La *demi-rotation* du plan autour du point O fait correspondre à tout point P le point P' pour lequel O est le milieu du segment PP' .

6. *La demi-rotation autour du point O est le produit de deux symétries dont les axes sont des droites perpendiculaires passant par O .*

Il résulte facilement des axiomes I—IV la proposition suivante, en considérant que les mouvements et les symétries du plan changent tout angle en un angle égal et des droites sécantes en des droites sécantes :

7. *Si les demi-droites Aa et Bb sont parallèles, et AB perpendiculaire à b , ensuite si Cc et Dd sont parallèles et CD perpendiculaire à d , l'égalité des segments AB et CD entraîne celle des angles $\sphericalangle aAB$ et $\sphericalangle cCD$, et inversement.*

Définition. Les points A et B des droites a et b seront appelés leurs points *homologues* si les angles intérieurs d'un même côté formés par la droite AB avec les droites a et b sont égaux.

Si les droites a et b n'ont pas de point commun, à tout point A de a correspond un point B de b et un seul qui est son homologue; en particulier si a et b sont parallèles, cette proposition résulte de la proposition 2.

Soit a_1 une demi-droite; désignons son bout par ω . Considérons le faisceau (a) des droites parallèles à a_1 . Si a, b, c sont trois droites appar-

tenant à ce faisceau, et si les points B de b et C de c sont les homologues du point A de a , aussi les points B et C sont des points homologues des droites b et c .

Définition. Nous entendons par un *horocycle* du faisceau (a) l'ensemble des points homologues sur les droites du faisceau à un point A de la droite a .

Il résulte de la définition :

8. Un horocycle h du faisceau (a) et une droite a de ce faisceau ont un et un seul point commun.

9. Les translations admettant pour base la droite a changent les droites parallèles à a entre elles et les horocycles de ce faisceau entre eux.

Définition. Nous entendons par *côtés correspondants* des lignes parallèles a et a' le demi-plan déterminé par a et contenant la droite a' , et le demi-plan déterminé par a' et ne contenant pas la droite a (ou vice versa).

Définition. Les arcs AA' et BB' d'un même horocycle h sont appelés égaux si les segments AA' et BB' sont égaux. Nous disons que les arcs AA' et BB' de l'horocycle h ont même sens si les points A' et B' se trouvent des côtés correspondants des droites $A\omega$ et $B\omega$, joignant ces points au bout ω .

Nous définissons les *translations du plan suivant les horocycles h* de la façon suivante. Soient A et A' deux points d'un horocycle h ; au point A , nous faisons correspondre le point A' . Soit B un autre point quelconque du même horocycle h ; nous lui faisons correspondre le point B' de h pour lequel les arcs AA' et BB' de h sont égaux et de même sens. Soit ensuite P un point quelconque du plan; désignons par B le point commun de la droite $P\omega$ avec l'horocycle h , et par B' le point lui correspondant; soit P' le point commun de la droite $B'\omega$ avec l'horocycle h' passant par P ; au point P , nous faisons correspondre le point P' déterminé ainsi.

10. Les translations du plan suivant les horocycles h changent tout segment en un segment égal; elles transforment tout horocycle h en lui-même et les droites du faisceau (a) entre elles. Les translations suivant les horocycles h forment un groupe commutatif.

Nous allons démontrer la proposition suivante :

11. Tout mouvement du plan hyperbolique, c'est-à-dire toute transformation conservant le sens d'orientation et conservant les distances hyperboliques peut être composé des mouvements suivants :

- a) la demi-rotation autour d'un point O du plan ;
- b) les translations admettant pour base une droite ayant le bout ω ;
- c) les translations suivant les horocycles h du faisceau des droites a ayant le bout ω .

Soient en effet AB et $A'B'$ deux segments égaux quelconques ; il y a un mouvement et un seul qui change A en A' et B en B' . Supposons que A' et B' se trouvent sur la droite $O\omega$ et que ω soit le bout de la demi-

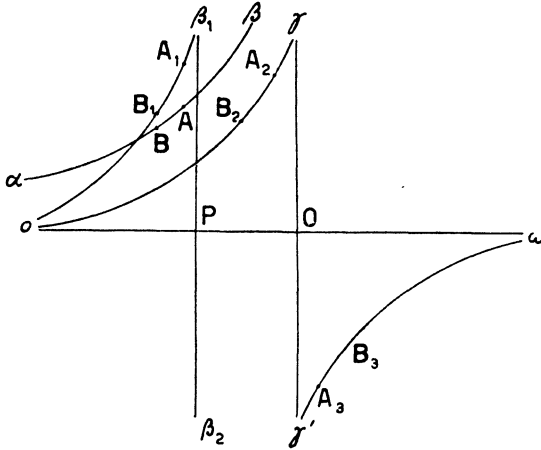


Fig. 1

droite $A'B'$; désignons par o l'autre bout de la droite $O\omega$ (Fig. 1). Désignons par α et β les bouts de la droite AB de telle façon que leur ordre soit $\beta AB\alpha$ (c'est-à-dire que α soit le bout de la demi-droite AB , et β celui de BA). Par une translation suivant les horocycles h , nous transformons la droite $\alpha\omega$ en $o\omega$; au segment AB correspond par cette translation un segment A_1B_1 égal à AB . Désignons par β_1 le bout de la demi-droite B_1A_1 ; à partir du bout β_1 , nous menons la perpendiculaire sur la droite $o\omega$; désignons par P son pied, et par β_2 son autre bout. Désignons ensuite par γ et γ' les bouts de la perpendiculaire sur $o\omega$ menée par le point O , de telle façon que β_1 et γ se trouvent d'un même côté de la droite $o\omega$. Par une translation ayant pour base la droite $o\omega$, nous changeons le point P en O ; cette translation change β_1 en γ , β_2 en γ' , et l'image du segment A_1B_1 sera un segment A_2B_2 situé sur la droite $o\gamma$. La demi-rotation autour de O échange o et ω , d'une part, γ et γ' , d'autre part, entre eux ; au segment A_2B_2 correspond un segment A_3B_3 situé sur la droite $\gamma'\omega$ et leur ordre est $\gamma'A_3B_3\omega$. Par une translation suivant les

horocycles h , nous changeons $\gamma'\omega$ en $o\omega$; l'image obtenue de A_3B_3 est un segment A_4B_4 de $o\omega$; enfin, par une translation ayant pour base la droite $o\omega$, nous changeons le point A_4 en A' ; comme $A_4B_4 = A'B'$, et en conséquence de l'ordre $oA'B'\omega$, et $oA_4B_4\omega$, il résulte que cette même translation change B_4 en B' . Cela prouve la proposition 11.

§ 3. Définition des lignes du modèle euclidien

A partir des éléments de la géométrie hyperbolique plane, nous définissons un *modèle* (ou une *pseudo-géométrie*) de la façon suivante.

Nous prenons deux copies H et \bar{H} du plan hyperbolique. Tout point appartenant soit à H soit à \bar{H} est un point du *pseudo-plan*. Soit ω un bout quelconque de H , et soit $\bar{\omega}$ le bout correspondant de \bar{H} ; en omettant les bouts ω et $\bar{\omega}$, nous réunissons H et \bar{H} suivant leurs autres bouts. Soient donc α et $\bar{\alpha}$ des bouts correspondants de H et de \bar{H} , différents de ω et de $\bar{\omega}$; nous considérons α et $\bar{\alpha}$ comme un même point du pseudo-plan. Les points du pseudo-plan engendrés par les bouts de H et de \bar{H} forment une „*droite horizontale*“ l_ω du pseudo-plan, par définition. Un point quelconque P de H et le point \bar{P} lui correspondant de \bar{H} seront appelés *points symétriques par rapport à l_ω* du pseudo-plan.

Désignons par (a) et par (\bar{a}) les faisceaux de droites dans H et dans \bar{H} ayant les bouts ω et $\bar{\omega}$, respectivement. Tout horocycle h du faisceau (a) et tout horocycle \bar{h} du faisceau (\bar{a}) forme une „*droite horizontale*“ du pseudo-plan.

Une droite a et la droite correspondante \bar{a} forment ensemble avec leurs bouts unis $\alpha = \bar{\alpha}$ une „*droite verticale*“ du pseudoplan. Le point α se trouve entre les points de a et ceux de \bar{a} .

Soient e_1 et e_2 deux lignes équidistantes de a symétriques par rapport à a ; soient \bar{a} , \bar{e}_1 , \bar{e}_2 les lignes de \bar{H} leur correspondant. Les lignes e_1 et e_2 , ensemble avec le bout $\alpha = \bar{\alpha}$ de a forment une droite oblique du pseudo-plan. Le point α se trouve entre les points de e_1 et ceux de e_2 .

Pour éviter toute confusion, nous appellerons les droites du pseudo-plan: *lignes*; les droites hyperboliques seront appelés *droites*.

Nous allons démontrer que le système des lignes du pseudo-plan vérifie les axiomes des groupes I et II et encore l'axiome d'Euclide sur les parallèles.

Les axiomes 1, 3 et 4 du groupe I résultent immédiatement à partir des axiomes respectifs de la géométrie hyperbolique plane. Dans ce groupe, c'est l'axiome I. 2 seul qu'il faut vérifier; à cela sert le raisonnement suivant.

12. Si A et B sont deux points du plan hyperbolique H qui n'appartien-

nent ni à une droite du faisceau (a) ni à un horocycle de ce faisceau, il existe une droite a de ce faisceau dont une ligne équidistante contient les points A et B .

Soit en effet k la médiane du couple de points A , B , et soit a la perpendiculaire sur k menée du bout ω . La symétrie par rapport à la droite k change les points A et B entre eux, et la droite a en elle-même; par conséquent, les points A et B se trouvent d'un même côté de a et en distances égales.

13. Si A et B sont deux points du plan hyperbolique H qui n'appartiennent pas à une droite du faisceau (a), il y a une droite a de ce faisceau telle que les points A et B se trouvent des côtés différents et en distances égales de cette droite. Menons en effet la droite a du faisceau (a) par le milieu du segment AB .

Il résulte de là que si A et \bar{B} sont des points de H et de \bar{H} qui n'appartiennent pas à une ligne verticale, il y a une ligne oblique $e_1 + \bar{e}_2$ qui les contient.

Si α est un bout, un point quelconque A de H appartient ou à la droite $a = \alpha \omega$, et à la ligne verticale $a + \bar{a}$, ou à la ligne équidistante e_1 de $\alpha \omega$ passant par A , et à la ligne oblique $e_1 + \bar{e}_2$. Deux bouts quelconques α et β appartiennent à la ligne horizontale l_ω . Par suite:

14. Deux points quelconques du pseudo-plan appartiennent à une ligne, au moins, du pseudo-plan.

Deux horocycles quelconques h et h' du faisceau (a) n'ont aucun point commun; un horocycle h a un seul point en commun avec une droite a quelconque du faisceau (a); deux droites a et a' de ce faisceau n'ont ni un point, ni un bout, différent de ω , en commun. Par suite:

15. Deux lignes horizontales, ou deux lignes verticales du pseudo-plan n'ont aucun point commun. Toute ligne horizontale a avec toute ligne verticale un point commun et un seul.

16. Tout horocycle h a avec toute ligne équidistante e d'une droite a quelconque du faisceau (a) un point commun et un seul.

Soit en effet h' un horocycle passant par un point B' de la ligne équidistante e , et soit A' le point commun de h' avec la base a de e (Fig. 2). Par une translation admettant pour base la droite a , nous changeons le point A' en le point commun A de a avec l'horocycle h ; l'horocycle h' sera changé en h , et la ligne équidistante e en elle-même; par conséquent, au point B' correspond un point commun B de h et de e . Si B_1 était un autre point commun de h et de e , désignons par C et par C_1 les pieds des perpendiculaires sur a passant par B et par B_1 ; la translation ayant pour base la droite a qui change C en C_1 transforme B en B_1 , et, par suite, l'horocycle

h en lui-même; le point commun A de cet horocycle h avec la droite A reste donc invariant par la translation en question; celle-ci doit être l'identité, d'où il résulte que B_1 est identique à B .

17. Soient a et a' deux droites quelconques du faisceau (a) , et soit e' une ligne équidistante de a' telle que a et e' se trouvent d'un même côté de a' ; a et e' ont un point commun et un seul.

A partir d'un point A de a menons la perpendiculaire sur a' ; soit B son pied. Soit D le point de la demi-droite BA pour lequel la distance BD est égale à la distance (a', e') (voir fig. 3). Désignons par b la droite pas-

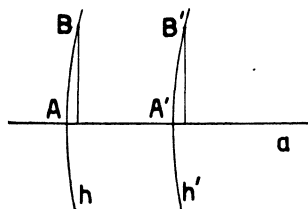


Fig. 2

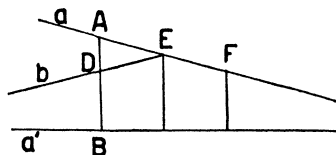


Fig. 3

sant par D qui a en commun avec a' son bout différent de ω . Les droites a et b ont un point E en commun; on peut le vérifier facilement à la base des axiomes II.4 et IV. Soit F le point de la droite a tel que les segments DE et EF soient égaux et que A et F soient séparés sur a par le point E . Menons la perpendiculaire sur a' par le point E ; la symétrie par rapport à cette droite transforme la droite a' en elle-même et échange les points D et F entre eux; par suite, D et F ont la même distance à la droite a' . Le point F de a appartient donc à la ligne équidistante e' de a' . Si F' était un autre point commun de a et de e' , soient G et G' les pieds des perpendiculaires sur a' menées par F et par F' , et soit k la médiane du couple de points G, G' ; la symétrie par rapport à k échange entre eux les points F et F' , elle transforme par conséquent la droite a en elle-même; la droite k serait alors une perpendiculaire commune des droites parallèles a et a' , ce qui est contradictoire à la proposition 1.

18. Soient a et a' deux droites quelconques du faisceau (a) , et soient e et e' des lignes équidistantes de a et de a' , respectivement; les lignes e et e' ont au plus un point commun.

En supposant le contraire, soient C et D deux points communs de e et de e' . Désignons par A, A' et par B, B' les pieds des perpendiculaires sur a et sur a' menées par C et par D , respectivement (fig. 4). On a les égalités $CA = DB$ et $CA' = DB'$; C et D se trouvent d'un même côté de chacune des droites a et a' . Joignons les points C et D au bout ω ; il

résulte de l'égalité $AC = BD$, d'après la proposition 7, que $\sphericalangle AC\omega = \sphericalangle BD\omega$, et similairement, l'égalité $A'C = B'D$ entraîne l'égalité $\sphericalangle A'C\omega = \sphericalangle B'D\omega$. En faisant les sommes à gauche et à droite dans les égalités déduites, nous obtenons l'égalité suivante: $\sphericalangle A'CA = \sphericalangle B'DB$. La dernière égalité jointe aux égalités ci-dessus: $AC = BD$ et $A'C = B'D$ entraîne les suivantes: $AA' = BB'$ et $\sphericalangle A'A\omega = \sphericalangle B'B\omega$. Il résulte de là que les points A' et B' de a' ont la même distance à la droite a ; c'est une contradiction, en vertu de la proposition 17.

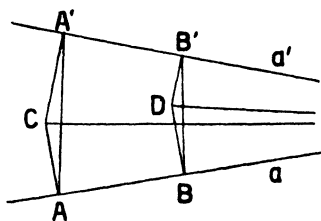


Fig. 4

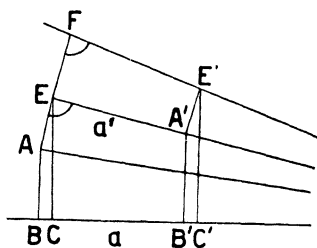


Fig. 5

19. Soient a et a' deux droites du faisceau (a) , et soient e_1, e_2 et e'_1, e'_2 des lignes équidistantes symétriques de a et de a' , respectivement. Supposons que a' et e_1 se trouvent d'un même côté de a , et que e_1 et e'_1 se trouvent des côtés correspondants de a et de a' . Si la distance (a, e_1) est plus grande que la distance (a', e'_1) , les lignes e_1 et e'_1 ont un point commun; les lignes e_2 et e'_2 n'ont aucun point commun.

En vertu de la proposition 17, il existe un point commun E de a' avec e_1 . Soit C le pied de la perpendiculaire sur a passant par E (fig. 5). La perpendiculaire sur a' passant par E a un point F en commun avec la ligne e'_1 . Soit c la demi-droite issue de E telle que $\sphericalangle \omega Ec = \sphericalangle \omega FE$ et que c et e'_1 se trouvent des côtés différents de a' ; soit A le point de c pour lequel $FE = EA$. Il résulte de la condition $(a, e_1) > (a', e'_1)$ que $EC > EA$, par conséquent, les points A et E se trouvent d'un même côté de la droite a . La ligne équidistante de a passant par A a donc un point A' sur la droite a' . Désignons par B le pied de la perpendiculaire sur a menée par A . Par une translation ayant pour base la droite a , nous changeons le point A en A' ; désignons les images des points B, C, E , obtenues par cette translation, par B', C', E' . Les droites $A'B'$ et $E'C'$ sont perpendiculaires sur a , et on a les égalités suivantes: $EC = E'C'$, $AE = A'E'$, $\sphericalangle \omega EA = \sphericalangle \omega E'A'$. L'égalité $EC = E'C'$ signifie que le point E' appartient à la ligne équidistante e_1 de a . Des égalités $AE = A'E'$ et $\sphericalangle \omega EA = \sphericalangle \omega E'A'$ on conclut, d'après la proposition 7, que $E'A'$ est perpendicu-

laire sur la droite $A'\omega = a'$. Comme $AE = EF = A'E'$, il résulte donc que E' appartient aussi à la ligne équidistante e'_1 de a' .

Si les lignes équidistantes e_2 et e'_2 avaient un point commun E'' , le milieu des points E' et E'' , situés des côtés différents de a et en distances égales à a , appartiendrait à la droite a , et, pour la même raison, aussi à la droite a' ; mais les lignes parallèles a et a' n'ont aucun point commun. Par suite, e_2 et e'_2 n'ont pas de point commun.

20. Soient a et a' deux droites du faisceau (a) , et soient e_1, e_2 et e'_1, e'_2 des lignes équidistantes symétriques de a et de a' , respectivement. Supposons (comme dans la proposition 19) que a' et e_1 se trouvent d'un même côté de a , et que e_1 et e'_1 se trouvent des côtés correspondants de a et de a' . e_1 et e'_2 ont un point commun, e_2 et e'_1 n'ont pas de point commun.

Les lignes e_2 et e'_1 se trouvent des côtés différents de la droite a , d'où la deuxième proposition ci-dessus. Pour vérifier la première, désignons par E le point commun de e_1 et de a' , et par E_2 celui de e'_2 et de a (leur existence découle de la proposition 17). Nous menons la perpendiculaire sur a passant par E , désignons son pied par A , et la perpendiculaire sur a'

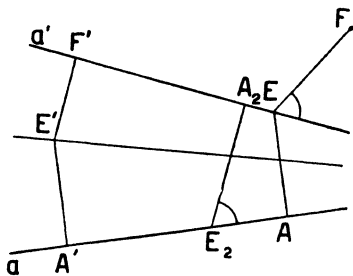


Fig. 6

passant par E_2 dont le pied soit A_2 (fig. 6). Soit c la demi-droite issue de E pour lequel $\sphericalangle \omega Ec = \sphericalangle \omega E_2 A_2$ et qui se trouve de l'autre côté de a' que le point E_2 ; désignons par F le point de c pour lequel $EF = A_2 E_2$. La ligne équidistante de a passant par F a un point F' en commun avec a' . La translation ayant pour base la droite a , qui change F en F' , transforme E en un point E' dont on peut vérifier par les raisonnements employés pour la démonstration de la proposition 19 qu'il est un point commun des lignes e_1 et e'_2 .

Des propositions 18, 19, 20 découle que deux lignes obliques quelconques du pseudo-plan ont au plus un point commun; en vertu des propositions 16 et 17 toute ligne oblique rencontre une ligne horizontale ou verticale quelconque en un seul point, et d'après 15 une ligne verticale et une ligne horizontale quelconques ont un seul point commun. Ce résultat ensemble

avec la proposition 14 fournit l'axiome I.2 relatif au pseudo-plan que voici :

21. Deux points quelconques du pseudo-plan appartiennent à une ligne et à une seule.

*

Concernant les axiomes du groupe II nous faisons les observations suivantes.

Des axiomes II. 1, 2, 3 relatifs au plan hyperbolique découle immédiatement la validité des mêmes axiomes pour le pseudo-plan, en tenant compte des définitions données ci-dessus. L'axiome II. 4 relatif au plan hyperbolique fournit le théorème que le plan hyperbolique est divisé en deux parties par une droite hyperbolique quelconque, et, en particulier aussi par une droite quelconque a du faisceau (a); si A et B sont des points appartenants aux deux parties différentes, le segment AB de la droite hyperbolique AB a un point commun avec la droite a . Si les points A et B appartiennent à un horocycle h du faisceau (a), il résulte de la proposition 15 que h et a ont un point commun, lequel appartient à l'arc AB de l'horocycle. Similairement, si A et B appartiennent à une ligne équidistante e' d'une droite a' du faisceau (a), d'après 17 e' et a ont un point commun, et ce point appartient au segment AB de e' . En résumé, toute ligne verticale divise le pseudo-plan en deux parties.

Par des raisonnements similaires, on déduit des propositions 15—20 la propriété analogue relative aux lignes horizontales et obliques; par cela, on aboutit au résultat suivant qui est équivalent à l'axiome II. 4:

Le pseudo-plan est divisé en deux parties par une ligne l quelconque; si A et B sont deux points appartenant à la même partie, le segment AB de la ligne AB n'a aucun point en commun avec la ligne l ; si A et B appartiennent à des parties différentes, le segment AB a un point en commun avec la ligne l .

§ 4. Les lignes parallèles et les perpendiculaires du pseudo-plan

22. Si a et a' sont deux droites du faisceau (a) et leurs lignes équidistantes e_1 et e'_1 se trouvent des côtés correspondants de a et de a' , et si les distances (a, e_1) et (a', e'_1) sont égales, e_1 et e'_1 n'ont aucun point commun.

Si P était un point commun de e_1 et de e'_1 , les droites a et a' se trouveraient d'un même côté de la droite $P\omega$; en désignant par Q et Q' les pieds des perpendiculaires sur a et sur a' menées par P , il résulterait $PQ = PQ'$, et donc, d'après la proposition 7, $\sphericalangle \omega PQ = \sphericalangle \omega PQ'$; cette égalité involverait que les demi-droites PQ et PQ' coïncident, et comme

$PQ = PQ'$, de même les points Q et Q' ; les droites a et a' perpendiculaires sur PQ et passant par le point Q seraient donc identiques, contrairement à nos hypothèses.

Définition. Nous appellerons deux lignes du pseudo-plan *parallèles* si elles n'ont aucun point commun. Des propositions 15—22 on conclut immédiatement que deux lignes parallèles quelconques sont ou bien horizontales ou verticales, ou bien elles sont des lignes obliques $e_1 + \bar{e}_2$ et $e'_1 + \bar{e}'_2$ telles que e_1 et e'_1 se trouvent des côtés correspondants de leurs bases et en distances égales à elles.

Le système des lignes du pseudo-plan vérifie l'*axiome d'EUCLIDE sur les parallèles* :

23. *A une ligne quelconque l et à un point P arbitraire correspond une ligne l' et une seule parallèle à l et passant par P .*

Si la ligne l est horizontale ou verticale, la proposition est une conséquence immédiate des définitions. Soit $l = e_1 + \bar{e}_2$ une ligne oblique, et soit P un point du plan hyperbolique H . Désignons par E et par A les points communs de l'horocycle h passant par P avec la ligne e_1 et avec la base a de e_1 , respectivement. Soit A' le point de h pour lequel les arcs AE et $A'P$ de l'horocycle h sont égaux et de même sens. Soit e'_1 la ligne équidistante passant par P de la droite $a' = A'\omega$, désignons par e'_2 son symétrique par rapport à a' , et par \bar{e}'_2 la symétrique de e'_2 par rapport à l_ω . La ligne oblique $e'_1 + \bar{e}'_2$ est parallèle à la ligne $e_1 + \bar{e}_2$, d'après la proposition 22.

Définition. Nous appelons les droites a du faisceau (a) et leurs horocycles h *perpendiculaires*. Nous appelons les lignes équidistantes e et e' des droites a et a' *perpendiculaires* si la droite hyperbolique $\alpha\alpha'$ joignant les bouts α et α'' de a et de a' , différents de ω , passe par le point commun de e et de e' .

Conformément à cette définition, nous appellerons deux lignes du pseudo-plan *perpendiculaires*, si l'une d'elles est horizontale et l'autre verticale, ou si elles sont obliques et leurs parties appartenant à H ou à \bar{H} sont perpendiculaires.

24. *Si la ligne l est perpendiculaire sur les lignes l' et l'' , l' et l'' sont parallèles. Inversement, si l' et l'' sont parallèles et si l est perpendiculaire sur l' , elle est perpendiculaire sur l'' .*

Si ces lignes sont horizontales ou verticales, notre proposition est évidente. Si les lignes l, l', l'' sont engendrées par les lignes équidistantes e, e', e'' des droites a, a', a'' (appartenant au faisceau (a)), désignons par A et par B le point commun de e avec les lignes e' et e'' , respectivement.

Menons les perpendiculaires sur a et a' , et sur a et a'' , à partir des points A et B , et désignons leurs pieds par A', A'', B', B'' ; soient $\alpha, \alpha', \alpha''$ les bouts différents de ω des droites a, a', a'' (fig. 7). En conséquence de la perpendicularité de e sur e' et e'' , il résulte de notre définition que A appartient à la droite $\alpha\alpha'$ et B appartient à la droite $\alpha\alpha''$. Comme A et B appartiennent à la ligne équidistante e de a , il s'ensuit $AA' = BB'$; d'après la proposition 7, cette égalité entraîne l'égalité des angles $\sphericalangle \alpha A \omega = \sphericalangle \alpha B \omega$; les angles complémentaires sont: $\sphericalangle \omega A \alpha' = \sphericalangle \omega B \alpha''$; d'après 7, il résulte de cette dernière égalité que $AA'' = BB''$, c'est-à-dire que $(a', e') = (a'', e'')$. Comme e' et e'' se trouvent des côtés correspondants de a' et de a'' , nous concluons d'après la proposition 22 que e' est parallèle à e'' . La deuxième partie de la proposition s'obtient par un raisonnement tout à fait analogue.

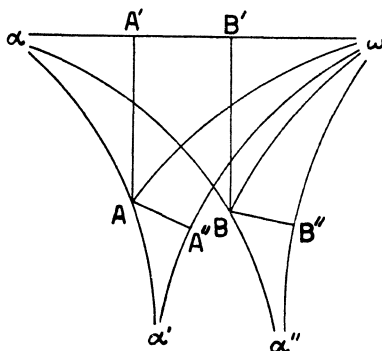


Fig. 7

A la base de la proposition que nous venons de démontrer, nous étendons la notion de perpendicularité au cas de deux lignes équidistantes e et e' d'une même droite a . Soit a'' une droite différente de a , et soit e'' la ligne équidistante de a'' telle que e et e'' se trouvent des côtés correspondants de a et de a'' et en distances égales à ces droites. Si les lignes e' et e'' sont perpendiculaires, nous appelons aussi les lignes e et e' perpendiculaires.

§ 5. Définition d'égalité de segments dans le pseudo-plan

a) *Egalité de deux arcs d'horocycle. Egalité de deux segments de l_ω .*

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des bouts différents de ω , et soient A, B, C, D les points communs d'un horocycle h avec les droites $\alpha\omega, \beta\omega, \gamma\omega, \delta\omega$. Si les segments de droites hyperboliques AB et CD sont égaux, nous disons

que les pseudo-distances $[AB]$ et $[CD]$ sont égales, et de même que les pseudo-distances $[\alpha\beta]$ et $[\gamma\delta]$ sont égales (fig. 8).

b) *Egalité d'un arc d'horocycle et d'un segment de l_ω .*

Si A et B sont les points communs de l'horocycle h avec les droites $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ (fig. 8), nous disons que les pseudo-distances $[AB]$ et $[\alpha\beta]$ sont égales.

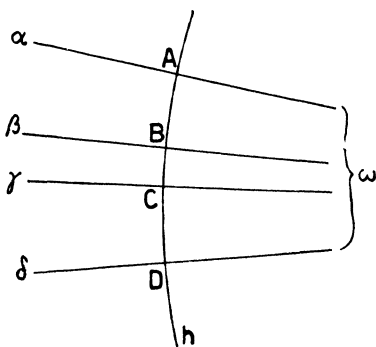


Fig. 8

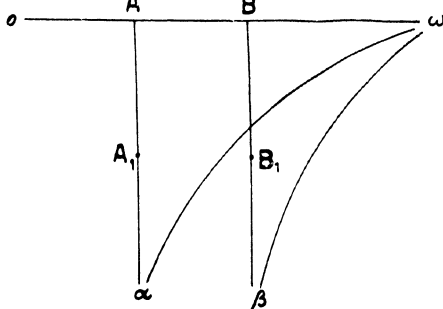


Fig. 9

c) *Egalité d'un segment de droite et d'un segment de l_ω .*

Soient A et B deux points de la droite $o\omega$, et soient $A\alpha$ et $B\beta$ des demi-droites perpendiculaires sur $o\omega$ d'un même côté de la droite $o\omega$; nous disons que les pseudo-distances $[oA]$ et $[o\alpha]$ sont égales, de même que les pseudo-distances $[AB]$ et $[\alpha\beta]$ (fig. 9).

d) *Egalité d'un segment de ligne équidistante et d'un segment de l_ω .*

Soient A_1 et B_1 deux points d'une ligne équidistante e de la droite $o\omega$, et soient α, β les bouts des perpendiculaires sur $o\omega$ menées par A_1 et par B_1 lesquels se trouvent d'un même côté de $o\omega$; nous posons alors $[oA_1] = [o\alpha]$ et $[A_1B_1] = [\alpha\beta]$ (fig. 9).

e) *Pseudo-distance des points de H et de \bar{H} .*

Si A est un point de H et \bar{B} un point de \bar{H} , désignons par l la ligne du pseudo-plan déterminé par ces deux points (21). Désignons par γ le point commun de l avec l_ω ; soient ensuite α et β deux points de l_ω séparés par γ tels que, d'après c) et d), on ait: $[\alpha\gamma] = [A\gamma]$ et $[\gamma\beta] = [\gamma\bar{B}]$; nous disons alors que les pseudo-distances $[AB]$ et $[\alpha\beta]$ sont égales.

f) *Egalité de deux segments du pseudo-plan.*

Soient A, B, C, D des points quelconques du pseudo-plan, et soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des points de la ligne l_ω tels que, d'après b) — e), on ait:

$[AB] = [\alpha\beta]$ et $[CD] = [\gamma\delta]$. Si d'après a) $[\alpha\beta] = [\gamma\delta]$, nous appelons les pseudo-distances $[AB]$ et $[CD]$ égales.

Il résulte immédiatement de la définition de pseudo-distance qu'elle satisfait aux axiomes **III. 1, 2, 3** (voir § 1).

§ 6. Les translations horizontales du pseudo-plan

Une translation du plan hyperbolique H suivant les horocycles h (définie dans le § 2), et la translation correspondante du plan hyperbolique \bar{H} définissent ensemble une transformation du pseudo-plan en lui-même que nous appellerons *translation horizontale*.

Une translation du plan hyperbolique suivant les horocycles h conserve les distances hyperboliques, c'est-à-dire qu'elle transforme tout couple de points A, B en un couple A', B' tel que les distances hyperboliques AB et $A'B'$ sont égales (voir § 2). Nous allons démontrer que *les translations horizontales du pseudo-plan conservent les pseudo-distances*.

Si A et B sont deux points d'un horocycle h , leurs images A', B' obtenues par une translation horizontale appartiennent à ce même horocycle h , et comme les distances hyperboliques AB et $A'B'$ sont égales, il résulte de la définition § 5, a) que $[AB] = [A'B']$. Désignons par $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ les autres bouts des droites $\omega A, \omega B, \omega A', \omega B'$; on a aussi $[\alpha\beta] = [\alpha'\beta']$ (§ 5, a).

Soient alors A, B deux points de la droite hyperbolique $o\omega$; désignons par α, β les bouts des demi-droites perpendiculaires sur $o\omega$ issues de A et de B vers le même côté de la droite $o\omega$. Soient ensuite A', B' les images des points A et B obtenues par une translation horizontale. La droite hyperbolique AB est changée par cette translation en la droite $A'B'$, et l'image du bout o est le bout o' de la droite $A'B'$ différent de ω . Les perpendiculaires $A\alpha$ et $B\beta$ sur $o\omega$ sont changées en les demi-droites $A'\alpha'$ et $B'\beta'$ qui sont perpendiculaires sur $o'\omega$; comme on a $[\alpha\beta] = [\alpha'\beta']$, et d'après § 5 c), $[AB] = [\alpha\beta]$, $[A'B'] = [\alpha'\beta']$, il résulte d'après § 5 f) que $[AB] = [A'B']$.

Soit e une ligne équidistante de la droite $o\omega$; désignons par A_1, B_1 les points de rencontre de e avec les droites $A\alpha$ et $B\beta$; les images de ces points obtenues par la translation sont les points de rencontre A'_1, B'_1 de la ligne équidistante e' de $o'\omega$ avec les droites $A'\alpha', B'\beta'$. De l'égalité $A_1A = A'_1A'$ il résulte que les lignes équidistantes e et e' sont parallèles (§ 4). Ensuite, d'après § 5 d), on a les égalités $[A_1B_1] = [\alpha\beta]$, $[A'_1B'_1] = [\alpha'\beta']$, et comme $[\alpha\beta] = [\alpha'\beta']$, par suite $[A_1B_1] = [A'_1B'_1]$.

Ce que nous venons de démontrer signifie que *les translations horizon-*

tales du pseudo-plan conservent à la fois les distances hyperboliques et les pseudo-distances.

Les translations du plan hyperbolique suivant les horocycles h forment un groupe commutatif (§ 2); le même est donc valable concernant les translations horizontales du pseudo-plan. Nous résumons notre résultat dans la proposition suivante:

25. Les translations horizontales du pseudo-plan conservent les pseudo-distances et changent toute ligne du pseudo-plan en une ligne parallèle. Les translations horizontales forment un groupe commutatif.

§ 7. Théorème de PAPPUS. Proportionnalité de segments

26. Soient $o, \alpha', \beta', \gamma'$ des bouts différents de ω , dans cet ordre, et soient A, B, C des points de la droite $o\omega$ dans l'ordre $oABC\omega$, tels que

$$[o\alpha'] = [\beta'\gamma'] \quad \text{et} \quad [oA] = [BC].$$

Si les lignes équidistantes $\alpha'A$ et $\beta'B$ sont parallèles, les lignes équidistantes $\alpha'A$ et $\gamma'C$ sont aussi parallèles. Inversement, si les lignes équidistantes $\alpha'A, \beta'B, \gamma'C$ sont parallèles et si $[o\alpha'] = [\beta'\gamma']$, on a aussi l'égalité $[oA] = [BC]$.

Dans la fig. 10, la figure à gauche est relative au pseudo-plan euclidien, celle à droite au plan hyperbolique.

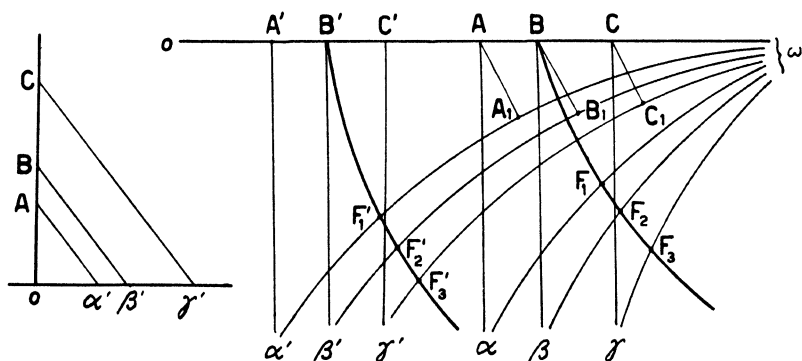


Fig. 10

Nous menons les perpendiculaires sur la droite $o\omega$ à partir des bouts α', β', γ' , et désignons leurs pieds par A', B', C' . L'horocycle h' passant par le point B' rencontre les droites $\alpha'\omega, \beta'\omega, \gamma'\omega$ dans les points F'_1, F'_2, F'_3 , respectivement. Comme $[o\alpha'] = [\beta'\gamma']$, on a d'après les définitions du § 5

$$B'F'_1 = F'_2F'_3.$$

Nous menons les demi-droites perpendiculaires sur la droite $o\omega$ à partir des points A, B, C vers le côté de $o\omega$ qui contient les bouts α', β', γ' ; les bouts de ces demi-droites désignons nous par α, β, γ . L'horocycle h passant par le point B rencontre les droites $\alpha\omega, \beta\omega, \gamma\omega$ aux points F_1, F_2, F_3 , respectivement. Comme $[oA] = [BC]$, on a d'après les définitions les égalités suivantes:

$$[o\alpha] = [\beta\gamma] \quad \text{et} \quad BF_1 = F_2F_3.$$

Soit A_1 le pied de la perpendiculaire sur $\alpha'\omega$ menée de A , et similairement soient B_1 et C_1 les pieds des perpendiculaires sur $\beta'\omega$ et sur $\gamma'\omega$ menées de B et de C . Comme nous avons supposé que la ligne équidistante $\alpha'A$ de la droite $\alpha'\omega$ passant par A est parallèle à la ligne équidistante $\beta'B$ de la droite $\beta'\omega$ passant par B , il résulte de la définition du § 4 que

$$AA_1 = BB_1.$$

Il faut démontrer que

$$AA_1 = CC_1.$$

Par une translation ayant pour base la droite $o\omega$ nous changeons le point A' en B' ; nous employons pour cela la notation: $A' \rightarrow B'$; par cette translation: $\alpha' \rightarrow \beta'$. L'image du point A est un point B^* et l'image de A_1 , qui est le pied de la perpendiculaire sur $\alpha'\omega$ menée de A , est le pied B_1^* de la perpendiculaire sur $\beta'\omega$ menée de B^* . La translation conserve les distances hyperboliques; on a par suite: $AA_1 = B^*B_1^*$; ci-dessus, nous avons trouvé que $AA_1 = BB_1$. Cela signifie que les points B et B^* de la droite $o\omega$ ont même distance à la droite $\beta'\omega$; en vertu de la proposition 17, les points B et B^* sont donc identiques. Cela signifie que la translation ayant pour base la droite $o\omega$ qui change A' en B' change A en B . Nous concluons de là que $A'B' = AB$, et comme l'ordre de ces points est $oA'B'\omega$ et $oAB\omega$, nous avons aussi $A'A = B'B$.

Nous considérons à présent la translation ayant pour base la droite $o\omega$ par laquelle: $A' \rightarrow A, B' \rightarrow B$; par conséquent $\alpha' \rightarrow \alpha$ et $\beta' \rightarrow \beta$. L'horocycle h' passant par B' est changé en l'horocycle h passant par B , et les points de rencontre de h' avec les droites $\alpha'\omega, \beta'\omega$, c'est-à-dire les points F'_1, F'_2 sont changés en les points de rencontre F_1, F_2 de h avec les droites $\alpha\omega, \beta\omega$. Comme $B'F'_1 = F'_2F'_3$ et $BF_1 = F_2F_3$, et, à la suite de la translation $A' \rightarrow A: B'F'_1 = BF_1$, il résulte que $F'_2F'_3 = F_2F_3$; les ordres de ces points sur les horocycles h et h' étant les mêmes, nous concluons de là que la translation $A' \rightarrow A$ transforme le point F'_3 en F_3 . Conséquemment, le bout γ' de la droite $\omega F'_3$ est changé en le bout γ de la droite correspondante ωF_3 , et le pied C' de la perpendiculaire sur $o\omega$ menée du bout γ'

est changé en le pied C de la perpendiculaire sur $o\omega$ menée du bout γ . Il résulte de là que $A'A = C'C$, et par conséquent $A'C' = AC$.

Finalement, nous appliquons la translation ayant pour base la droite $o\omega$ par laquelle $A' \rightarrow C'$; nous avons: $A \rightarrow C$, $\alpha' \rightarrow \gamma'$. Le pied A_1 de la perpendiculaire sur $\alpha'\omega$ menée par A est donc changé en le pied C_1 de la perpendiculaire sur $\gamma'\omega$ menée par C , et de là $AA_1 = CC_1$. Cela prouve la première partie de la proposition 26. La deuxième partie s'obtient de la première par un raisonnement indirect.

Nous allons démontrer le théorème de *Pappus* (ou de *Pascal*):

27. Soient o, α, β, γ des bouts différents de ω , et soient A', B', C' des points de la droite $o\omega$ tels que les lignes équidistantes $\alpha C'$ et $\gamma A'$ soient parallèles, de même que les lignes équidistantes $\beta C'$ et $\gamma B'$; sous ces conditions, les lignes équidistantes $\alpha B'$ et $\beta A'$ sont aussi parallèles (fig. 11).

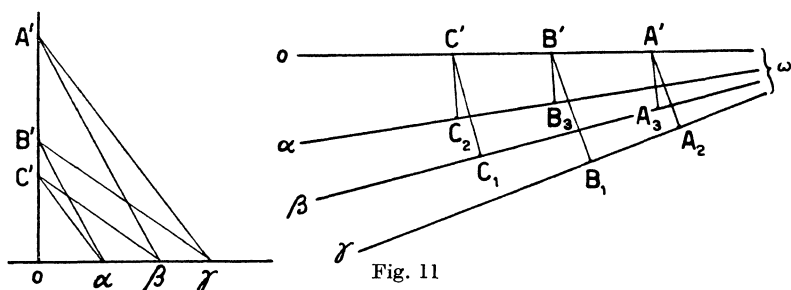


Fig. 11

Nous menons les perpendiculaires: à partir de C' sur $\alpha\omega$ et sur $\beta\omega$, à partir de B' sur $\alpha\omega$ et sur $\gamma\omega$, à partir de A' sur $\beta\omega$ et sur $\gamma\omega$; leurs pieds soient désignés dans cet ordre par $C_2, C_1, B_3, B_1, A_3, A_2$. De nos conditions, il résulte que $C'C_2 = A'A_2$ et $C'C_1 = B'B_1$. Il faut montrer que $A'A_3 = B'B_3$.

La translation ayant pour base la droite $o\omega$ qui change A' en C' , change γ en α , en conséquence de l'égalité $C'C_2 = A'A_2$. La translation ayant la même base et qui change C' en B' , change β en γ , en conséquence de l'égalité $C'C_1 = B'B_1$. Le produit de ces deux translations qui est *échangeable* d'après la proposition 5, change A' en B' , β en α . Le pied de la perpendiculaire sur $\beta\omega$ menée du point A' , c'est-à-dire le point A_3 , est changé par cette translation en le pied B_3 de la perpendiculaire sur $\alpha\omega$ menée de B' , d'où $A'A_3 = B'B_3$.

Définition. Si o, α, β sont des bouts différents de ω , et si A, B sont des points de la droite $o\omega$ tels que les lignes αA et βB sont parallèles (sa notation: $\alpha A \parallel \beta B$), nous disons que la *proportion* suivante est valable:

$$[o\alpha] : [o\beta] = [oA] : [oB].$$

A la base de cette définition, on peut formuler les propositions 26 et 27 de la façon suivante :

26a. Si $[o\alpha'] : [o\beta'] = [oA] : [oB]$, et si $[o\alpha'] = [\beta'\gamma']$, $[oA] = [BC]$, il résulte que $[o\alpha'] : [o\gamma'] = [oA] : [oC]$.

27a. Si $[o\alpha] : [o\gamma] = [oC'] : [oA']$ et si $[o\beta] : [o\gamma] = [oC'] : [oB']$, il résulte que $[o\alpha] : [o\beta] = [oB'] : [oA']$.

Nous allons démontrer la proposition suivante :

28. Soient o, α, β des bouts différents de ω , et soient A, B des points de la droite $o\omega$ tels que les lignes équidistantes αA et βB soient parallèles. On a alors :

$$[o\alpha] : [o\beta] = [\alpha A] : [\beta B].$$

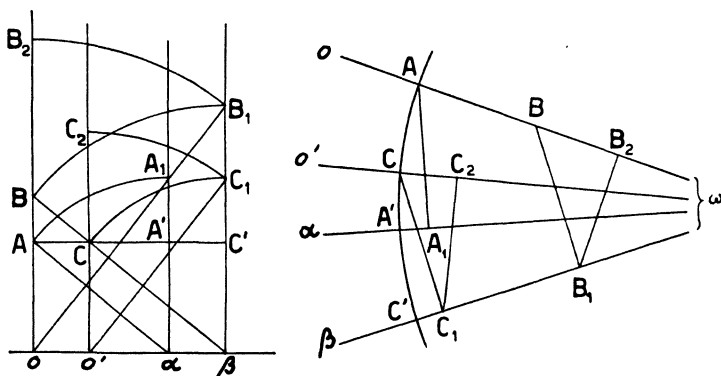


Fig. 12

Dans la fig. 12, la figure à gauche concerne le pseudo-plan euclidien ; les lignes du pseudo-plan sont représentées par des lignes droites ; les droites hyperboliques n'appartenant pas au bout ω sont représentées par des arcs de cercles orthogonaux sur la droite l_ω . La figure à droite correspond au plan hyperbolique.

Désignons par A_1 et B_1 les pieds des perpendiculaires menées sur $\alpha\omega$ à partir de A , et sur $\beta\omega$ à partir de B . D'après nos conditions : $AA_1 = BB_1$. Soient A' et C' les points de rencontre de l'horocycle h passant par A avec les droites $\alpha\omega$ et $\beta\omega$. Désignons par C le point de h pour lequel les arcs AC et $A'C'$ de h sont égaux et de même sens. Soit o' l'autre bout de la droite ωC . Désignons enfin par C_1 le pied de la perpendiculaire sur la droite $\beta\omega$ menée par C .

Par une translation suivant les horocycles h nous changeons A en C ; nous aurons : $A' \rightarrow C'$, et par suite $\alpha \rightarrow \beta$ et $A_1 \rightarrow C_1$; de là nous concluons : $AA_1 = CC_1$, et comme $AA_1 = BB_1$, donc $BB_1 = CC_1$. Ce résultat signifie que les points B et C se trouvent sur une ligne équidistante de la

droite $\beta\omega$. Par une translation ayant pour base la droite $\beta\omega$ nous changeons C_1 en B_1 ; par cela $C \rightarrow B$ et par suite $o' \rightarrow o$. Nous concluons de là que la distance C_1C_2 du point C_1 à la droite $o'\omega$ est égale à la distance B_1B_2 du point B_1 à la droite $o\omega$, et donc, par définition, les lignes équidistantes oB_1 et $o' C_1$ sont parallèles, d'où:

$$[\beta o'] : [\beta o] = [\beta C_1] : [\beta B_1].$$

En considérant les égalités: $[\alpha A] = [\alpha A_1] = [\beta C_1]$, et $[\beta B] = [\beta B_1]$, $[\beta o'] = [\alpha o]$, cette relation peut être mise sous la forme:

$$[o\alpha] : [o\beta] = [\alpha A] : [\beta B].$$

Cela prouve la proposition 28.

Par une translation horizontale du pseudo-plan, changeons β en α ; l'image de la ligne βB est la ligne parallèle αA ; le point B est changé en un point B' de la ligne αA , et le point o en le point commun o' de l_ω avec la verticale passant par B' . Les translations horizontales conservent les pseudo-distances; de la proposition 28, nous obtenons ainsi la suivante:

29. *Si oA et $o'B'$ sont des lignes verticales, et si B' appartient à la ligne oblique αA , nous avons la proportion:*

$$[oA] : [o'B'] = [o\alpha] : [o'\alpha] = [A\alpha] : [B'\alpha].$$

§ 8. Parallélogrammes

Un quadrilatère formé des segments AA' , $A'B'$, $B'B$, BA du pseudo-plan est appelé *parallélogramme*, si

$$AA' \parallel BB' \quad \text{et} \quad AB \parallel A'B'.$$

a) Si AB et $A'B'$ sont des lignes *horizontales* et AA' et BB' des lignes obliques parallèles, désignons par α et β les points de rencontre de l_ω avec les lignes AA' et BB' . Menons les verticales par les points α et β , désignons par A_1 , A'_1 et par B_1 , B'_1 leurs points communs avec les lignes horizontales AB et $A'B'$ (fig. 13). D'après les définitions données au § 5, les égalités suivantes ont lieu:

$$[\alpha\beta] = [A_1B_1] = [A'_1B'_1] \quad \text{et} \quad [A_1A'_1] = [B_1B'_1].$$

La translation horizontale qui change α en β transforme d'après la proposition 25 la ligne αA en la ligne parallèle βB , la ligne verticale αA_1 en la

ligne verticale βB_1 , et les lignes horizontales AB et $A'B'$ en elles-mêmes. On obtient donc: $A_1 \rightarrow B_1$, $A \rightarrow B$, $A'_1 \rightarrow B'_1$, $A' \rightarrow B'$, et comme les pseudo-distances restent invariables, par suite:

$$[AA'] = [BB'].$$

On a de même $[A_1A] = [B_1B]$, d'où $[A_1B_1] = [AB]$, et $[A'_1A'] = [B'_1B']$, d'où $[A'_1B'_1] = [A'B']$; ayant regard à l'égalité $[A_1B_1] = [A'_1B'_1]$, on obtient:

$$[AB] = [A'B'].$$

Considérons maintenant des parallélogrammes dont deux côtés sont *verticaux*.

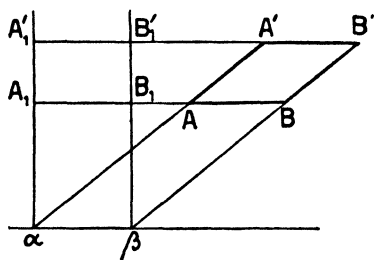


Fig. 13

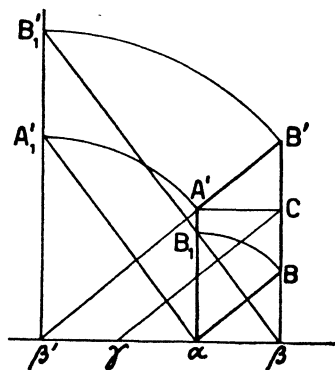


Fig. 14

b) Si α et β sont deux bouts différents de ω , et si les points A' de la droite $\alpha\omega$, B et B' de la droite $\beta\omega$ sont tels que les lignes αB et $A'B'$ sont parallèles, les égalités suivantes sont valables:

$$[\alpha A'] = [BB'] \quad \text{et} \quad [\alpha B] = [A'B'].$$

Soit en effet C le point commun de la droite $\beta\omega$ avec l'horocycle passant par A' . Menons par C la ligne parallèle à αB , désignons par γ son point de rencontre avec l_ω , et par β' le point de rencontre de la ligne $A'B'$ avec l_ω (fig. 14). De notre résultat obtenu sous a) nous concluons que

$$[\beta'\gamma] = [A'C] = [\alpha\beta],$$

et comme $\beta'B' \parallel \gamma C \parallel \alpha B$, nous obtenons de l'inverse de la proposition 26 l'égalité: $[\beta B] = [CB']$, d'où $[\beta C] = [BB']$. Ensuite d'après les définitions du § 5, $[\alpha A'] = [\beta C]$, d'où:

$$[\alpha A'] = [BB'];$$

cette égalité signifie que les côtés verticaux du parallélogramme sont égaux.

Pour vérifier la deuxième égalité énoncée, menons les perpendiculaires (hyperboliques) sur $\alpha\omega$ à partir de B , et sur $\beta'\omega$ à partir de A' et B' ; désignons leurs pieds par B_1, A'_1, B'_1 (fig. 14). De nos conditions, nous concluons que $BB_1 = A'A'_1 = B'B'_1$. Il résulte que les points B_1 et B'_1 se trouvent sur une ligne équidistante de $\beta\omega$ et que A'_1 se trouve sur la ligne équidistante de $\alpha\omega$ parallèle à $B_1B'_1$. D'après le résultat déjà obtenu, les côtés verticaux du parallélogramme $\alpha B_1 B'_1 A'_1$ sont égaux; par suite $[\alpha B_1] = [A'_1 B'_1]$. Considérant les égalités $[\alpha B_1] = [\alpha B]$ et $[A'_1 B'_1] = [A'B']$ nous obtenons de là:

$$[\alpha B] = [A'B'].$$

c) Si α et β sont deux points de la ligne l_ω , et A et \bar{B} sont des points de H et de \bar{H} appartenant respectivement aux verticales $\alpha\omega$, $\beta\omega$, tels que $\alpha\bar{B} \parallel A\beta$, on a les égalités: $[A\alpha] = [\beta\bar{B}]$ et $[A\beta] = [\alpha\bar{B}]$ (fig. 15).

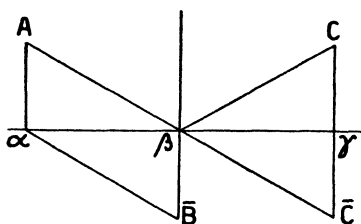


Fig. 15

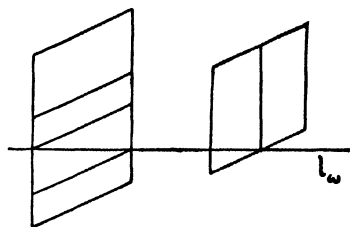


Fig. 16

Pour le démontrer, nous changeons α en β par une translation horizontale; par cela: $\beta \rightarrow \gamma$, $\bar{B} \rightarrow \bar{C}$. Comme $\alpha\bar{B} \parallel A\beta$ et $\alpha\bar{B} \parallel \beta\bar{C}$, les segments βA et $\beta\bar{C}$ appartiennent à une même ligne oblique. Désignons par C le symétrique de \bar{C} par rapport à l_ω ; les lignes équidistantes βC et βA de $\beta\omega$ sont donc symétriques par rapport à $\beta\omega$. Par la symétrie par rapport à $\beta\omega$: $\gamma \rightarrow \alpha$, $\beta \rightarrow \beta$, $\beta C \rightarrow \beta A$, $\gamma\omega \rightarrow \alpha\omega$, d'où résulte que $C \rightarrow A$. Comme les transformations que nous avons employées conservent les pseudo-distances, nous obtenons les égalités suivantes:

$$[\bar{B}\beta] = [\bar{C}\gamma] = [C\gamma] = [A\alpha] \text{ et } [\alpha\bar{B}] = [\beta\bar{C}] = [\beta C] = [\beta A].$$

d) Un parallélogramme quelconque du pseudo-plan dont deux côtés sont verticaux peut être décomposé ou complété pour obtenir des parallélogrammes des types considérés sous b) et c) (voir fig. 16). L'égalité des côtés opposés est donc valable aussi pour ces parallélogrammes.

Nous avons démontré la proposition suivante :

30. *Si deux côtés d'un parallélogramme sont horizontaux ou verticaux, ses côtés opposés sont respectivement égaux.*

L'inverse suivant de cette proposition s'obtient par un raisonnement indirect :

Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles et égaux, et si un côté est horizontal ou vertical, les deux autres côtés opposés sont aussi parallèles et égaux.

§ 9. Les translations verticales du pseudo-plan

Le groupe des translations

Les *translations verticales* du pseudo-plan seront définies par la prescription suivante. Soient A et A' deux points quelconques appartenant à une ligne verticale. A tout point B , nous faisons correspondre le point B' de la ligne verticale passant par B pour lequel les segments AA' et BB' ont le même sens et les pseudo-distances $[AA']$ et $[BB']$ sont égales.

Remarque. Les translations du plan hyperbolique ayant pour base une droite $o\omega$ changent les autres droites ayant le bout ω entre elles. Les translations verticales du pseudo-plan changent toute ligne verticale en elle-même. *Les deux sortes de translations changent les horocycles, c'est-à-dire les lignes horizontales entre elles.*

De la définition il résulte immédiatement que *les translations verticales du pseudo-plan forment un groupe commutatif.*

Toute translation verticale change une ligne quelconque en une ligne parallèle et conserve les pseudo-distances.

Soient en effet A et B deux points quelconques et A', B' leurs images obtenues par une translation verticale. Si A et B appartiennent à une ligne verticale, on obtient immédiatement que $[AB] = [A'B']$. Si A et B n'appartiennent pas à une ligne verticale, comme AA' et BB' sont verticales d'après la définition, et $[AA'] = [BB']$, on obtient de l'inverse de la proposition 30 que $[AB] = [A'B']$ et $AB \parallel A'B'$. Par suite, l'image du point B de la ligne AB appartient à la ligne $A'B'$ qui est parallèle à AB .

Nous définissons une *translation oblique* du pseudo-plan comme le produit d'une translation horizontale et d'une translation verticale. Les translations obliques changent aussi toute ligne en une ligne parallèle et conservent les pseudo-distances.

Soit S une translation horizontale, et T une translation verticale.

Désignons par $A' = S(A)$ et par $B = T(A)$ les images d'un point A obtenues par ces translations. La ligne horizontale AA' est changée par T en la ligne horizontale passant par B , et la ligne verticale passant par A' en elle-même. Désignons par B' le point de rencontre de la ligne verticale passant par A' avec la ligne horizontale passant par B . La translation T change donc le point A' en B' . Par un raisonnement similaire on obtient que la translation S change B en B' . Par conséquent, le point A est changé en B' et par la transformation ST et par TS ; comme A est un point arbitraire du pseudo-plan, cela signifie que *les transformations ST et TS sont identiques*.

Les translations horizontales et verticales sont donc échangeables; si S et S' sont des translations horizontales, et T et T' des translations verticales quelconques, on a

$$(ST)(S'T') = (SS')(TT') = (S'T')(ST);$$

cela signifie que le produit des translations obliques ST et $S'T'$ est la translation oblique $(SS')(TT')$ et que leur produit est commutatif. *Les translations du plan forment donc un groupe commutatif.*

Si A et B sont deux points quelconques du pseudo-plan, désignons par P le point de rencontre de la ligne horizontale passant par A avec la ligne verticale passant par B . Soit S la translation horizontale: $A \rightarrow P$, et T la translation verticale: $P \rightarrow B$. La translation oblique ST change A en B et c'est la seule translation qui change A en B . A deux points quelconques A et B correspond donc une translation et une seule qui change A en B ; nous exprimons cette propriété en disant que *le groupe des translations est simplement transitif sur le pseudo-plan*.

Nous résumons nos résultats dans la proposition suivante:

31. Les translations du pseudo-plan changent toute ligne en une ligne parallèle et conservent les pseudo-distances; elles forment un groupe commutatif et simplement transitif sur le pseudo-plan.

§ 10. Produit de segments. Coordonnées

Nous désignerons les grandeurs des pseudo-distances par les lettres a, b, c, x, y , etc.

La somme $a + b$ des grandeurs a et b est définie de la façon suivante: soient O, A, B des points d'une ligne quelconque tels que leur ordre soit OAB et que les égalités suivantes aient lieu: $[OA] = a, [AB] = b$; nous posons alors $[OB] = a + b$. Nous dirons plus court que le segment $a + b$ est la *somme des segments a et b* .

L'addition des segments est commutative est associative, c'est-à-dire qu'on a les relations

$$a + b = b + a \quad \text{et} \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

Pour définir la multiplication des segments, nous prenons un segment *unité* e arbitrairement. Le segment c est le *produit des segments* a et b (par rapport à l'unité e), si la proportion $c : b = a : e$ a lieu. Nous rappelons la signification de cette proportion (voir fig. 17). Soient o, ε, α des bouts différents de ω tels que o ne sépare pas sur l_ω les bouts ε et α , et pour lesquels $[o\varepsilon] = e$, $[o\alpha] = a$; soient ensuite B et C des points de la droite hyperbolique $o\omega$ pour lesquels $[oB] = b$ et $[oC] = c$; si les lignes εB et αC sont parallèles (ou si elles coïncident), $c : b = a : e$.

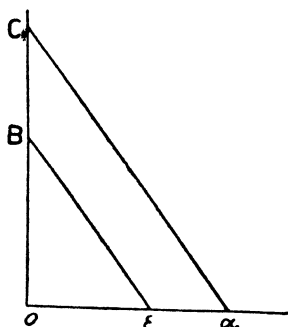


Fig. 17

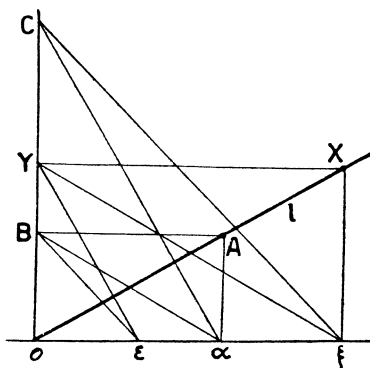


Fig. 18

Il résulte du théorème de *Pappus* (27) que la multiplication des segments est commutative et associative; en désignant par ab le produit de a et b on a donc les relations $ab = ba$ et $(ab)c = a(bc)$. On conclut de plus que la proportion $a : b = c : d$ est équivalente à l'égalité des produits $ad = bc$.

De la proposition 26 on obtient la règle distributive:

$$(a + b)c = ac + bc \quad \text{et} \quad c(a + b) = ca + cb.$$

Nous introduisons dans le pseudo-plan des *coordonnées rectangulaires* par le procédé suivant. Sur la ligne l_ω nous choisissons un point o et lui faisons correspondre la coordonnée $x = 0$. L'une des demi-lignes de l_ω déterminées par o sera appelée positive, l'autre négative. A tout point ξ de la ligne l_ω nous associons la coordonnée $x = a$ ou $x = -a$, suivant que ξ appartient à la demi-ligne positive ou négative, où $a = [o\xi]$ désigne la grandeur du segment $o\xi$. Considérons la ligne verticale passant

par o , appelons ses demi-lignes déterminées par o demi-lignes positive et négative, et associons à tout point Q de ces demi-lignes la coordonnée $y = b$ ou $y = -b$ en désignant par $b = [oQ]$ la grandeur du segment oQ . La ligne l_ω est l'axe x , et la verticale passant par o est l'axe y .

Si P est un point quelconque du pseudo-plan, menons les lignes verticale et horizontale par le point P , et désignons par x et y les coordonnées respectives attribuées à leurs points de rencontre avec les axes; nous associons au point P le couple (x, y) comme ses coordonnées.

Une conséquence immédiate de la définition est que pour tous les points d'une ligne verticale l'égalité $x = a$ est vérifiée où a signifie la coordonnée du point commun de cette ligne avec la ligne l_ω . Similairement pour toute ligne horizontale on a $y = b$.

Soit l une ligne oblique passant par le point o ; désignons par (a, b) les coordonnées d'un point A de l , et par (x, y) les coordonnées d'un autre point quelconque X de l . Menons les lignes horizontales et verticales par les points A et X et désignons par B et Y et par α et ξ leurs points de rencontre avec les axes (fig. 18). Soit ε le point de l'axe x dont la coordonnée est e (unité). Formons les produits des segments x et b , et des segments a et y ; désignons par C et C' les points de l'axe y pour lesquels $[oC] = xb$ et $[oC'] = ay$. Comme $\alpha B \parallel \xi Y$ (car chacune de ces deux lignes peut être transformée par des translations horizontales en la symétrique de la ligne oA par rapport à l'axe y), et comme, d'après la définition de multiplication, $\varepsilon B \parallel \xi C$ et $\varepsilon Y \parallel \alpha C'$, il résulte du théorème de Pappus que C coïncide avec C' ; par conséquent $xb = ay$, d'où l'on obtient $bx = ay$, vu la commutativité de la multiplication. Telles sont les équations des lignes passant par le point o .

Si l' est une ligne oblique quelconque, soit l la ligne parallèle à l' passant par o , et soit $bx = ay$ l'équation de l . Si (x, y) et (x', y') sont les coordonnées des points de rencontre d'une ligne horizontale quelconque avec l et avec l' , celles-ci sont liées par les équations $x' = x + c$, $y' = y$ où c désigne la coordonnée du point de rencontre de l' avec l'axe x . Par suite, l'équation de la ligne l' est la suivante: $b(x - c) = ay$. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant:

32. Avec les coordonnées (x, y) toute ligne du pseudo-plan s'exprime par une équation linéaire.

§ 11. Théorème de PYTHAGORE

33. Si α est un point de l'axe x , et A un point de l'axe y , et si B est le point du segment oblique αA tel que la ligne oB est perpendiculaire sur la

ligne αA , désignons par C le point de αA et par β le point de $o\alpha$ pour lesquels

$$[\alpha o] = [\alpha C] \quad \text{et} \quad [\alpha B] = [\alpha \beta];$$

sous ces conditions le point C appartient à la verticale passant par β et on a l'égalité

$$[\beta C] = [oB].$$

Le raisonnement suivant est relatif au plan hyperbolique. Comme les lignes équidistantes αB et oB sont perpendiculaires, d'après la définition de perpendicularité donnée dans le § 4, le point B appartient à la droite hyperbolique $o\alpha$ (fig. 19). Nous menons les droites hyperboliques perpendiculaires sur $\alpha\omega$ à partir du point B et à partir du bout o ; désignons leurs pieds par B_1 et C_1 ; soit β le bout de la demi-droite B_1B , et soit C le point commun de la demi-droite C_1o avec la ligne équidistante αA ; les segments hyperboliques CC_1 et BB_1 sont égaux: $CC_1 = BB_1$. Par la symétrie à la médiane du couple B_1, C_1 :

$$B_1 \rightarrow C_1, C_1 \rightarrow B_1, B \rightarrow C, C \rightarrow B; o \rightarrow \beta, \beta \rightarrow o, \alpha \rightarrow \omega, \omega \rightarrow \alpha;$$

la droite $oB\alpha$ est changée donc en la droite $\beta C\omega$; par conséquent, le point

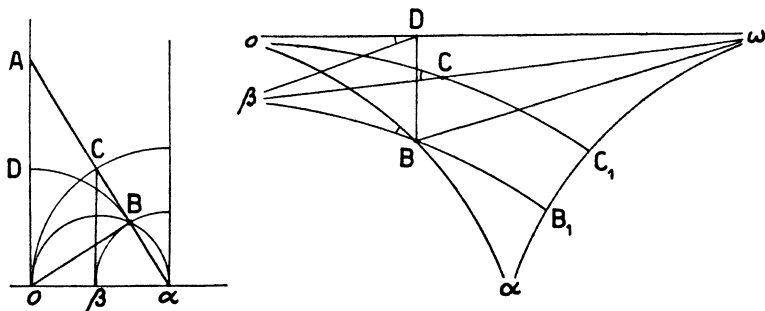


Fig. 19

C appartient à la droite $\beta\omega$; c'est la première partie de la proposition ci-dessus. La symétrie en question change entre eux les angles suivants qui sont donc égaux:

$$\sphericalangle oB\beta = \sphericalangle oC\beta.$$

Nous menons la perpendiculaire sur $o\omega$ par le point B , désignons son pied par D ; nous joignons le point B au bout ω par la demi-droite $B\omega$. Les angles $\sphericalangle oB\omega$ et $\sphericalangle \omega B\alpha$ sont complémentaires; leurs médianes BD et BB_1 sont donc perpendiculaires. En d'autres termes, la droite BD est

des points A et B et du bout o . Soient α' et β les bouts des demi-droites hyperboliques A_1A et B_1B ; soit ensuite C le point commun de la demi-droite hyperbolique C_1o avec la ligne équidistante αA (fig. 20). En vertu de la proposition 34 les lignes $\alpha' C$ et αC sont perpendiculaires, le point C appartient donc à la droite hyperbolique $\alpha' \alpha$, et d'après 33 on a $[A o] = [\alpha' C]$; de même: $[o B] = [\beta C]$. D'après les définitions $[\alpha A] = [\alpha \alpha']$ et $[\alpha B] = [\alpha \beta]$; on conclut de là, en considérant que l'ordre des points A, B, α sur la ligne αA et celui de α', β, α sur l_ω sont les mêmes, l'égalité suivante: $[AB] = [\alpha' \beta]$; finalement: $[\alpha o] = [\alpha C]$. Nous réunissons les trois égalités suivantes, que nous avons obtenues,

$$[A o] = [\alpha' C], \quad [A \alpha] = [\alpha' \alpha], \quad [o \alpha] = [C \alpha],$$

sous le signe de pseudo-congruence suivante:

$$[A o \alpha] \equiv [\alpha' C \alpha].$$

Des égalités ci-dessus, il résulte aussi:

$$[A B o] \equiv [\alpha' \beta C]. \quad (1)$$

Désignons par D le point commun de la ligne équidistante $\alpha' C$ avec la droite hyperbolique perpendiculaire sur $\alpha' \omega$ menée du bout α . Menons la droite hyperbolique perpendiculaire sur $\alpha' \omega$ par le point C et désignons par γ' son bout qui se trouve du même côté de la droite $\alpha' \omega$ que le point C . D'après les définitions on a $[\alpha' \alpha] = [\alpha' D]$ et $[\alpha' C] = [\alpha' \gamma']$. En vertu de la proposition 33 le point D appartient à la droite $\gamma' \omega$ et $[\alpha C] = [D \gamma']$. Nous obtenons ainsi $[\alpha' C \alpha] \equiv [\alpha' \gamma' D]$; cette relation jointe à la relation ci-dessus $[A o \alpha] \equiv [\alpha' C \alpha]$ donne:

$$[A o \alpha] = [\alpha' \gamma' D]. \quad (2)$$

Les lignes βC et $\gamma' D$ sont verticales, et le point C appartient à la ligne oblique $\alpha' D$; la proposition 29 nous amène donc à la proportion suivante:

$$[\alpha' D] : [\alpha' C] = [\alpha' \gamma'] : [\alpha' \beta] = [\gamma' D] : [\beta C]$$

qu'on peut écrire, en se servant des relations (1) et (2) sous la forme:

$$[A \alpha] : [A o] = [A o] : [A B] = [o \alpha] : [B o]. \quad (3)$$

En employant d'une façon similaire la proposition 29 aux triangles $A o \alpha$ et $C \beta \alpha$, on obtient la proportion:

$$[A\alpha] : [C\alpha] = [o\alpha] : [\beta\alpha] = [Ao] : [C\beta]$$

qu'on peut mettre, en se servant de la relation $[C\beta\alpha] \equiv [oB\alpha]$ sous la forme :

$$[A\alpha] : [o\alpha] = [o\alpha] : [B\alpha] = [Ao] : [oB]. \quad (4)$$

Nous déduisons de (3) et de (4) les égalités suivantes :

$$[Ao]^2 = [A\alpha] \cdot [AB] \quad \text{et} \quad [o\alpha]^2 = [A\alpha] \cdot [B\alpha],$$

d'où nous obtenons par addition :

$$[Ao]^2 + [o\alpha]^2 = [A\alpha] \cdot [AB + B\alpha] = [A\alpha]^2. \quad (5)$$

Si P, Q, R sont des points quelconques du pseudo-plan tels que la ligne PQ est horizontale, et la ligne QR verticale, désignons les grandeurs des segments PQ, QR, PR par a, b, c . Par une translation du pseudo-plan, nous pouvons changer le triangle PQR en un triangle αoA du type considéré ci-dessus. Comme la translation conserve les pseudo-distances, il résulte de la relation (5) qu'entre les segments a, b, c la relation suivante est valable :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Notre résultat est le *théorème de Pythagore* que nous énonçons sous la forme suivante :

35. Si PQ est un segment horizontal, et QR un segment vertical, les grandeurs a, b, c des segments PQ, QR, PR sont liées par la relation $a^2 + b^2 = c^2$.

Désignons par (x_1, y_1) et par (x_2, y_2) les coordonnées des points P et R ; a et b sont égales à $x_1 - x_2$ et à $y_1 - y_2$ à de signe près ; nous obtenons donc l'expression suivante de la pseudo-distance c des points P et R :

$$c^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

C'est l'expression de la distance euclidienne ; de la sorte, nous avons vérifié que la pseudo-géométrie que nous avons construite est identique à la géométrie euclidienne plane.

Nous faisons observer qu'on obtient de la deuxième partie de la proposition (4) la proposition suivante :

36. Si oA est une ligne verticale, et si les lignes oB et αA sont perpendiculaires, on a la proportion :

$$[Ao] : [o\alpha] = [oB] : [B\alpha].$$

§ 12. Le modèle de la géométrie hyperbolique dans le pseudo-plan

Le plan hyperbolique H est formé par le demi-plan euclidien $y > 0$ déterminé par l'axe x (qui est la ligne l_ω).

Les droites hyperboliques sont les demi-droites et les demi-circonférences euclidiennes perpendiculaires sur l'axe x . En effet les droites hyperboliques ayant le bout ω sont les demi-droites euclidiennes perpendiculaires sur l'axe x . Soit ensuite $\alpha\beta$ la droite hyperbolique ayant les bouts α et β (différents de ω). Nous menons à partir du bout ω la droite hyperbolique perpendiculaire sur $\alpha\beta$ et désignons son autre bout par γ . Les demi-droites euclidiennes issues du point γ de l'axe x sont les lignes équidistantes de la droite hyperbolique $\gamma\omega$. Désignons par C et par X les points de rencontre de la droite hyperbolique $\alpha\beta$ avec la droite hyperbolique $\gamma\omega$ et avec une de ses lignes équidistantes. D'après la définition de pseudo-distance donnée au § 5 $[\gamma X] = [\gamma C]$; cela signifie que les points C et X appartiennent à une même circonférence euclidienne de centre γ .

Nous avons démontré dans le § 2 que tout mouvement du plan hyperbolique peut être composé des mouvements suivants: a) demi-rotation autour d'un point C ; b) translations ayant pour base une droite hyperbolique a (appartenant au faisceau (a)); c) translations suivant les horocycles h du faisceau (a) .

Les translations du type c) sont les translations horizontales du plan euclidien exprimées avec les coordonnées x y par les formules:

$$x' = x + a, \quad y' = y.$$

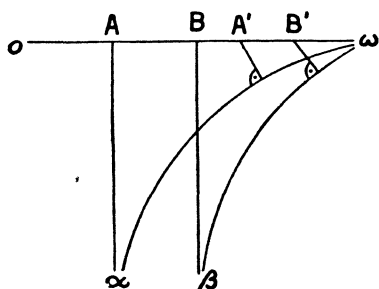


Fig. 21

Les translations du plan hyperbolique du type b) sont des *homothéties du plan euclidien* de centre situé sur l'axe x . Soient, en effet, A, A', B, B' des points de la droite hyperbolique $o\omega$ tels que les segments AB et $A'B'$ ont même sens et que $AB = A'B'$. Menons les demi-droites hyperboliques $A\alpha$ et $B\beta$ perpendiculaires sur $o\omega$ vers le même côté de $o\omega$

(fig. 21). La translation ayant pour base la droite $o\omega$ qui change A en A' transforme B en B' ; la translation ayant la même base qui change A en B , transforme: $A' \rightarrow B'$, $\alpha \rightarrow \beta$. Il résulte de là que la distance de A' à la droite $\alpha\omega$ est égale à la distance de B' à la droite $\beta\omega$, c'est-à-dire que les lignes équidistantes $\alpha A'$ et $\beta B'$ sont des lignes parallèles du pseudo-plan. D'après la définition on a donc la proportion:

$$[oA]:[oA'] = [oB]:[oB'].$$

Supposons, pour fixer les idées, que la droite hyperbolique $o\omega$ est l'axe y ($y > 0$) et désignons par a, a', y, y' les coordonnées des points A, A', B, B' ; de la proportion ci-dessus il résulte que

$$y:y' = a:a'.$$

Les lignes équidistantes de la droite hyperbolique $o\omega$, c'est-à-dire les demi-droites euclidiennes issues du point o sont transformées en elles-mêmes par la translation hyperbolique ayant pour base la droite $o\omega$. Les droites hyperboliques perpendiculaires sur $o\omega$, c'est-à-dire les demi-circconférences euclidiennes de centre o sont changées entre elles par la même transformation. Nous concluons de là, à la base de la proportion ci-dessus, que les coordonnées d'un point quelconque et de son image sont liées par la relation

$$x:x' = y:y' = a:a'.$$

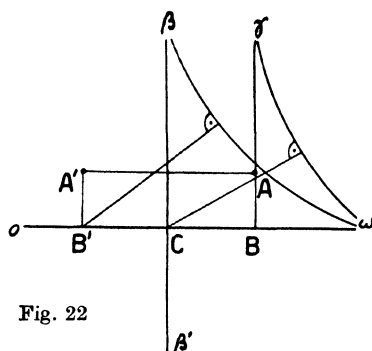
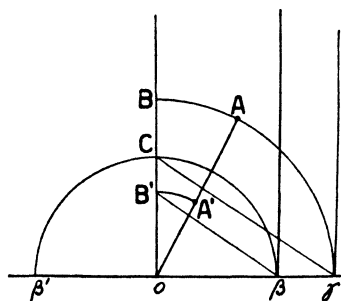


Fig. 22

Nous avons donc vérifié qu'une translation ayant pour base la droite $o\omega$ correspond dans le plan euclidien à une homothétie de centre o .

Soit C le point de l'axe y pour lequel $[oC] = e$ (unité). Dans le plan hyperbolique considérons la droite $o\omega$ et la droite perpendiculaire $\beta\beta'$ passant par le point C ; d'après définition: $[o\beta] = [o\beta'] = e$. La demi-rotation autour du point C du plan hyperbolique est le produit des symétries par rapport aux droites $\beta\beta'$ et $o\omega$ (fig. 22).

Soit A un point quelconque et A' son symétrique par rapport à la droite $\beta\beta'$. Les points A et A' appartiennent à une ligne équidistante de $o\omega$. Désignons par B et B' les pieds des perpendiculaires sur $o\omega$ menées par A et par A' ; ces points sont aussi symétriques par rapport à la droite $\beta\beta'$, d'où $B'C = CB$. Désignons par γ le bout de la demi-droite BA ; supposons, pour fixer les idées, que β et γ se trouvent d'un même côté de la droite $o\omega$. La translation ayant pour base la droite $o\omega$ qui change B' en C , change: $C \rightarrow B$, $\beta \rightarrow \gamma$, $\omega \rightarrow \omega$; il résulte que la distance de B' à la droite $\beta\omega$ est égale à la distance de C à la droite $\gamma\omega$. Les lignes équidistantes γC et $\beta B'$ sont donc des lignes parallèles du pseudo-plan et, par définition:

$$[oC] : [oB'] = [o\gamma] : [o\beta].$$

Comme $[oC] = [o\beta] = e$, $[oB'] = [oA']$ et $[o\gamma] = [oA]$, nous obtenons:

$$e : [oA'] = [oA] : e, \quad \text{d'où:} \quad [oA] \cdot [oA'] = e^2 = e.$$

En désignant par r et r' les pseudo-distances de A et de A' au point o et par (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives des points A et A' , nous avons donc les relations suivantes:

$$y : y' = x : x', \quad r \cdot r' = e, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2.$$

Ces formules expriment *l'inversion du plan euclidien par rapport au cercle unité*.

La symétrie du plan hyperbolique par rapport à la droite $o\omega$ correspond à la symétrie du demi-plan supérieur euclidien par rapport à l'axe y définie par les formules: $x' = -x$, $y' = y$.

La demi-rotation du plan hyperbolique autour du point C correspond donc à la transformation du plan euclidien produit de l'inversion par rapport au cercle unité et de la symétrie par rapport à l'axe y .

Nous sommes ainsi aboutis au résultat suivant:

37. *Le groupe des mouvements hyperboliques et engendré, dans sa représentation sur le plan euclidien, par les transformations suivantes:*

a) *produit de l'inversion par rapport au cercle unité et de la symétrie par rapport à l'axe y ;*

b) *homothéties de centre o ;*

c) *translations suivant l'axe x .*

Pour terminer, nous allons établir les conditions, relatives à la pseudo-géométrie euclidienne, de l'égalité de deux segments AB et $A'B'$ au sens de la géométrie hyperbolique.

Si A et B sont des points de la ligne verticale passant par le point β de l'axe x , désignons par A_1, B_1, β_1 les images de ces points obtenues par une translation horizontale. Les distances hyperboliques AB et A_1B_1 sont égales: $AB = A_1B_1$ et de même les distances euclidiennes: $[\beta A] = [\beta_1 A_1], [\beta B] = [\beta_1 B_1]$. Désignons ensuite par A_2, B_2 les images de A et de B obtenues par une translation du plan hyperbolique ayant pour base la droite $\beta\omega$; on a $AB = A_2B_2$. Comme cette translation correspond à une homothétie de centre β du plan euclidien, on a la proportion: $[\beta A]:[\beta B]=[\beta A_2]:[\beta B_2]$. De là nous concluons immédiatement que les segments hyperboliques AB et $A'B'$ appartenant aux droites $\beta\omega$ et $\beta'\omega$ respectivement sont égaux si $[\beta A]:[\beta B] = [\beta' A']:[\beta' B']$, et alors seulement.

Si AB est un segment de la droite hyperbolique $\alpha\beta$, soit β' l'autre bout de la droite hyperbolique perpendiculaire sur $\alpha\omega$ menée à partir du bout β . Les pseudo-distances $[\beta\alpha]$ et $[\beta'\alpha]$ sont égales, les points β et β' appartiennent donc à un cercle de centre α . Employons l'inversion par rapport à ce cercle et désignons par A' et B' les images des points A et B . Les points A' et B' sont les points de rencontre de la ligne verticale

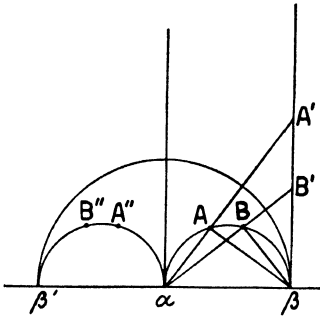


Fig. 23

passant par β avec les lignes obliques αA et αB (fig. 23). En vertu de la proposition 36 on a:

$$[A'\beta]:[\alpha\beta] = [A\beta]:[A\alpha] \quad \text{et} \quad [B'\beta]:[\alpha\beta] = [B\beta]:[B\alpha];$$

de là, il résulte:

$$[A'\beta]:[B'\beta] = [A\beta] \cdot [B\alpha]:[A\alpha] \cdot [B\beta].$$

Nous appelons l'expression à gauche *rapport* $(A'B'\beta)$, et celle à droite *rapport anharmonique* $(AB\beta\alpha)$.

La symétrie par rapport à la ligne verticale passant par α change

$$\alpha \rightarrow \alpha, \beta \rightarrow \beta', A \rightarrow A'', B \rightarrow B'' \quad \text{d'où} \quad (AB\beta\alpha) = (A''B''\beta'\alpha).$$

Le résultat obtenu peut être énoncé dans la proposition suivante :

38. Soient A, B et A', B' des points du demi-plan supérieur ; désignons par α, β et par α', β' les points communs de l'axe x avec les circonférences perpendiculaires sur l'axe x passant respectivement par les points A, B et A', B' . Les distances hyperboliques AB et $A'B'$ sont égales si les rapports anharmoniques $(AB\beta\alpha)$ et $(A'B'\beta'\alpha')$ sont égaux et alors seulement. En cas que A et B ou A' et B' se trouvent sur une droite euclidienne perpendiculaire sur l'axe x , il faut remplacer dans l'énoncé ci-dessus le rapport anharmonique respectif par le rapport $(AB\beta)$ ou $(A'B'\beta')$ ou β et β' désignent les points communs de la droite AB et $A'B'$ avec l'axe x .

Nous avons ainsi démontré que la géométrie hyperbolique plane définie par le système donné d'axiomes est identique au modèle, dû à Poincaré, construit dans le demi-plan euclidien supérieur.

(Reçu le 14 juillet 1940.)

Heptaeder aus verschiedenen Netzen

Von K. MERZ (Chur)

Das Oktaeder wird durch seine drei Achsenschnitte in acht Zellen zerlegt, von denen je vier Zellen in Scheitellage das Heptaeder bilden, das damit vier nur in Ecken zusammenstoßende Dreiecke besitzt und dazu als Flächen noch die drei Quadrate der Achsenschnitte, die einander in den drei Achsen als Doppelstrecken durchdringen, an denen die vier Lücken der vier herausgenommenen Zellen nach dem Schnittpunkt O einspringen. Das Heptaeder kann aus verschiedenen Netzen, an denen Oberseite o und Unterseite u zu unterscheiden sind, durch Aufklappung erhalten werden, wobei je zwei der Randseiten sich zu Kanten aneinanderfügen, und zwar entweder o an o oder o an u , wobei im letzteren Fall *Wendestrecken* bestehen, welche *Möbiusbänder* schließen. Je nach dem Netz erhalten die Wendestrecken verschiedene Anordnung am Heptaeder, wodurch an der Außenseite der einzelnen Zellen die Flächen verschieden in o und u gegen einander gewendet erscheinen. An der Gesamtfläche des Heptaeders als einseitig können Außen- und Innenseite nicht unterschieden werden, da an den Wendestrecken Übergänge zwischen den Netzseiten stattfinden. Im folgenden sind sieben verschiedene Netze des Heptaeders gezeichnet, wobei die Wendestrecken außer in Kanten auch in Doppelstrecken fallen. Ist ein Netz durch Versuch hergestellt, so erhält man daraus andere, indem man einzelne der Wendestrecken durch Ansetzen der zugehörigen dabei zu wendenden Fläche zum Verschwinden bringt, was die Entstehung anderer Wendestrecken zur Folge hat. Die Aufklappungen der Netze erfolgen um die punktierten inneren Seiten nach oben, um die übrigen entgegengesetzt.

1. *Drei Wendestrecken* an dem Kantendreieck einer Lücke entstehen aus dem Netz Abb. 1₁. Die Wendestrecken sind 1, 2, 3 und die dazu entsprechend windschiefen Doppelstrecken I, II, III, die sich in O als dreifachem Punkt schneiden. Jedes der drei Quadrate der Achsenschnitte ist im Netz durch eine der Doppelstrecken geteilt zur Ermöglichung der Durchdringungen am Modell, an dem diese beiden Teile wieder gleichzeitig o an o sich schließen, z. B. I an I, die dann zusammen in die inneren beiden Hälften I fallen. Am aufgeklappten Heptaeder zeigt die Lücke von 1, 2, 3 nach O die Unterseite des Netzes und ebenso die Gegenzelle zu dieser Lücke, während im übrigen außen o erscheint. Jede Zelle für sich besitzt als Flächen ein gleichseitiges Dreieck und drei Viertelflächen der Quadrate als rechtwinklige Dreiecke.

Im Netz Abb. 1₁ ist ein Streckenzug gezeichnet von P nach V auf o und von $(P) \equiv P$ nach (V) in u , so daß durch die Aufklappung V und (V) auf der Wendestrecke 3 zusammenfallen. Dabei wird P nach Abb. 1₂ ein Punkt auf der Außenseite einer Zelle auf o und der Streckenzug führt als $PQRSTUV$ weiter auf o nach dem Gegenpunkt $(P) \equiv P$ durch (V) (P) in u in der Innenseite der Zelle. Dieser Weg von P auf der Heptaederfläche zu (P) schneidet die Doppelstrecken in D_3, D_1 , und D_2 . Dabei liegt PQD_3 außen an der 1. Zelle, $D_3 RSD_1$ innen in der 2. Zelle, $D_1 TUD_2$ außen an der 3. Zelle und $D_2 V (P)$ innen wieder an der 1. Zelle. Dieser

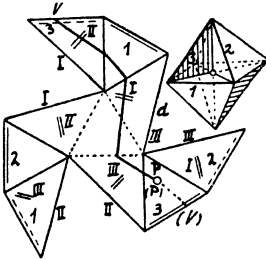


Abb. 1₁

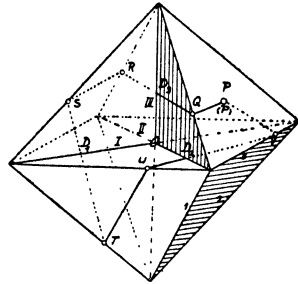


Abb. 1₂

Weg $P(P)$ verläuft also durch sechs Flächen, einzig das Dreieck an 2 wird gemieden wie auch die andern Flächenteile dieser Zelle. Gewendet erscheinen an der 3. Zelle eine Fläche, die mit RS und die drei anstoßenden Viertelflächen der Achsenschnitte und ferner gegenüber an der Lücke der Wendestrecken 1, 2, 3 nochmals drei Viertelflächen, also sind zusammen gewendet eine Fläche und sechs Viertelflächen, von den im ganzen 4 Flächen und 12 Viertelflächen des Heptaeders. Das Wendungsverhältnis nach Flächenzahl ist 5:14. Fährt man dem Streckenzug 1, 2, 3 der Wendungen nach, so liegen links davon die gewendeten Flächen, an denen außen u erscheint in der Lücke und an deren Gegenzelle, während rechts die Flächen mit o sich zeigen, bis an die Doppelstrecken hin, an denen o ins Innere der Gegenzelle eintritt. Damit ist die Verteilung der Netzseiten am Heptaeder bestimmt aus dem Verlauf der Wendestrecken.

2. Eine Doppelstrecke als Wendestrecke entsteht aus dem Netz Abb. 2, das erhalten wird, indem im Netz Abb. 1₁ die Wendestrecke 3 aufgehoben wird durch Ansetzung der zugehörigen Fläche unter Wendung. Dann bilden die Wendestrecken nach Abb. 2 als Viereck einen geschlossenen windschiefen Streckenzug, durch welchen die Endpunkte der im senkrechten Quadrat als Wendestrecke liegenden Doppelstrecke 3, 4 durch 5, 1, 2 verbunden sind. Links dieses Wendestrecken-zuges 1 bis 5 liegt o ,

wobei bei 3 als Doppelstrecke aber o ins Innere der darunter liegenden Zelle kommt. Die Zelle unter 4 zeigt o , wie auch die Flächen an 1 und 2 in der Lücke. Damit erscheinen eine Fläche und fünf Viertelflächen gewendet gegenüber den übrigen Flächen und das Wendungsverhältnis ist $9 : 28$. Die Aufklappung vom Netz Abb. 2 erfolgt um die drei inneren punktierten Seiten nach oben, bis die drei Punkte O in einen Punkt zusammenfallen, worauf die weiteren Klappungen entgegengesetzt gehen.

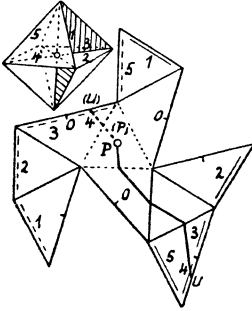


Abb. 2

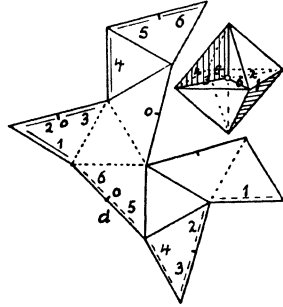


Abb. 3

3. *Zwei Doppelstrecken* als Wendestrecken entstehen aus dem Netz Abb. 3. An 2, 3 wenden sich die beiden Hälften des horizontalen Quadrates und an 5, 6 die eines vertikalen. Die Kanten 1 und 4 schließen den Wendestreckenzug zu einem überschlagenen Viereck mit O als Doppelpunkt. Links des Zuges, von außen gesehen, 1 bis 6 liegt u , das bei 2 und 5 in die Zellen fällt. Also wird u sichtbar an der Fläche über 1 und den beiden anstoßenden Viertelflächen, ferner an der ganzen Zelle unter 3 und 6 als mit einer Fläche und drei Viertelflächen und noch an der Viertelfläche an 4. Damit ist mit zwei Flächen und sechs Viertelflächen das Heptaeder halb gewendet $1 : 2$.

4. *Die drei Doppelstrecken* als Wendestrecken entstehen aus dem Netz Abb. 4, wobei durch die drei Kanten 1, 4, 7 noch als Wendestrecken, drei Dreiecke um O entstehen in den drei verschiedenen Achsenschnittebenen oder ein überschlagenes windschiefes Sechseck mit O als dreifachem Punkt. Am Streckenzug 1 bis 9 liegt rechts u , das bei 3, 6, 9 ins Innere der Zellen fällt; damit erscheint u an der ganzen Zelle zwischen 2, 5, 8 und noch an den Viertelflächen zwischen 2, 1 und 5, 4 und 8, 7, so daß gewendet erscheinen eine Fläche und sechs Viertelflächen im Verhältnis $5 : 14$ wie im 1. Fall.

5. *Zwei Doppelstrecken* werden zu Wendestrecken, nebst zwei Kanten, auch nach Netz Abb. 5, in welchem ein Quadrat ganz gelassen ist, ein

zweites ist halbiert und das dritte muß dann geviertelt werden zu den Dreiecken je mit einer Ecke O . Das Netz wird symmetrisch, aber dabei mit entgegengesetzten Klappungen. Um die punktierten Seiten nach

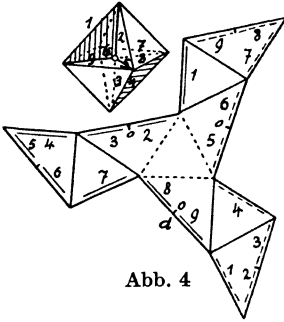


Abb. 4

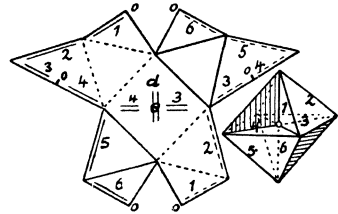


Abb. 5

oben geklappt, entstehen über dem Quadrat zwei Scheitelpyramiden einer Kreuzhaube und ebenso nach unten. Die Verteilung der Netzseiten ist wie im 3. Fall, doch ist die Aufklappung einfacher. Das Heptaeder wird wieder halb gewendet.

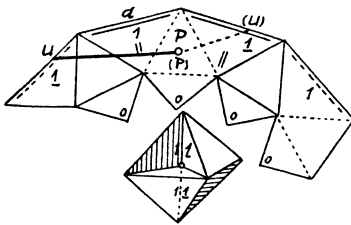


Abb. 6₁

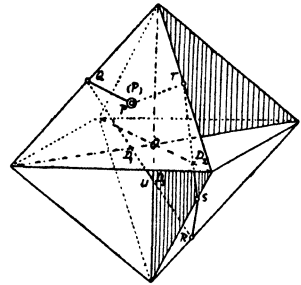


Abb. 6₂

6. Eine Doppelwendestrecke entsteht aus dem Netz Abb. 6₁ (S. 25)¹⁾. Zwei Achsenschnittquadrate sind halbiert, und sie wenden aufgeklappt beide o gegen u in $1 \equiv 1_1$. Das dritte Quadrat ist geviertelt und dessen Dreiecke schließen sich alle gleichseitig nach O . Je zwei Zellen, die an der Doppelwendestrecke zusammenstoßen, zeigen ganz die gleiche Netzseite, das eine Paar zeigt o , das andere u an allen seinen Flächen, womit die einfachste Verteilung der Netzseiten am Heptaeder eintritt und als halbgewendet. In diesem Netz Abb. 6₁ läßt sich ein einfacherer Weg als in Abb. 1₁ einzeichnen, um von einem Punkte P des Heptaeders zu seinem Gegenpunkt (P) zu gelangen. Er ist als PU in o und als $(P)(U)$ in u angenommen, so daß U und (U) durch die Aufklappung in der Doppel-

¹⁾ Karl Merz, Vielfache aus Scheitelzellen und Hohlzellen mit Abbildungen und Netzen. Kommissionsverlag F. Schuler, Chur 1939.

wendestrecke zusammenfallen. Auf dem Heptaeder Abb. 6₂ kommt (P) in u außen auf die 1. Zelle zu liegen, samt dem Weg (P) QD_1 , der dann weiter als D_1D_3 in das Innere der 2. Zelle in u führt, worauf in $D_3 \equiv U$ der Übergang nach o erfolgt, so daß $URSD_2$ außen in o an der 3. Zelle verläuft und dann D_2TP innen in o . Der Weg betritt also, wie der in Abb. 1₂, drei Zellen, aber er geht nur durch vier Flächen: durch zwei Seitenflächen mit P und RS und durch zwei Achsenschnitte QR und ST . Ein solcher Weg durch nur vier Flächen²⁾ kann auch aus anderen Netzen erhalten werden, wenn darin mindestens eine Doppelstrecke zugleich Wendestrecke ist, wie z. B. in den Netzen Abb. 2 und 7 eingezeichnet, als PU und (U) (P).

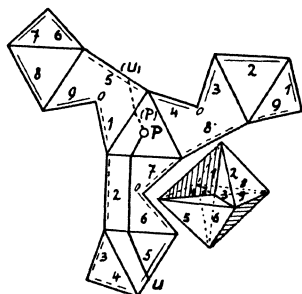


Abb. 7

7. Alle *halben Doppelstrecken* werden zu *Wendestrecken* aus dem Netz Abb. 7. Aus jedem der drei Achsenschnittquadrate ist ein Viertel längs Doppelstrecken herausgeschnitten. Die Klappungen erfolgen alle nach der gleichen Seite. Die Dreiviertelsquadrate, um die Fläche P geklappt, verschränken sich, wenn die drei O zusammenfallen. Dieses Netz hat noch die besondere Bedeutung, daß es sich für Prismatoide verallgemeinern läßt (S. 91)¹⁾.

Anmerkung: Das Heptaeder³⁾ läßt sich auch verallgemeinern aus dem Netz Abb. 6₁, durch Annahme von $2n$ gleichschenkligen Dreiecken und von n Quadraten durch die Achse als n -fache Wendestrecke und durch Ersetzung des zur Achse senkrechten Quadrates durch ein $2n$ -Eck. Es entstehen Polyeder wie Kreisel, die im Grenzfall zu einem gelockerten Doppelkegel führen, und die abwechselnd einseitig oder zweiseitig werden für n gerade oder ungerade.

²⁾ Hilbert, Anschauliche Geometrie, Seite 268. Berlin 1932.

³⁾ Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 8, p. 379, 1936.

(Eingegangen den 16. Juni 1940.)

Les réseaux Riemanniens

Par CHARLES BLANC (Lausanne)

On a montré¹⁾ comment on pouvait retrouver, pour des fonctions définies sur un ensemble discontinu de points, des propriétés absolument analogues à celles des fonctions analytiques d'une variable complexe; il s'agissait en particulier des propriétés du module d'une fonction analytique dans une région du plan, propriétés qui correspondent exactement à des propriétés des fonctions harmoniques.

Nous nous proposons ici d'élargir ces résultats, en introduisant des *réseaux Riemanniens*, analogues discontinus des surfaces de Riemann; ces réseaux se répartissent en deux types, que l'on peut encore appeler parabolique et hyperbolique; on peut également, en introduisant une certaine notion de courbure, retrouver une formule analogue à celle de Gauss-Bonnet sur les surfaces, et qui conduit à un critère de type assez précis.

§ 1. Les réseaux Riemanniens

Soit dans un plan un ensemble discontinu de points, sans point d'accumulation à distance finie: relient des points de cet ensemble par des arcs sans points communs autres que les points de l'ensemble considéré, et tels que deux arcs au moins aboutissent en chaque point donné. Nous appellerons cette figure un *réseau Riemannien*, ou plus simplement un *réseau*; dans la suite, nous serons amenés à faire deux restrictions à cette définition:

A. Le réseau décompose le plan en un ensemble de triangles (alors qu'en général il s'agit de polygones quelconques).

B. Le réseau peut être décomposé en une suite de polygones $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, la couronne comprise entre C_i et C_{i+1} étant traversée par les arcs du réseau.

On remarque sans peine que les réseaux déjà envisagés²⁾ vérifient la condition B. Le réseau formé en décomposant un plan en hexagones réguliers, puis en divisant chacun de ces hexagones en 6 triangles remplit les conditions A et B.

D'autre part, la condition A n'est pas essentielle: on pourrait remplacer

¹⁾ Ch. Blanc: Une interprétation élémentaire des théorèmes fondamentaux de M. Nevanlinna. Comm. Math. Helv. 12 (1939), 153—163. Ce travail sera désigné dans la suite par I.

²⁾ I, p. 153.

triangle par hexagone ou quadrilatère : il n'y aurait alors à apporter dans la suite que quelques modifications sans importance.

Réseau conjugué. A tout réseau E (ne satisfaisant pas nécessairement aux conditions A et B) correspond un réseau E^* , que nous appellerons *réseau conjugué*. On le construit de la façon suivante : à tout polygone élémentaire de E on fait correspondre un sommet de E^* , et à toute arête de E on fait correspondre une arête de E^* , reliant les deux sommets de E^* qui correspondent aux polygones de E séparés par l'arête envisagée. On pourra même définir un sens sur toute arête de E^* à partir d'un sens sur l'arête de E , en fixant une fois pour toutes un sens positif de rotation sur E .

§ 2. Fonctions pré-harmoniques sur un réseau

Considérons une région E d'un réseau Riemannien quelconque. En associant à chaque sommet P de E un nombre réel $u(P)$, on définit une *fonction* sur E . Nous dirons que cette fonction est *pré-harmonique*³⁾ en P si l'on a

$$\lambda(P) u(P) = \sum u(P'), \quad (2.1)$$

$\lambda(P)$ étant le nombre d'arêtes issues de P , et la somme étant étendue aux sommets P' de E voisins de P . Si $u(P)$ n'est pas p. h. en P , on posera

$$\beta_u(P) = \lambda(P) u(P) - \sum u(P').$$

Si $u(P)$ est p. h. en tous les sommets P de E , on dit qu'elle est p. h. dans E . On a sans autre le théorème :

Une fonction p. h. dans E atteint son maximum et son minimum sur le contour.

Cela permet de démontrer le

Théorème d'existence : Si l'on se donne une fonction $\alpha(P)$ sur le contour Γ de E , et une fonction $f(P)$ en tout point intérieur de E , il existe une fonction et une seule $u(P)$ telle que :

$$1^\circ u(P) = \alpha(P) \text{ sur } \Gamma;$$

$$2^\circ \beta_u(P) = f(P) \text{ dans } E.$$

En effet, il ne peut exister, en vertu du théorème du maximum, qu'une solution. Or la recherche de cette solution conduit à la résolution d'un

³⁾ Cette dénomination est due à M. G. Bouligand : Sur le problème de Dirichlet. Ann. Soc. Pol. Math. 1925, p. 59—112. Nous l'ignorions lors de la rédaction de I, où nous avons employé l'expression fonction harmonique. Nous écrirons désormais p. h. pour pré-harmonique.

système de n équations linéaires à autant d'inconnues; il suffit de montrer que le déterminant n'en est pas nul; on le vérifie en remarquant que ce déterminant ne dépend que de Γ , mais est indépendant du choix de $\alpha(P)$ et de $f(P)$. Prenons $\alpha(P) = a \neq 0, f(P) = 0$. La fonction $u(P) = a$ est alors solution, et elle est unique, donc le déterminant n'est pas nul.

Il résulte en particulier de ce théorème l'existence d'une fonction p. h. dans E , prenant des valeurs données sur le contour Γ . Cette fonction réalise le minimum de la somme $\sum [u(P) - u(Q)]^2$ étendue à toutes les paires de points voisins sur E . Pour la démonstration, voir I, p. 154.

Dérivée d'une fonction. On peut considérer, à côté des fonctions des sommets d'un réseau, des fonctions des arêtes. On dira qu'une fonction d'arête $f(q)$ est la *dérivée* d'une fonction $u(P)$ des sommets si

$$f(q) = u(P_2) - u(P_1) = u'(q),$$

P_1 et P_2 étant l'origine et l'extrémité de l'arête orientée q .

La somme $\sum u'(q)$ étendue aux arêtes d'un polygone fermé de E est nulle, si on prend pour origine d'une arête l'extrémité de l'arête précédente. Cela résulte sans autre du fait que la fonction $u(P)$ est uniforme. De plus, la somme $\sum u'(q)$ étendue aux arêtes issues d'un sommet P où $u(P)$ est p. h., est nulle, pour autant que l'on ait choisi pour toutes ces arêtes un sens convenable (par exemple en prenant P pour origine de toutes ces arêtes). La réciproque est vraie, elle est la définition même de la notion de fonction p. h.

On peut aussi parler d'une intégration: étant donnée une fonction $f(q)$ des arêtes d'un réseau telle que $\sum f(q) = 0$ si la somme est étendue aux arêtes d'un polygone fermé quelconque de E (en choisissant convenablement le sens de chaque arête), il existe une fonction $u(P)$ avec

$$u'(q) = f(q).$$

Il en existe même une infinité, la différence de deux d'entre elles étant une constante.

Prenons en effet en un point P_0 de E , $u(P_0) = 0$, et posons

$$u(P) = \sum f(q),$$

la somme étant étendue à un polygone reliant P_0 à P , les arêtes étant prises toutes dans le même sens. Le résultat ne dépend pas du polygone choisi, $u(P)$ est donc bien définie, et sa dérivée est $f(q)$.

Si, en plus de l'hypothèse sur $\Sigma f(q)$ étendue à tout polygone fermé, on suppose que cette somme étendue aux arêtes issues d'un sommet quelconque est nulle, les fonctions primitives $u(P)$ sont p. h.

Revenons sur l'hypothèse relative à la somme $\Sigma f(q)$ étendue aux arêtes d'un polygone fermé: *pour que cette somme soit toujours nulle, il suffit qu'elle le soit pour tous les polygones élémentaires.* Or, si l'on passe d'un réseau E au réseau conjugué E^* , on fait correspondre aux arêtes d'un polygone élémentaire de E les arêtes issues d'un sommet Q de E^* , et aux arêtes issues d'un sommet P de E les arêtes d'un polygone élémentaire de E^* . Considérons donc une fonction $f(q)$ sur les arêtes de E , dérivée d'une fonction $u(P)$ p. h. sur E ; à $f(q)$ sur E correspond une fonction $g(q^*)$ sur les arêtes de E^* , si l'on convient de poser $f(q) = g(q^*)$, où q et q^* sont deux arêtes correspondantes: *il en résulte que $g(q^*)$ à son tour est la dérivée d'une fonction p. h. sur E^* .* On appellera *fonction conjuguée* de $u(P)$ toute fonction $v(Q)$ ayant $g(q^*)$ pour dérivée.

L'uniformité de la fonction conjuguée $v(Q)$ résulte donc du fait que $u(P)$ est p. h. Il est intéressant de voir ce qui se passe lorsque $u(P)$ cesse d'être p. h. Toutes les propriétés envisagées étant additives, on peut supposer que $u(P)$ est partout p. h. excepté en un sommet P_0 où $u(P_0) = a$. La dérivée $f(q)$ de $u(P)$ est bien définie, sa somme étendue à un polygone fermé est nulle, et celle étendue aux arêtes issues d'un sommet P est nulle excepté en P_0 où elle est égale à a . Il en résulte pour la fonction $g(q^*)$ sur E^* que sa somme étendue à un polygone fermé simple entourant une fois P_0 dans le sens positif est égale à a et qu'elle est nulle si ce polygone n'entoure pas P_0 ; elle est nulle si elle est étendue aux arêtes issues d'un sommet Q ; $g(q^*)$ est par conséquent la dérivée d'une fonction $v(Q)$ p. h. et multiforme; cette fonction prend en chaque sommet une infinité de valeurs, dont la différence est toujours un multiple entier de a . On peut la rendre uniforme en sectionnant convenablement le réseau E^* ou en substituant à E^* un *réseau de recouvrement*.

§ 3. Type d'un réseau

On considérera dans ce paragraphe des réseaux au sens large, illimités en tout sens, sur lesquels il existe par conséquent une suite illimitée de contours $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ fermés simples, tout sommet du réseau étant intérieur à un tel contour, pour n assez grand.

Une fonction $u(P)$ est *normée* en P_0 si

$$u(P_0) = 0, \quad \beta_u(P_0) = -1.$$

Type d'un réseau : soit une suite de contours polygonaux fermés simples C_1, \dots, C_n, \dots d'un réseau, entourant un sommet P_0 ; soit $u_n(P)$ la fonction p. h. dans C_n excepté en P_0 où elle est normée, et constante sur C_n (cette fonction existe et est unique); soit $r_n = u_n(P)$ sur C_n . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \infty,$$

on dit que le réseau est du type parabolique; si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n < \infty,$$

le réseau est du type hyperbolique.

Il faut montrer que cette définition ne dépend ni de P_0 , ni, P_0 étant choisi, de la suite C_n . Montrons tout d'abord le second point. Supposons $\lim r_n = \infty$ et considérons une autre suite de contours fermés $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \dots$ et les valeurs correspondantes $\varrho_1, \dots, \varrho_n, \dots$. A tout contour C_n correspond un contour Γ_{v_n} extérieur à C_n ; on a par conséquent $\varrho_{v_n} > r_n$, d'où $\lim \varrho_n = \infty$.

Il reste à montrer que la définition est indépendante de P_0 . Supposons qu'il existe deux sommets, P_0 et P_1 donnant des types différents. Soit donc une suite de contours C_n entourant P_0 et P_1 , et $u_n(P)$ normée en P_0 et égale à r_n sur C_n , $v_n(P)$ normée en P_1 et égale à ϱ_n sur C_n . Supposons que r_n est borné.

La fonction

$$z_n(P) = [u_n(P) - r_n] - [v_n(P) - \varrho_n]$$

est nulle sur C_n ; $\beta_x(P_0) = -1$; $\beta_x(P_1) = +1$; ailleurs $z_n(P)$ est p. h. Il en résulte que $z_n(P_0) < 0$, $z_n(P_1) > 0$. Or

$$z_n(P_0) = -r_n + \varrho_n - v_n(P_0) < 0,$$

d'où

$$\varrho_n - v_n(P_0) < r_n \leq A$$

et

$$\varrho_n < v_n(P_0) + A.$$

Il s'ensuit que ϱ_n est borné. Considérons en effet un contour Γ , entourant P_1 , passant par P_0 et intérieur à C_n pour $n > n_0$; $v_n(P)$ est toujours positive sur ce contour. Soit alors $x(P)$ la fonction p. h. dans Γ , nulle sur Γ excepté en P_0 où $x(P_0) = 1$; soit ensuite $y(P)$ la fonction p. h. dans Γ excepté en P_1 où $\beta_y = 1$, et nulle sur Γ . On a, puisque $v_n(P) > 0$ sur Γ ,

$$v_n(P_1) > x(P_1) v_n(P_0) - y(P_1)$$

et, puisque $v_n(P_1) = 0$ et $x(P_1) > 0$,

$$v_n(P_0) < \frac{y(P_1)}{x(P_1)},$$

d'où

$$\varrho_n < A + \frac{y(P_1)}{x(P_1)};$$

le second membre ne dépend pas de n , on a donc

$$\lim \varrho_n < \infty.$$

Ainsi, le type d'un réseau est parfaitement déterminé.

Remarquons que nous avons démontré en passant le lemme suivant: *étant donné un domaine E d'un réseau, et deux sommets P_0 et P_1 dans E (P_1 éventuellement sur la frontière), il existe un nombre $K = K(E, P_0, P_1)$ tel que toute fonction $u(P)$ p. h. dans E excepté en P_0 où elle est normée, vérifie l'inégalité $u(P_1) < K$ si $u(P) \geq 0$ sur la frontière.*

On connaît des réseaux de l'un et l'autre types. Les réseaux introduits dans l'article I sont du type parabolique. On peut construire de la façon suivante un réseau du type hyperbolique. Prenons une suite illimitée de cercles C_1, \dots, C_n, \dots de centre P_0 et de rayon croissant. Prenons sur C_1 3 sommets que nous relierons à P_0 , puis sur C_2 6 sommets reliés chacun à un sommet de C_1 , de façon que de chaque sommet de C_1 partent 2 arêtes vers C_2 ; puis sur C_3 $3 \cdot 2^2$ sommets reliés de la même façon aux 6 sommets de C_2 , etc. La fonction

$$u(P) = \frac{1}{3} \left(1 + \sum_1^{n-1} \frac{1}{2^k} \right) \text{ si } P \text{ sur } C_n, \quad u(P_0) = 0$$

est p. h. sur tout le réseau excepté en P_0 où elle est normée. Elle est constante sur tout C_n et elle est bornée. Le réseau est donc hyperbolique.

Étant donné un réseau illimité E et un sommet P_0 de E , il existe toujours une fonction p. h. sur E et normée en P_0 ; cette fonction est bornée si E est hyperbolique.

Considérons en effet une suite de polygones C_n du réseau, et la suite correspondante des fonctions $u_n(P)$ normées en P_0 et constantes sur C_n . L'ensemble des sommets du réseau étant dénombrable, nous pouvons les appeler $P_0, P_1, \dots, P_k, \dots$. On a vu qu'une fonction de la suite $u_n(P)$, normée en P_0 vérifie en tout sommet de E une inégalité $u_n(P) < K(P)$,

$K(P)$ ne dépendant que de P , quel que soit n (mais à condition bien entendu que P soit intérieur à C_n). Il en résulte qu'on peut extraire de la suite $S_0: u_1, u_2, \dots$ une suite S_1 qui converge en P_1 vers une valeur finie $u(P_1)$; puis de S_1 une suite S_2 qui converge en P_2 vers $u(P_2)$, etc. Le procédé diagonal⁴) nous permet donc d'extraire de la suite S_0 une suite S qui converge dans tout le réseau vers une fonction $u(P)$, qui possède les propriétés requises; cette fonction est bornée si E est hyperbolique, puisqu'alors les fonctions $u_n(P)$ sont bornées dans leur ensemble.

Formule de Green. On peut établir pour toute région finie E d'un réseau une formule analogue à celle de Green. Soit Γ l'ensemble des sommets limitant E ; si $u(P)$ et $v(P)$ sont deux fonctions dans E , on a en tout point de $E^* = E - \Gamma$

$$u(P) \beta_v(P) - v(P) \beta_u(P) = -u(P) \sum v(P') + v(P) \sum u(P'),$$

les sommes étant étendues aux sommets voisins de P . Si on fait la somme des deux membres de cette relation pour tous les sommets de E^* , on obtient

$$\sum_{E^*} [u(P) \beta_v(P) - v(P) \beta_u(P)] = -\sum u(Q) v(P) + \sum v(Q) u(P),$$

les sommes du second membre étant étendues à tous les couples de sommets PQ , P sur Γ et Q voisin dans E^* . On peut écrire

$$-u(Q) v(P) + v(Q) u(P) = -[u(P) v'(q) - v(P) u'(q)],$$

q étant l'arête QP . On a donc

$$\sum_{E^*} u \beta_v - v \beta_u = -\sum [u(P) v'(q) - v(P) u'(q)], \quad (3.1)$$

où la somme du second membre est étendue à toutes les arêtes QP reliant E^* à Γ .

Il en résulte une formule permettant la résolution du problème de Dirichlet dans E . Soit en effet $G(P, Q)$ la fonction de P telle que $G(P, Q) = 0$ si P est sur Γ , $\beta_G(P) = 0$ excepté en Q où $\beta_G = -1$. En posant alors $v(P) = G(P, Q)$ dans la relation (3.1) il vient, si $u(P)$ est p. h. dans E ,

$$u(Q) = \sum_{\Gamma} u(P) G'(q, Q), \quad (3.2)$$

formule qui permet de résoudre le problème de Dirichlet dans E dès que l'on connaît les fonctions $G(P, Q)$.

⁴) Voir *P. Montel: Familles normales de fonctions analytiques*, p. 15—18.

Posons encore dans (3.1) $v(P) = 1$, d'où $\beta_v(P) = 0$ et soit $\beta_u(P) = 0$ excepté en P_0 où $\beta_u(P_0) = -1$. Alors

$$1 = \sum_{\Gamma} u'(q) . \quad (3.3)$$

Cette relation s'établirait plus simplement en partant du fait que la fonction conjuguée de $u(P)$ est multiforme.

On en déduit un théorème précis sur le type d'une catégorie assez restreinte de réseaux. Soit un réseau E formé d'un sommet P_0 et d'une suite illimitée de cercles C_1, \dots, C_n, \dots de rayons croissants reliés entre eux par des arêtes, les nombres d'arêtes issues d'un sommet de C_n vers C_{n+1} et vers C_{n-1} étant les mêmes pour tous les sommets de C_n . Par symétrie il existe une fonction $u(P)$ normée en P_0 , p. h. sur tout le reste de E et constante sur chaque C_n . Soient u_n la valeur de $u(P)$ sur C_n , $\nu(n)$ le nombre de sommets de C_n , enfin $\sigma(n)$ le nombre d'arêtes issues d'un sommet de C_n vers C_{n-1} . On a

$$1 = \sum_{C_n} u'(q) = \nu(n) \sigma(n) (u_n - u_{n-1})$$

et

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{\nu(n) \sigma(n)} ,$$

d'où, en sommant

$$u_n = \sum_1^n \frac{1}{\nu(i) \sigma(i)} .$$

Si la série $\sum \frac{1}{\nu(n) \sigma(n)}$ diverge, le type est parabolique; si elle converge, il est hyperbolique.

Les exemples de réseaux qui ont été donnés correspondent le premier (voir I) à $\nu(n) = p$ (= constante), $\sigma(n) = 1$; le second à $\nu(n) = 3 \cdot 2^{n-1}$, $\sigma(n) = 1$.

On remarquera que la précision du résultat a été obtenue grâce à une hypothèse très forte de symétrie pour E . Il s'agit là d'un fait général qui a déjà été signalé: il est impossible de donner un critère de type reposant uniquement sur le degré de ramification.

§ 4. Un lemme sur le type d'un réseau

Considérons maintenant des réseaux dans un sens plus étroit: nous supposons qu'ils remplissent la condition B . Appelons alors E_n la partie du réseau E formée de P_0 et de C_1, \dots, C_n ; soit sur E_n une fonction $u(P)$

normée en P_0 , et p. h. ailleurs: nous nous proposons d'évaluer $\sum_{E_{n-1}} u'^2(q)$, cette somme étant étendue à toutes les arêtes reliant deux sommets de E_{n-1} . On a, si $q = P_1 P_2$,

$$u'(q) = u(P_2) - u(P_1) = v(Q_2) - v(Q_1),$$

où Q_1 et Q_2 sont les deux sommets du réseau conjugué qui correspondent à P_1 et P_2 , et $v(Q)$ une fonction conjuguée de $u(P)$ (cette fonction est multiforme: elle interviendra toujours par des différences au sujet desquelles il n'y a aucune ambiguïté). On a alors

$$u'^2(q) = [u(P_2) - u(P_1)] [v(Q_2) - v(Q_1)],$$

et en faisant la somme pour toutes les arêtes PP' issues d'un sommet P de E_{n-1} :

$$\sum_P u'^2(q) = \sum_P u(P') [v(Q_2) - v(Q_1)]$$

puisque, si $P \neq P_0$, $\sum [v(Q_2) - v(Q_1)] = 0$ et $u(P_0) = 0$.

Donc, si $P = P_0$

$$\sum_{P_0} u'^2(q) = \sum_{C_1} u(P) u'(q) \quad (4.1)$$

où il faut entendre par q l'arête PP_0 . Ensuite, si $i \leq n-1$,

$$\begin{aligned} \sum_{C_i} \sum_P u'^2(q) &= \sum_{C_{i+1}} [u(P) \underline{\sum}_P u'(q)] + \sum_{C_{i-1}} [u(P) \overline{\sum}_P u'(q)] + \\ &+ \sum_{C_n} [u(P) \sum'_P u'(q)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $\underline{\sum}_P u'(q)$ est étendue aux arêtes PP' de P vers l'intérieur, $\overline{\sum}_P u'(q)$ aux arêtes PP' de P vers l'extérieur et $\sum'_P u'(q)$ aux arêtes $P'P$ et PP'' sur le contour C_i passant par P .

Si maintenant nous faisons la somme de (4.1) et de (4.2) pour i allant de 1 à $(n-1)$, nous obtenons

$$\sum_{E_{n-1}} \sum_P u'^2(q) = \sum_{C_n} [u(P) \underline{\sum}_P u'(q)] + \sum_{C_{n-1}} [u(P) \overline{\sum}_P u'(q)]$$

en tenant compte du fait que

$$\overline{\sum}_P u'(q) + \underline{\sum}_P u'(q) + \sum'_P u'(q) = 0.$$

Or

$$\sum_{E_{n-1}} \sum_P u'^2(q) = 2 \sum_{E_{n-1}} u'^2(q) + \sum_{C_{n-1}} \bar{u}'^2(q)$$

où $\bar{u}'^2(q)$ est étendue aux arêtes de C_{n-1} vers C_n , donc

$$2 \sum_{E_{n-1}} u'^2(q) = \sum_{C_n} [u(P) \sum_P u'(q)] + \sum_{C_{n-1}} [u(P) \bar{u}'^2(q)] - \sum_{C_{n-1}} u'^2(q). \quad (4.3)$$

On peut simplifier cette relation. Supposons que $u(P) = r_n$ (= constante) sur C_n . Alors

$$2 \sum_{E_{n-1}} u'^2(q) = r_n + \sum_{C_{n-1}} [u(P) \bar{u}'^2(q)] - \sum_{C_{n-1}} u'^2(q)$$

puisque $\bar{u}'^2(q) = \sum_{C_i} u'(q) = 1$. Mais sur C_{n-1} $u(P) = r_n - u'(q)$, donc dans ce cas

$$\sum_{E_{n-1}} u'^2(q) = r_n - \sum_{C_{n-1}} u'^2(q)$$

ou encore, puisque $u'(q) = 0$ sur C_n ,

$$\sum_{E_n} u'^2(q) = r_n. \quad (4.4)$$

Si enfin E est du type hyperbolique, r_n est borné, d'où le lemme :

Soit E un réseau remplissant la condition B : s'il est du type hyperbolique, il existe une fonction $u(P)$ normée en P , p. h. sur le reste du réseau et telle que

$$\sum_E u'^2(q) = A (< \infty).$$

Cette fonction est celle qui a été définie au cours du § 3.

La réciproque est immédiate.

§ 5. Une formule analogue à la formule de Gauss-Bonnet

Il s'agira ici de réseaux au sens étroit, vérifiant les conditions A et B .

Par définition, la courbure d'un réseau en un point P sera la quantité

$$\gamma(P) = 6 - \lambda(P). \quad (5.1)$$

Soit $\nu(n)$ le nombre de sommets sur C_n et, si P est sur C_n , $\bar{\lambda}(P)$ et $\lambda(P)$ les nombres d'arêtes issues de P vers C_{n+1} resp. vers C_{n-1} . On a $\bar{\lambda}(P) = 2 + \bar{\lambda}(P) + \lambda(P)$ et $\gamma(P) = 4 - \bar{\lambda}(P) - \lambda(P)$. De plus, si $n > 1$,

$$\sum_{C_n} \lambda(P) = \sum_{C_{n-1}} \bar{\lambda}(P) = \nu(n-1) + \nu(n),$$

et si $n = 1$

$$\sum_{C_1} \lambda(P) = \nu(1).$$

Faisons la somme de $\gamma(P)$ sur E_n

$$\begin{aligned} \sum_{E_n} \gamma(P) &= 6 - \nu(1) + 4\nu(1) - [\nu(1) + \nu(2)] - \nu(1) - \sum_2^n \sum_{C_i} [\bar{\lambda}(P) + \underline{\lambda}(P)] \\ &= 6 - \nu(n+1) + \nu(n), \end{aligned}$$

donc

$$[\nu(n+1) - \nu(n)] + \sum_{E_n} \gamma(P) = 6. \quad (5.2)$$

La somme étendue à tout E_n joue le rôle de l'intégrale de la courbure totale. Le premier terme $[\nu(n+1) - \nu(n)]$ peut être interprété comme un accroissement de longueur: on sait que, suivant des conventions convenables, c'est ce que représente l'intégrale de la courbure géodésique.

Remarquons encore que la définition même de la courbure est la réduction à un point de la formule (5.2). On peut établir, parallèlement, une relation entre la courbure totale en un point P d'une surface et la longueur $l(r)$ du contour limitant les points de cette surface dont la distance à P est inférieure à r : cette relation peut même être prise pour définition de la courbure totale.

§ 6. Un critère de type en relation avec la courbure

Il s'agit encore de réseaux au sens restreint.

Si la somme $\sum \gamma(P)$ étendue aux sommets d'un réseau est bornée inférieurement, le réseau est du type parabolique.

Soit $u(P)$ une fonction normée en P_0 , p. h. sur le reste de E . On a vu que

$$\overline{\sum_{C_n} u'(q)} = 1.$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, on en tire

$$1 \leq \left[\overline{\sum_{C_n} |u'(q)|} \right]^2 \leq [\nu(n) + \nu(n+1)] \overline{\sum_{C_n} u'^2(q)}.$$

D'autre part, en vertu du théorème du § 5 et de l'hypothèse sur $\sum \gamma(P)$

$$\sum_{E_n} \gamma(P) = 6 + \nu(n) - \nu(n+1) > -K_1$$

d'où

$$\nu(n+1) < \nu(n) + 6 + K_1 < nK_2$$

pour $n > n_0$. Donc

$$\overline{\sum_{C_n} u'^2(q)} \geq \frac{1}{\nu(n) + \nu(n+1)} > \frac{K_3}{n},$$

d'où il résulte que $\sum_E u'^2(q)$ diverge. D'après le lemme du § 4, la surface est alors parabolique.

§ 7. Une inégalité isopérimétrique sur les réseaux

On sait qu'il existe, pour toute courbe fermée plane une inégalité liant la longueur de cette courbe et l'aire comprise à l'intérieur. M. F. Fiala⁵⁾ a énoncé une inégalité plus générale, relative aux courbes fermées tracées sur une surface dont la courbure totale n'est jamais négative.

On peut établir une inégalité analogue pour les réseaux, en faisant comme plus haut les hypothèses restrictives A et B sur ces réseaux.

Si la courbure est toujours non négative, on a

$$\nu(n+1) - 2\nu(n) + \nu(n-1) \leq 0. \quad (7.1)$$

En effet, en tout point P de C_n , $\underline{\lambda}(P) + \bar{\lambda}(P) \leq 4$ d'où

$$\nu(n+1) + 2\nu(n) + \nu(n-1) \leq 4\nu(n).$$

Appelons maintenant $F(n)$ le nombre de triangles du réseau intérieurs à C_n . Alors, *si la courbure est toujours non négative,*

$$\nu^2(n) \geq F(n) [\nu(n) - \nu(n-1)]. \quad (7.2)$$

Soit, en effet $\Delta F(n) = F(n) - F(n-1)$. On a, si $n > 1$, $\Delta F(n) = \nu(n) + \nu(n-1)$, d'où

$$\Delta F(n) [\nu(n) - \nu(n-1)] = \nu^2(n) - \nu^2(n-1),$$

et si $n = 1$ $\Delta F(1) = \nu(1)$, d'où $\Delta F(1) \nu(1) = \nu^2(1)$.

En faisant la somme de 1 à n

$$\nu^2(n) = \Delta F(1) \nu(1) + \sum_2^n \Delta F(i) [\nu(i) - \nu(i-1)].$$

On peut transformer la somme du second membre au moyen d'un artifice inspiré de l'intégration par parties. Un calcul simple montre que l'on a

$$\sum_1^n (a_i - a_{i-1}) b_i = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_1^n (b_i - b_{i-1}) a_{i-1},$$

donc ici, en posant $F(0) = 0$, $\nu(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \nu^2(n) &= \sum_1^n \Delta F(i) [\nu(i) - \nu(i-1)] \\ &= F(n) [\nu(n) - \nu(n-1)] - \sum_1^n [\nu(i) - 2\nu(i-1) + \nu(i-2)] F(i-1). \end{aligned}$$

⁵⁾ F. Fiala: Une inégalité isopérimétrique sur les surfaces ouvertes à courbure positive. C. R. Acad. Sc. Paris 209 (1939), 821—823.

La somme du second membre est, on vient de le voir, toujours inférieure ou égale à zéro, donc

$$\nu^2(n) \geq F(n) [\nu(n) - \nu(n-1)].$$

On peut remplacer $\nu(n) - \nu(n-1)$ au moyen de la formule (5.2), et on obtient

$$\nu^2(n) \geq F(n) \left[6 - \sum_{E_{n-1}} \gamma(P) \right]. \quad (7.3)$$

Cette relation peut être généralisée. Si l'on ne fait plus aucune hypothèse sur $\gamma(P)$, on a en tout point

$$\underline{\lambda}(P) + \bar{\lambda}(P) = 4 - \gamma(P)$$

d'où

$$\nu(n+1) - 2\nu(n) + \nu(n-1) = - \sum_{C_n} \gamma(P),$$

et, en introduisant ce terme dans l'expression de $\nu^2(n)$

$$\nu^2(n) = F(n) [\nu(n) - \nu(n-1)] + \sum_1^{n-1} \left[F(i) \sum_{C_i} \gamma(P) \right],$$

ou encore, d'après la formule (5.2)

$$\nu^2(n) = 6F(n) - \sum_1^{n-1} \{ [F(n) - F(i)] \sum_{C_i} \gamma(P) \}.$$

Revenons aux réseaux pour lesquels la courbure est toujours non-négative. La somme $\sum_{E_n} \gamma(P)$ est une fonction non décroissante de n ; il résulte alors de la formule (5.2) que si pour une valeur de n $\sum_{E_n} \gamma(P) > 6$, la suite $\nu(n)$ est décroissante (au sens strict), et le réseau est limité. Donc *sur un réseau illimité à courbure non négative, on a toujours $\sum \gamma(P) \leq 6$.*

Soit alors $C = \lim_{E_n} \sum \gamma(P)$ et n_0 la plus petite valeur de n pour laquelle $\sum_{E_n} \gamma(P) = C$. On a, pour $n > n_0$

$$\nu(n) = (n - n_0) (6 - C) + K,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(n)}{n} = 6 - C.$$

De la même façon

$$\lim \frac{F(n)}{n^2} = 6 - C$$

et

$$\lim \frac{\nu^2(n)}{F(n)} = 6 - C .$$

M. Fiala a obtenu⁶⁾ des relations semblables pour des surfaces à courbure non négative.

En conclusion, il semble que les réseaux se prêtent, surtout quant à leurs propriétés globales, à une étude analogue à celle des surfaces: en particulier, l'étude des fonctions p. h. sur un réseau conduit à des résultats qui traduisent assez bien, en termes finis, les propriétés de type des surfaces de Riemann.

⁶⁾ Loc. cit., p. 823.

(Reçu le 25 juillet 1940.)

Note relative à l'article:

Sur les nombres de classes de certains corps quadratiques¹⁾

Par PIERRE HUMBERT, Lausanne

M. Nagell nous fait savoir que le théorème 2 p. 241 a été démontré par lui en 1921 dans un travail intitulé „Über die Klassenzahl imaginärquadratischer Zahlkörper“ et publié dans les „Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität“ Band 1, Seite 140—150.

M. Nagell signale en outre l'identité

$$4P^4 + 1 = (2P^2 + 2P + 1)(2P^2 - 2P + 1),$$

à laquelle m'ont déjà rendu attentif M. M. Bucher, de Lucerne et Trost, de Zurich, identité qui rend banale la conséquence que j'ai déduite à la fin de mon article.

¹⁾ Voir ce journal vol. 12, pag. 233.

(Reçu le 10 octobre 1940.)

Sur le groupe des homographies et des antihomographies d'une variable complexe

Par B. de KERÉKJÁRTÓ, Budapest

À M. Élie Cartan
en témoignage de haute estime.

Dans le présent mémoire, je démontrerai le théorème suivant concernant la caractérisation topologique du groupe des homographies et des antihomographies d'une variable complexe.

Théorème. *Soit G' un groupe de transformations topologiques de la surface d'une sphère en elle-même tel qu'à deux triples quelconques de points $(A^\circ, B^\circ, C^\circ)$ et (A, B, C) correspondent deux et seulement deux transformations de G' qui changent le triple $(A^\circ, B^\circ, C^\circ)$ en (A, B, C) et qui varient continuellement avec le triple (A, B, C) . Le groupe G' est homéomorphe au groupe des homographies et des antihomographies d'une variable complexe.*

Dans un mémoire intitulé „*Sur le caractère topologique du groupe homographique de la sphère*“ (à paraître dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*) j'ai démontré le théorème suivant :

Théorème. *Si G est un groupe de transformations topologiques d'une surface en elle-même tel qu'à deux triples quelconques de points $(A^\circ, B^\circ, C^\circ)$ et (A, B, C) correspond une transformation de G et une seule qui change le triple $(A^\circ, B^\circ, C^\circ)$ en (A, B, C) et qui varie continuellement avec le triple (A, B, C) , le groupe G est homéomorphe au groupe des homographies d'une variable complexe.*

De ce dernier théorème on peut déduire facilement le premier ; mais la démonstration du théorème sur le groupe homographique utilise des moyens assez difficiles tels que l'énumération des groupes continus connexes d'ordre 2. Vu l'importance du groupe G' des homographies et des antihomographies dans la géométrie projective de la droite complexe¹⁾, il est intéressant d'observer que la caractérisation directe du groupe G' peut être démontrée, sans supposer la continuité du groupe, par des méthodes plus faciles que nous allons développer.

1. Soient T et T' les deux transformations du groupe G' qui changent le triple $(A^\circ, B^\circ, C^\circ)$ en (A, B, C) . La transformation $T^{-1}T' = \Sigma$ laisse les points A, B, C invariants de même que l'identité I et la transformation Σ^2 de G' ; il y a parmi ces trois transformations deux qui sont iden-

¹⁾ Voir à ce sujet l'œuvre de Élie Cartan : *Leçons sur la Géométrie Projective Complexe*. Paris, 1931.

tiques, d'où $\Sigma^2 = I$. La transformation involutive Σ admettant 3 points invariants est homéomorphe à une symétrie²⁾; ses points invariants forment une courbe simple et fermée passant par A, B, C que nous appellerons *cercle déterminé* par ces 3 points; la transformation Σ sera appelée *symétrie* par rapport à ce cercle. Il résulte que *par trois points quelconques passe un cercle et un seul*.

Deux cercles quelconques k et k' passant par les points A et B se croisent dans ces points; cela veut dire que le cercle k sépare les deux arcs c'_1 et c'_2 de k' déterminés par les points A et B , et inversement k' sépare les arcs c_1 et c_2 de k déterminés par A et B . Autrement la courbe $c_1 + c'_2$ séparerait les arcs c_2 et c'_1 (pour un choix convenable des indices); en désignant par A' et B' deux points de c'_1 et par C' un point de c_2 , différents de A et de B , le cercle passant par A', B', C' aurait donc au moins 3 points communs avec l'un des cercles k et k' ; c'est une contradiction. Nous en concluons que *le faisceau des cercles passant par les points A et B est placé comme le faisceau des grands cercles passant par deux points opposés de la sphère*.

La transformée de la symétrie Σ par une transformation quelconque de G' est une symétrie; par conséquent, *le système des cercles est changé en lui-même par toute transformation du groupe G'* .

Des deux transformations T et T' qui changent $(A^\circ, B^\circ, C^\circ)$ en (A, B, C) l'une, T , conserve le sens, l'autre $T' = T \cdot \Sigma$ le change en le sens opposé. Les transformations de G' qui conservent le sens forment un *sous-groupe G* de G' qui est *triple ment transitif* sur la sphère: à deux triples quelconques $(A^\circ, B^\circ, C^\circ)$ et (A, B, C) correspond une transformation de G et une seule qui change $(A^\circ, B^\circ, C^\circ)$ en (A, B, C) .

2. Soit U un point de la sphère; nous l'appellerons *point à l'infini*; les cercles passant par U seront aussi appelés *droites*. Par deux points quelconques A et B , différents de U , passe une droite et une seule.

Si A et B sont deux points différents de U , il y a deux transformations σ et Σ dans G' qui échangent entre eux A et B et laissent U invariant. Ces deux transformations sont involutives; l'une d'elles, σ , conserve le sens; l'autre, Σ , est une symétrie par rapport à une droite l . En désignant par Σ' la symétrie par rapport à la droite l' passant par A et B , on obtient la relation $\sigma = \Sigma' \cdot \Sigma$. La transformation involutive σ conservant le sens est homéomorphe à une demi-rotation; elle admet deux points invariants U et O . Comme σ change la droite l' en elle-même, le point O

²⁾ Voir *B. von Kerékjártó: Vorlesungen über Topologie*. Berlin, 1923. pag. 223 et seq.

appartient au segment AB de la droite l' . Nous appelons O milieu du segment AB , et $\sigma = \sigma_{OU}$ demi-rotation autour des points O, U .

Il n'y a aucune autre transformation involutive dans le groupe G qui admet les points invariants O et U . Si σ' était une autre, désignons par $B' = \sigma'(A)$ l'image d'un point arbitraire A obtenue par σ' , et par $A' = \sigma(B')$ l'image de B' obtenue par σ . Soit T la transformation de G qui change A en A' et laisse B' et U invariants. La transformée de σ' par T , c'est-à-dire la transformation $\sigma'' = T^{-1}\sigma'T$ conserve le sens, admet le point invariant U et échange entre eux les points A' et B' de même que la transformation σ ; il résulte de là que σ'' est identique à σ . Par suite, le point invariant $O' = T(O)$ de σ'' est identique à O . La transformation T qui admet 3 points invariants, B', U et O , est l'identité; par conséquent: $\sigma = \sigma'' = T^{-1}\sigma'T = \sigma'$.

A un couple quelconque C, D correspond une demi-rotation autour de ce couple et une seule. Soit en effet T une transformation de G qui change O en C et U en D ; la transformée de la demi-rotation σ_{OU} par T , c'est-à-dire $T^{-1}\sigma_{OU}T = \sigma_{CD}$ est la demi-rotation autour du couple C, D .

3. Les demi-rotations σ sont liées entre elles par la *reciprocité* suivante:

Si la demi-rotation σ_{CD} échange entre eux les points C' et D' , la demi-rotation $\sigma_{C'D'}$ échange entre eux les points C et D .

La demi-rotation σ_{CD} change le cercle k passant par les points C, D et C' en lui-même, par suite D' appartient à ce même cercle k . La transformation τ du groupe G qui change le triple de points (C, D, C') en (C', D', C) transforme le cercle k en lui-même. Comme le couple C, D sépare sur le cercle k les points C' et D' , il résulte que les points D et D' appartiennent à un même arc CC' de k . La transformation τ qui échange entre eux les points C et C' et transforme D en D' change, par conséquent, chacun des arcs de k déterminés par les points C et C' en lui-même et admet sur chacun un point invariant P et Q . Le carré de τ admet 4 points invariants P, Q, C, C' , donc $\tau^2 = I$. La transformation involutive τ échange entre eux les points C et C' de même D et D' . La transformée $\tau^{-1}\sigma_{CD}\tau$ de σ_{CD} par τ est involutive; ses points invariants sont $C' = \tau(C)$ et $D' = \tau(D)$; par suite:
$$\tau^{-1}\sigma_{CD}\tau = \sigma_{C'D'}$$
.

L'expression à gauche montre que la demi-rotation $\sigma_{C'D'}$ échange entre eux les points C et D .

4. Nous appellerons les cercles k et k' passant par les points C et D *perpendiculaires* si la symétrie Σ_k par rapport au cercle k change le cercle

k' en lui-même. Il y a un cercle k' et un seul passant par les points C et D de k qui est perpendiculaire sur k . Si k' est perpendiculaire sur k , le produit des symétries Σ_k et $\Sigma_{k'}$ est la demi-rotation σ_{CD} autour des points communs de k et de k' (voir § 2); comme $\sigma_{CD} = \sigma_{CD}^{-1} = \Sigma_{k'} \cdot \Sigma_k$, il résulte que la symétrie $\Sigma_{k'}$ par rapport à k' change le cercle k en lui-même.

Toute transformation de G' change deux cercles perpendiculaires en deux cercles perpendiculaires. Soient en effet k et k' deux cercles perpendiculaires aux points communs C et D , et soient $k_1 = T(k)$, $k'_1 = T(k')$ leurs images obtenues par la transformation T de G' . $\Sigma_{k_1} = T^{-1} \Sigma_k T$, et $\Sigma_{k'_1} = T^{-1} \Sigma_{k'} T$ sont les symétries par rapport à k_1 et k'_1 ; de la relation $\Sigma_k \cdot \Sigma_{k'} = \sigma_{CD}$ découle: $T^{-1} \Sigma_k T \cdot T^{-1} \Sigma_{k'} T = T^{-1} \sigma_{CD} T$; cette relation signifie que $\Sigma_{k_1} \cdot \Sigma_{k'_1} = \sigma_{C'D'}$, c'est-à-dire que le produit des symétries par rapport à k_1 et à k'_1 est la demi-rotation autour des points communs $C' = T(C)$ et $D' = T(D)$ des cercles k_1 et k'_1 ; par suite les cercles k_1 et k'_1 sont perpendiculaires.

5. Soit O un point quelconque différent de U , et soient A et A' deux points qui se correspondent par la demi-rotation σ_{OU} ; désignons par l la droite passant par les points O et A ; elle passe aussi par le point A' . Il y a un cercle k et un seul perpendiculaire sur l aux points A et A' . Nous allons démontrer que k est perpendiculaire sur toute droite passant par le point O . Considérons d'abord la droite l' perpendiculaire sur l passant par O . Comme la symétrie $\Sigma_{l'}$ par rapport à l' échange entre eux les points A et A' , elle transforme le cercle k en lui-même. Il résulte de là que la demi-rotation $\sigma_{OU} = \Sigma_{l'} \cdot \Sigma_{l'}$ change le cercle k en lui-même. — Soient ensuite l_1 et l'_1 deux droites perpendiculaires quelconques passant par O ; désignons par A_1, A'_1, B_1, B'_1 les points communs de k avec ces droites. Comme la demi-rotation σ_{OU} transforme chacun des cercles k, l_1, l'_1 en lui-même, les points A_1 et A'_1 , d'une part, et les points B_1 et B'_1 , d'autre part, sont échangés entre eux par σ_{OU} . Le produit des symétries Σ_{l_1} et $\Sigma_{l'_1}$ par rapport aux droites l_1 et l'_1 est la demi-rotation σ_{OU} . Il en résulte que la symétrie Σ_{l_1} échange entre eux les points B_1 et B'_1 , elle laisse invariants les points A_1 et A'_1 . Le cercle k passant par ces 4 points est donc invariant par la symétrie Σ_{l_1} , c'est-à-dire que k est perpendiculaire sur la droite l_1 .

6. Désignons par (l) le faisceau des droites passant par O , et par (k) le faisceau des cercles k perpendiculaires sur le faisceau (l) . Par tout point du plan, sauf O , passe une et une seule droite l , et un et un seul cercle k appartenant à ces faisceaux.

Les transformations de G qui laissent les points O et U invariants forment un sous-groupe G_{OU} qui est simplement transitif sur la sphère privée des points O et U ; à deux points quelconques P et P' différents de O et de U correspond donc une transformation de G_{OU} et une seule qui change P en P' . Les transformations de G_{OU} transforment le faisceau des droites (l) en lui-même; d'après § 4 elles changent aussi le faisceau des cercles (k) perpendiculaires sur (l) en lui-même.

Les transformations de G_{OU} qui changent un cercle k du faisceau (k) en lui-même forment un sous-groupe simplement transitif sur k ; c'est donc un groupe cyclique continu³⁾ d'ordre 1 que nous désignons par Γ_{OU} . Les transformations du faisceau (k) en lui-même engendrées par le groupe Γ_{OU} forment un groupe cyclique isomorphe à Γ_{OU} . Comme le faisceau (k) est un ensemble ouvert, ce groupe cyclique doit se réduire à l'élément identique. Par suite, toute transformation de Γ_{OU} change chacun des cercles perpendiculaires sur le faisceau (l) en lui-même.

Nous appellerons les transformations contenues dans le groupe Γ_{OU} rotations autour des points O et U . Nous désignerons les cercles du faisceau (k) par k_{OU} et les appellerons cercles de centres O, U .

7. Les éléments du groupe Γ_{OU} sont échangeables avec tous les éléments du groupe G_{OU} . Soit en effet μ un élément quelconque de G_{OU} , et ϱ^α un élément de Γ_{OU} , où α désigne le paramètre canonique du groupe cyclique Γ_{OU} ($0 \leq \alpha < 1$) tel que le produit des transformations ϱ^α et $\varrho^{\alpha'}$ est $\varrho^{\alpha+\alpha'}$. La transformation $\mu^{-1}\varrho^\alpha\mu$ change tout cercle k_{OU} en lui-même, elle appartient donc au groupe Γ_{OU} , c'est-à-dire :

$$\mu^{-1}\varrho^\alpha\mu = \varrho^{\alpha'}$$

où $\alpha' = f(\alpha)$ est déterminé de telle façon qu'on ait $f(0) = 0$, et par suite $f(1) = 1$. Posons dans la relation

$$\varrho^{f(\alpha)} = \mu^{-1}\varrho^\alpha\mu$$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, nous obtenons :

$$\varrho^{f(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)} = \mu^{-1}\varrho^{\alpha_1}\mu \cdot \mu^{-1}\varrho^{\alpha_2}\mu \cdot \dots \cdot \mu^{-1}\varrho^{\alpha_n}\mu = \varrho^{f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_n)}$$

d'où

$$f(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \dots + f(\alpha_n).$$

³⁾ Concernant la continuité des groupes transitifs de la droite, voir: *B. de Kerékjártó*: Sur les groupes transitifs de la droite, Acta Scient. Mathem., t. X. (1940).

En posant $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1/n$, on obtient de là $f(1/n) = 1/n$ et $f(m/n) = m/n$ pour tous entiers m, n ($n \neq 0$). Comme $f(\alpha)$ est continu, il résulte donc $f(\alpha) = \alpha$ pour toute valeur réelle de α . La relation obtenue

$$\varrho^\alpha = \mu^{-1} \varrho^\alpha \mu$$

signifie que μ et ϱ^α sont échangeables.

8. Les transformations du groupe G_{OU} qui changent une demi-droite l_1 issue de O en elle-même forment un sous-groupe g_{OU} simplement transitif sur l_1 ; désignons par β un paramètre canonique du groupe g_{OU} , et par μ^β un élément quelconque de ce groupe.

Les transformations de g_{OU} changent toute demi-droite l'_1 issue de O en elle-même. Soit en effet ϱ^α la transformation du groupe Γ_{OU} qui change la demi-droite l_1 en l'_1 , et soit μ^β un élément quelconque du groupe g_{OU} . Comme μ^β et ϱ^α sont échangeables, il résulte de la relation $\mu^\beta = \varrho^{-\alpha} \mu^\beta \varrho^\alpha$ que la transformation μ^β change la demi-droite l'_1 en elle-même.

Nous appellerons les transformations du groupe g_{OU} *homothéties* de centres O, U .

Toute transformation T du groupe G_{OU} est le produit d'un élément μ^β de g_{OU} et d'un élément ϱ^α de Γ_{OU} ; la représentation $T = \mu^\beta \varrho^\alpha$ par un tel produit est unique. Soit en effet P un point quelconque différent de O et de U , et soit $P' = T(P)$ son image obtenue par T . Désignons par Q le point commun de la demi-droite OP avec le cercle k_{OU} passant par P' . Soit μ^β la transformation du groupe g_{OU} qui change P en Q , et soit ϱ^α la transformation de Γ_{OU} qui change Q en P' . Le produit $\mu^\beta \varrho^\alpha$ transforme le point P en P' et laisse les points O et U invariants de même que la transformation T . Il résulte de là que $T = \mu^\beta \varrho^\alpha$.

Comme les éléments de g_{OU} sont échangeables avec les éléments de Γ_{OU} , il s'ensuit que *le groupe G_{OU} est commutatif.*

9. Nous appellerons *plan* la sphère privée du point à l'infini U . Soit G_U le sous-groupe de G formé par les transformations qui admettent le point invariant U .

Toute transformation T du groupe G_U transforme le système des droites en lui-même, c'est-à-dire qu'elle transforme le système des cercles passant par le point U en lui-même.

Si les points A et B sont changés par une transformation T de G_U en les points A' et B' , le milieu C du segment AB est changé en le milieu C' du segment $A'B'$. En effet, si σ_{CU} échange A et B , sa transformée par T ,

c'est-à-dire $T^{-1}\sigma_{OU}T$ échange $A' = T(A)$ et $B' = T(B)$ entre eux; $T^{-1}\sigma_{OU}T$ est la demi-rotation autour des points $C' = T(C)$ et U , le point C' est donc le milieu du segment $A'B'$.

10. Si l est une droite et A un point quelconque, il y a une droite perpendiculaire sur l et une seule passant par A . Si A appartient à l , le produit de la demi-rotation σ_{AU} et de la symétrie Σ_l par rapport à l est une symétrie $\Sigma_{l'}$; son axe l' est la droite perpendiculaire sur l au point A (voir § 2). — Si A n'appartient pas à l , soit $A' = \Sigma_l(A)$ son symétrique par rapport à l ; la droite AA' est perpendiculaire sur l , et elle est la seule perpendiculaire sur l passant par le point A .

Si les droites l_1 et l_2 sont perpendiculaires sur la droite l , elles n'ont aucun point commun. C'est une autre forme d'énoncer le résultat que nous venons d'obtenir.

Si les droites l_1 et l sont perpendiculaires et si la droite l_2 passant par le point O de l n'est pas perpendiculaire sur l , les droites l_1 et l_2 ont un point commun. Soit en effet A un point de l_2 , $A' = \Sigma_l(A)$ son symétrique par rapport à l , et soit B le point commun de la droite AA' avec l . Désignons par C le point commun de l_1 avec l . Nous pouvons supposer que, sur la droite l , les points B et C ne sont pas séparés par O ; autrement, nous employons la demi-rotation σ_{OU} qui change l et l_2 en elles-mêmes, et le point B en un point appartenant à la demi-droite OC . Par une homothétie du groupe g_{OU} nous changeons le point B en C ; les demi-droites OA et OB sont changées en elles-mêmes. A la droite AA' correspond d'après § 4 la droite perpendiculaire sur l passant par C , c'est-à-dire la droite l_1 . Au point A correspond donc un point commun des droites l_1 et l_2 .

Des deux dernières propositions il s'ensuit que le système des droites vérifie l'axiome d'EUCLIDE sur les parallèles, en appelant deux droites parallèles si elles n'ont pas de point commun.

11. Soit O un point différent de U et soit l une droite passant par le point O . Nous choisissons un point A_1 sur l et formons la suite suivante appelée chaîne OA_1 :

$$A_0 = O, A_1, A_2 = \sigma_{A_1U}(A_0), \dots, A_n = \sigma_{A_{n-1}U}(A_{n-2}), \dots$$

Désignons par $A_{-1} = \sigma_{OU}(A_1)$ l'image de A_1 obtenue par la demi-rotation σ_{OU} , et par $A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots$ les éléments de la chaîne OA_{-1} . Pour tout entier n , le point A_n est le milieu du segment $A_{n-1}A_{n+1}$.

La demi-rotation σ_{OU} change le point A_1 en A_{-1} , et O en lui-même;

d'après § 9 elle change le point A_2 en un point A'_2 tel que A_{-1} est le milieu du segment OA'_2 ; il résulte de là que A'_2 est identique à A_{-2} . Par une induction de n à $n + 1$, on vérifie de la même façon que la demi-rotation σ_{OU} change le point A_n en A_{-n} , pour tout n . Similairement on conclut que pour tous entiers n et k , le point A_n est le milieu du segment $A_{n-k}A_{n+k}$.

Désignons par T l'homothétie du groupe g_{OU} qui change le point A_1 en A_2 . Comme A_1 est le milieu du segment OA_2 , il résulte du § 9 que $A_2 = T(A_1)$ est le milieu du segment déterminé par O et $T(A_2)$, par suite $T(A_2) = A_4$. Par le même raisonnement, on vérifie que la transformation T change le point A_{2^n} en $A_{2^{n+1}}$, pour tout entier $n > 0$.

Désignons par $A_{\frac{1}{2}}$ le milieu du segment OA_1 , par $A_{\frac{1}{4}}$ le milieu du segment $OA_{\frac{1}{2}}$, et ainsi de suite. D'après le § 9 on voit que l'inverse de la transformation T change le point A_1 en $A_{\frac{1}{2}}$, celui en $A_{\frac{1}{4}}$,

La suite des points A_1, A_2, A_4, \dots tend vers le point U , et la suite des points $A_{\frac{1}{2}}, A_{\frac{1}{4}}, \dots$ vers le point O . En effet la suite $A_0, A_1, A_2, A_4, \dots$ est monotone, elle est changée par la transformation T en la suite A_0, A_2, A_4, \dots ; le point limite de la suite est donc un point invariant de T ; celui-ci doit coïncider avec le point U . La deuxième partie de l'énoncé découle des mêmes raisons.

Nous introduisons sur la droite l la coordonnée x par la prescription suivante. A tout point A_n nous attribuons la coordonnée $x = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); au milieu du segment A_nA_{n+1} , que nous désignons par $A_{(2n+1)/2}$ nous attribuons la coordonnée $x = \frac{2n+1}{2}$; au milieu du segment $A_{n/2}A_{(n+1)/2}$, que nous désignons par $A_{(2n+1)/4}$, nous attribuons la coordonnée $x = \frac{2n+1}{4}$, et ainsi de suite.

Les points A_x se succèdent sur la droite l dans le même ordre que les nombres dyadiques x leur correspondants. De la proposition ci-dessus nous concluons que, pour tout nombre dyadique x , la suite des points $A_{x+\frac{1}{2}}, A_{x+\frac{1}{4}}, \dots$ converge vers le point A_x , et plus généralement: si la suite de nombres dyadiques x_1, x_2, \dots converge vers le nombre dyadique x , la suite des points A_{x_1}, A_{x_2}, \dots converge vers le point A_x . Nous pouvons donc étendre l'attribution de la coordonnée x continuellement à tous les points de la droite.

Le milieu du segment $A_xA_{x'}$, a la coordonnée $\frac{1}{2}(x+x')$. Soient d'abord x et x' des nombres dyadiques; nous les mettons sous les formes $x = m/2^k$ et $x' = m'/2^k$ et désignons par A'_1 le point de coordonnée $1/2^{k+1}$. Dans la chaîne OA'_1 , les points A_x et $A_{x'}$ sont respectivement le $2m$ -ième et le

$2m'$ -ième élément; le milieu du segment $A'_{2m}A'_{2m'} = A_x A_{x'}$, est donc l'élément d'indice $(m + m')$ de cette chaîne dont la coordonnée est $(m + m')/2^{k+1} = \frac{1}{2}(x + x')$. De la continuité de la coordonnée on obtient la même proposition pour des nombres réels x et x' quelconques.

12. Nous introduisons un système de coordonnées rectangulaires (x, y) dans le plan. Soient l et l' deux droites perpendiculaires passant par le point O ; nous les appelons axes. Nous définissons la coordonnée x sur la droite l par la méthode décrite dans le § 11. Soit k_{OV} un cercle quelconque de centres O, U ; désignons par A, A' et B, B' ses points de rencontre avec les droites l et l' . Si $x = a$ est la coordonnée du point A , celle de A' est $x = -a$, car le point O de coordonnée $x = 0$ est le milieu du segment AA' ; nous attribuons aux points B et B' de l' les coordonnées $y = a$ et $y = -a$, de telle façon qu'à l'une des demi-droites de l' déterminées par le point O correspondent les valeurs positives, à l'autre les valeurs négatives de la coordonnée y .

Si P est un point quelconque du plan, menons par P les perpendiculaires sur l et sur l' , et désignons par A_x et par B_y leurs points de rencontre avec ces droites. Soient x et y les coordonnées respectives des points A_x et B_y . Nous attribuons au point P le couple des nombres réels (x, y) comme ses coordonnées.

Il résulte de la définition immédiatement que les droites parallèles aux axes sont représentées par les équations $y = \text{const.}$ et $x = \text{const.}$

13. Avec les coordonnées (x, y) les symétries Σ_i et $\Sigma_{i'}$, par rapport aux axes s'expriment par les formules suivantes:

$$\Sigma_i: x' = x, \quad y' = -y; \quad \Sigma_{i'}: x' = -x, \quad y' = y.$$

En effet, la symétrie Σ_i change tout point de la droite l en lui-même et toute perpendiculaire sur l , c'est-à-dire toute droite $x = \text{const.}$ en elle-même; par conséquent: $x' = x$. — Si deux points P et P' de la droite l' se correspondent par la symétrie Σ_i , le point O est le milieu du segment PP' , par suite les coordonnées de P et de P' ont les valeurs $(0, y)$ et $(0, -y)$. Les perpendiculaires sur l' passant par P et par P' se correspondent par Σ_i , d'où $y' = -y$. — Par le même raisonnement on déduit l'expression de $\Sigma_{i'}$.

Comme les droites $y = c$ et $x = c'$ sont perpendiculaires d'après § 10, on obtient par le même raisonnement que la symétrie par rapport à la droite $y = c$ s'exprime par les formules:

$$x' = x, \quad y' = 2c - y,$$

et la symétrie par rapport à la droite $x = c'$ par les formules :

$$x' = 2c' - x, \quad y' = y.$$

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux points quelconques. Le produit des symétries par rapport aux droites $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ et $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ s'exprime par la formule :

$$x' = (x_1 + x_2) - x, \quad y' = (y_1 + y_2) - y;$$

d'après § 2 ce produit est la demi-rotation autour des points U et $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Comme cette demi-rotation échange entre eux les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , d'après les formules que nous venons d'établir, il résulte que le point de coordonnées $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ est le milieu du segment limité par les points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) .

14. Pour déterminer l'expression des transformations du groupe G_U avec les coordonnées (x, y) , nous rappelons que, d'après § 9, toute transformation de G_U change le milieu d'un segment quelconque en le milieu du segment correspondant. Soit

$$x' = u(x, y), \quad y' = v(x, y)$$

l'expression d'une transformation de G_U . Les fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$ satisfont donc aux équations fonctionnelles suivantes :

$$u\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \frac{1}{2} [u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2)], \quad (1)$$

$$v\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \frac{1}{2} [v(x_1, y_1) + v(x_2, y_2)]. \quad (1')$$

Il est connu que les seules solutions continues de ces équations sont les fonctions linéaires entières⁴). Pour le montrer retranchons $u(0, 0)$ de l'équation (1) à gauche et à droite, et posons

$$u'(x, y) = u(x, y) - u(0, 0);$$

nous obtenons ainsi l'équation de même forme :

⁴) Voir *W. Sierpiński* : Sur les fonctions convexes mesurables, *Fundamenta Mathematicae*, t. 1. (1920), p. 125—129; en particulier, Note ¹) de la page 129.

$$u' \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \frac{1}{2} [u'(x_1, y_1) + u'(x_2, y_2)] \text{ avec: } u'(0, 0) = 0. \quad (2)$$

En remplaçant x_1 et y_1 par $2x$ et par $2y$, et en posant $x_2 = y_2 = 0$, nous obtenons:

$$u'(x, y) = \frac{1}{2} [u'(2x, 2y)]. \quad (3)$$

En remplaçant dans (2) x_1, y_1, x_2, y_2 par $2x_1, 2y_1, 2x_2, 2y_2$ nous obtenons de (2) et (3) l'équation suivante:

$$u'(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = u'(x_1, y_1) + u'(x_2, y_2). \quad (4)$$

En posant $x_2 = y_2 = 0$ et $x_1 = x, y_1 = y$, nous aurons:

$$u'(x, y) = u'(x, 0) + u'(0, y). \quad (5)$$

En posant dans (4) $y_1 = y_2 = 0$, nous obtenons

$$u'(x_1 + x_2, 0) = u'(x_1, 0) + u'(x_2, 0),$$

d'où nous concluons, vu la continuité de la fonction $u'(x, 0)$ de x :

$$u'(x, 0) = ax. \quad (6)$$

Similairement

$$u'(0, y_1 + y_2) = u'(0, y_1) + u'(0, y_2)$$

d'où

$$u'(0, y) = by. \quad (7)$$

En substituant les expressions obtenues (6) et (7) dans l'équation (5), nous avons:

$$u'(x, y) = ax + by.$$

Désignons par c la constante $u(0, 0)$, nous obtenons finalement:

$$u(x, y) = ax + by + c.$$

Similairement, nous obtenons l'expression:

$$v(x, y) = a'x + b'y + c'.$$

Notre résultat préliminaire est que toute transformation du groupe G_U s'exprime par une transformation linéaire entière des coordonnées (x, y) de la forme :

$$x' = ax + by + c, \quad y' = a'x + b'y + c'. \quad (8)$$

15. Pour les transformations du groupe G_{OU} , les constantes c et c' dans les équations (8) ont la valeur 0, d'où :

$$x' = ax + by, \quad y' = a'x + b'y. \quad (9)$$

Considérons la rotation $\varrho^{\frac{1}{4}}$ de période 4 contenue dans le groupe Γ_{OU} . Elle change le point de coordonnées $(1, 0)$ en $(0, 1)$ et celui-ci en $(-1, 0)$. En remplaçant ces valeurs de coordonnées dans les équations (9), nous obtenons les valeurs suivantes des coefficients : $a = b' = 0, -b = a' = 1$. La rotation $\varrho^{\frac{1}{4}}$ de période 4 s'exprime donc par les formules

$$x' = -y, \quad y' = x. \quad (10)$$

Le groupe G_{OU} est commutatif (§ 7), par suite les transformations de G_{OU} représentées par les formules (9) et (10) sont échangeables; il résulte de là

$$-ay + bx = -a'x - b'y,$$

par conséquent $a = b'$ et $b = -a'$. Par le même raisonnement on montre que ces relations sont aussi valables entre les coefficients des équations (8). Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant :

Toute transformation du groupe G_U s'exprime par les formules

$$x' = ax + by + c, \quad y' = -bx + ay + c'. \quad (11)$$

16. Introduisons dans le plan la coordonnée complexe

$$z = x + iy$$

et posons dans les formules (11)

$$a - ib = A, \quad c + ic' = B,$$

nous obtenons l'expression suivante des transformations du groupe G_U :

$$z' = Az + B.$$

Le groupe G_U ainsi que le groupe des transformations $z' = Az + B$ sont doublement transitifs dans le plan; c'est-à-dire qu'à deux couples de points quelconques du plan (P, Q) et (P', Q') correspond une et une seule transformation de chacun de ces groupes transformant P en P' et Q en Q' . Il résulte de là que, pour toutes valeurs complexes $A (\neq 0)$ et B , la transformation $z' = Az + B$ appartient au groupe G_U .

Le groupe G_U est donc identique au groupe des transformations linéaires entières $z' = Az + B$, où $A (\neq 0)$ et B sont des nombres complexes quelconques.

17. Pour approcher l'expression des transformations du groupe G avec la coordonnée z , nous établirons les relations de la coordonnée z avec les paramètres canoniques des sous-groupes g_{OU} et Γ_{OU} de G_{OU} (voir § 6 et 8).

L'expression des transformations du groupe G_{OU} avec la coordonnée complexe z est: $z' = Az$; posons $A = re^{i\varphi}$ ($r > 0$). Le sous-groupe g_{OU} des homothéties de centres O, U correspond à $\varphi = 0$. Les transformations de la demi-droite $y = 0, x > 0$ engendrées par les transformations de g_{OU} s'expriment donc par la formule $x' = rx$, ou, ce qui est le même, par

$$\log x' = \log x + \log r.$$

Il résulte de là que $\log r$ est un paramètre canonique du groupe g_{OU} ; il est uniquement déterminé par la propriété de prendre la valeur 0 au point A_1 et la valeur $\log 2$ au point $A_2 = \sigma_{A_1 U}(O)$.

Le groupe Γ_{OU} des rotations autour des points O et U correspond à $r = 1, 0 \leq \varphi < 2\pi$. φ est un paramètre canonique dans le groupe Γ_{OU} ; il est lié au paramètre α , introduit dans le § 7, par la relation $\varphi = \pm 2\pi\alpha$.

De ces observations nous tirons la conclusion suivante:

Soit β le paramètre canonique du groupe g_{OU} déterminé de telle façon qu'à un point A_1 correspond la valeur $\beta = 0$, et au point $A_2 = \sigma_{A_1 U}(O)$ la valeur $\log 2$. Soit α ($0 \leq \alpha < 1$) le paramètre canonique du groupe cyclique Γ_{OU} . En désignant par μ^β et ϱ^α les éléments des sous-groupes g_{OU} et Γ_{OU} de G_{OU} , tout élément du groupe G_{OU} peut être exprimé dans la forme $\mu^\beta \varrho^\alpha$ (voir § 8). Nous introduisons la coordonnée complexe z en attribuant au point A_1 la valeur $z = 1$, et à tout point $P = \mu^\beta \varrho^\alpha(A_1)$ la valeur $z = e^{\beta + 2\pi i \alpha}$. Avec la coordonnée z déterminée de cette façon, les transformations du groupe G_{OU} s'expriment par la formule $z' = Az$, et celles du groupe G_U par la formule $z' = Az + B$.

Pour exprimer les transformations du groupe G_O , laissant invariant le point O , échangeons les rôles des points O et U dans l'énoncé que nous

venons de formuler. Il faut donc introduire un paramètre canonique β' dans le groupe g_{OU} tel qu'au point A_1 correspond la valeur $\beta' = 0$, et au point $A'_2 = \sigma_{A_1 O}(U)$ la valeur $\beta' = \log 2$. En vertu du théorème de réciprocity démontré dans le § 3, il résulte de la relation $A'_2 = \sigma_{A_1 O}(U)$ que $\sigma_{A'_2 U}(O) = A_1$, c'est-à-dire que A'_2 est le milieu du segment OA_1 , donc $A'_2 = A_{1/2}$. Le paramètre β introduit ci-dessus prend au point $A_{1/2}$ la valeur $-\log 2$. Par conséquent $\beta' = -\beta$. Pour obtenir la proposition relative au groupe G_O analogue à celle obtenue par rapport au groupe G_U , il faut donc remplacer le paramètre β du groupe g_{OU} par $-\beta$; en remplaçant en même temps α par $-\alpha$ et, par suite, z par $1/z$, nous obtenons le résultat suivant:

Les transformations du groupe G_O laissant le point O invariant s'expriment avec la coordonnée z par la formule :

$$\frac{1}{z'} = A' \frac{1}{z} + B', \text{ c'est-à-dire: } z' = \frac{z}{B'z + A'}$$

18. Désignons par Q le point de coordonnée $z = q$, et par G_Q le sous-groupe de G formé par les transformations laissant Q invariant. La transformation

$$T : z' = z + q,$$

appartenant au groupe G_U , change le point O en Q . Le transformé du groupe G_O par T est le groupe G_Q . Il résulte de là que les transformations contenues dans le groupe G_Q s'expriment par la formule:

$$z' = \frac{z - q}{B'(z - q) + A'} + q.$$

D'après un théorème de M. *Brouwer*⁵⁾ toute transformation du groupe G admet au moins un point invariant; par suite toute transformation du groupe G peut être exprimée par une transformation linéaire de la coordonnée z .

Sans employer le théorème de M. *Brouwer*, on peut aboutir au même résultat par le raisonnement suivant. Soit T une transformation quelconque de G , et soit Q un point différent de U et de $T^{-1}(U)$. Il y a au moins une transformation T_1 dans le groupe G_U qui change Q en $T(Q)$; la transformation $T_2 = T \cdot T_1^{-1}$ admet le point invariant Q , elle appartient donc au groupe G_Q . La transformation $T = T_2 T_1$ est le produit de deux

⁵⁾ Voir p. ex. *B. von Kerékjártó*: Vorlesungen über Topologie, p. 193.

transformations linéaires T_2 et T_1 , par suite T s'exprime aussi par une transformation linéaire de z .

Comme le groupe G ainsi que le groupe des transformations linéaires $z' = \frac{Az + B}{Cz + D}$ sont triplement transitifs sur la sphère, il résulte que, pour toutes valeurs complexes A, B, C, D , telles que $AD - BC \neq 0$, la transformation $z' = \frac{Az + B}{Cz + D}$ appartient à G . Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Le groupe G est identique au groupe homographique

$$z' = \frac{Az + B}{Cz + D}$$

où A, B, C, D désignent des nombres complexes quelconques tels que $AD - BC \neq 0$.

Le groupe G' peut être obtenu en multipliant le groupe G par une symétrie quelconque Σ du groupe G' (voir § 1). La symétrie par rapport à l'axe x s'exprime par la formule $z' = \bar{z}$ (voir § 13). Par conséquent, toute transformation du groupe G' qui n'appartient pas à G est une antihomographie:

$$z' = \frac{A\bar{z} + B}{C\bar{z} + D}.$$

En résumé, G' est le groupe des homographies et des antihomographies.

(Reçu le 10 juillet 1940.)

Notiz zur Lagrangeschen Lösung des Keplerschen Problems

Von J. O. FLECKENSTEIN, Basel

1. Daß schon Lagrange¹⁾ bei der Auflösung der Keplerschen Gleichung

$$t = x + \varepsilon \sin x \quad (0 \leq \varepsilon < 1) \quad (1)$$

nach x mit Hilfe seines Reversionstheorems

$$x = t - \varepsilon \sin t + \frac{\varepsilon^2}{2!} \frac{d}{dt} (\sin^2 t) - \frac{\varepsilon^3}{3!} \frac{d^2}{dt^2} (\sin^3 t) + \dots \quad (2)$$

bei vorausgesetzter — aber von ihm nicht bewiesener — Konvergenz dieser Reihe auf die Besselschen Funktionen

$$J_n(n\varepsilon) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \frac{n^{n+2\kappa}}{(n+\kappa)! \kappa!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2\kappa} \quad (3)$$

als Koeffizienten in der Entwicklung

$$x = t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\varepsilon) \sin nt; \quad A_n(\varepsilon) = \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon), \quad (4)$$

gestoßen ist, wird verschiedentlich von den Autoren vermerkt; daß er aber die Besselsche Entdeckung vorweggenommen hat, darauf scheint nur Whittaker²⁾ hinzuweisen. In der Tat liegt die analytische Pointe in der Lagrangeschen Rechnung nicht in der bloßen Umformung der Reihenglieder und der Ersetzung der Potenzen $\sin^n t$ in (2) durch die sinus der Vielfachen des Arguments, die ihm dann zufällig die Besselschen Funktionen liefert, sondern in der Einführung des Differentialoperators $p = \frac{d}{dt}$, den Lagrange wie einen Heaviside-Operator handhabt.

Bestimmt man eine gesuchte Zeitfunktion $B(t)$ durch Anwendung einer Operatorenrechnung auf eine vorgegebene Funktion $S(t)$

$$B(t) = f(p) S(t),$$

¹⁾ *J. L. Lagrange*, Sur le problème de Képler (1771), s. Oeuvres, t. III, p. 113—138.

²⁾ *H. C. Plummer*, An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy, Cambridge (1918), bemerkt, daß er Whittaker die "reference, which seems to have been overlooked" verdankt und schreibt, daß Lagrange "... thus anticipating Bessels work of (1824) of more than half a century later".

indem man etwa $f(p)$ nach Taylor entwickelt, so bedeutet bekanntlich die Ersetzung des Operators p durch eine algebraisch zu behandelnde Größe den Übergang von dem Bereich der dem Operator unterzogenen Funktion zu einem zugeordneten anderen, d. h. eine Funktionaltransformation, wo sich dann der Operator als eine algebraische Multiplikation abbildet. Im Fall des Heaviside-Operators ist diese Transformation die Laplacesche, die als Spezialfall die Fouriersche Integraltransformation enthält, womit der Zusammenhang zwischen Lagranges mehr „induktiver“ Rechnung und der allgemeinen Fourierschen Entwicklung, die dann später Bessel anwendet, angedeutet sein mag.

Während Bessel³⁾ mit einem Integraloperator die Besselschen Funktionen erhält, gewinnt sie Lagrange auf dem dazu inversen Weg mittels des Differentialoperators

$$p^\nu = \frac{d^\nu}{dt^\nu}$$

als Fourierkoeffizienten der Reihe (4). Eine kurze, direkte Herleitung der Besselschen Funktionen auf dem Lagrangeschen Weg ergibt sich nun wie folgt.

2. Mit dem Operator p schreiben wir das Reversionstheorem (2)

$$x = t + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p^{n-1}}{n!} \varepsilon^n \sin^n t,$$

und nach (4) haben wir also folgende merkwürdige Relation herzuleiten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} (\varepsilon \sin t)^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(n\varepsilon)}{n} \sin nt. \quad (5)$$

Wir setzen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n p^{n-1} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sin^n t = \sum_{n=1}^K (-1)^n p^{n-1} \frac{\varepsilon^n}{n!} \sin^n t + R_K,$$

wo im Falle der Konvergenz $\lim_{K \rightarrow \infty} R_K = 0$ ist.

Die Reihen $\sum \frac{\sin^n}{\cos^n} t$ können wir⁴⁾ folgendermaßen in Reihen, die nach $\frac{\sin n}{\cos n} t$ fortschreiten, umformen:

Es sei

$$C_K = \sum_{n=1}^K b_n (2 \cos t)^n, \quad b_n = \frac{\alpha^n}{2^n}.$$

³⁾ *F. W. Bessel*, Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, p. 17 (Abhandlungen der Berliner Akademie der Wiss. math. Cl. 1816—1817).

⁴⁾ vgl. *E. W. Brown* und *C. Shook*, *Planetary Theory*, Cambridge 1933, p. 45 u. ff.

Da C_K eine gerade Funktion von t ist, kann C_K in Cosinustermen der Vielfachen von t entwickelt werden. Mit der Abkürzung $z = \alpha e^{it}$, so daß $2\alpha \cos t = z + \frac{\alpha^2}{z}$ ist, haben wir nach dem Binomischen Satz

$$C_K = \sum_{n=1}^K 2^{-n} \left(z + \frac{\alpha^2}{z} \right)^n = \\ = \sum_{n=1}^K 2^{-n} z^n \left(1 + n \frac{\alpha^2}{z^2} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{\alpha^4}{z^4} + \dots + \frac{\alpha^{2n}}{z^{2n}} \right).$$

Die Koeffizienten der $\cos nt$ erhält man aus den Koeffizienten von z^n und $\alpha^{2n} z^{-n}$, die also jeweils gleich sein müssen, sodaß es genügt, nur die Koeffizienten von z^n , $n > 0$ zu sammeln und dann z^n durch $2\alpha^n \cos nt$ zu ersetzen. Demnach ist allgemein der Koeffizient von $2 \cos nt$

$$b_n + (n+2) b_{n+2} + \frac{(n+4)(n+3)}{1 \cdot 2} b_{n+4} + \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b_{n+6} + \dots$$

(wir notieren nur die ersten Glieder des Koeffizienten). Durch analoge Überlegungen findet man, daß in

$$S_K = \sum_{n=1}^K (-1)^n b_n (2 \sin t)^n$$

die Terme mit ungeradem $n = 2\mu + 1$ die sinus der ungeraden Vielfachen von t , die Terme mit geradem Index $n = 2\mu$ die cosinus der geraden Vielfachen von t enthalten. Mit den gleichen Substitutionen wie oben folgt dann mit

$$2i\alpha \sin t = z - \frac{\alpha^2}{z}$$

und

$$S_K = \sum_{n=1}^K 2^{-n} \left(z - \frac{\alpha^2}{z} \right)^n (-1)^{\frac{n}{2}} = \\ = \sum_{n=1}^K 2^{-n} z^n \left(1 - n \frac{\alpha^2}{z^2} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{\alpha^4}{z^4} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{\alpha^6}{z^6} + \dots \right) (-1)^{\frac{n}{2}} \quad (6)$$

als Koeffizient von $2 \sin (2\mu + 1) t$

$$(-1)^\mu \left\{ b_{2\mu+1} + (2\mu+3) b_{2\mu+3} + \frac{(2\mu+5)(2\mu+4)}{1 \cdot 2} b_{2\mu+5} + \right. \\ \left. + \frac{(2\mu+7)(2\mu+6)(2\mu+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b_{2\mu+7} + \dots \right\}$$

und als Koeffizient von $2 \cos 2\mu t$

$$(-1)^\mu \left\{ b_{2\mu} + (2\mu + 2) b_{2\mu+2} + \frac{(2\mu + 4)(2\mu + 3)}{1 \cdot 2} b_{2\mu+4} + \right. \\ \left. + \frac{(2\mu + 6)(2\mu + 5)(2\mu + 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b_{2\mu+6} + \dots \right\}.$$

Führt man jetzt

$$b_n = \frac{p^{n-1} \varepsilon^n}{2^n n!}$$

ein, so erhält man in der Entwicklung

$$\sum_{n=1}^K (-1)^n \frac{1}{n!} p^{n-1} (\varepsilon \sin t)^n$$

als Koeffizienten von $2 \sin(2\mu + 1)t$

$$(-1)^\mu \left\{ \frac{p^{2\mu} \varepsilon^{2\mu+1}}{(2\mu + 1)! 2^{2\mu+1}} + (2\mu + 3) \frac{p^{2\mu+2} \varepsilon^{2\mu+3}}{(2\mu + 3)! 1! 2^{2\mu+3}} + \right. \\ \left. + (2\mu + 5)(2\mu + 4) \frac{p^{2\mu+4} \varepsilon^{2\mu+5}}{(2\mu + 5)! 2! 2^{2\mu+5}} + \right. \\ \left. + \dots \{ (2\mu + 2\lambda + 1) \dots (2\mu + \lambda + 2) \} \frac{p^{2\mu+2\lambda} \varepsilon^{2\mu+2\lambda+1}}{(2\mu + 2\lambda + 1)! \lambda! 2^{2\mu+2\lambda+1}} + \dots \right\}, \\ (\lambda = 3, 4, 5, \dots \mu),$$

und als Koeffizienten von $2 \cos 2\mu t$

$$(-1)^\mu \left\{ \frac{p^{2\mu-1} \varepsilon^{2\mu}}{(2\mu)! 2^{2\mu}} + (2\mu + 2) \frac{p^{2\mu+1} \varepsilon^{2\mu+2}}{(2\mu + 2)! 1! 2^{2\mu+2}} + \right. \\ \left. + (2\mu + 4)(2\mu + 3) \frac{p^{2\mu+3} \varepsilon^{2\mu+4}}{(2\mu + 4)! 2! 2^{2\mu+4}} + \right. \\ \left. + \dots \{ (2\mu + 2\lambda) \dots (2\mu + \lambda + 1) \} \frac{p^{2\mu+2\lambda-1} \varepsilon^{2\mu+2\lambda}}{(2\mu + 2\lambda)! \lambda! 2^{2\mu+2\lambda}} + \dots \right\}, \\ (\lambda = 3, 4, 5, \dots \mu).$$

Nun ist allgemein

$p^{2\mu+2\lambda}$ angewendet auf $\sin(2\mu + 1)t$ gleich $(-1)^{\mu+\lambda} (2\mu + 1)^{2\mu+2\lambda} \sin(2\mu + 1)t$

$p^{2\mu+2\lambda-1}$ angewendet auf $\cos 2\mu t$ gleich $(-1)^{\mu+\lambda} (2\mu)^{2\mu+2\lambda-1} \sin 2\mu t$.

Ersetzt man also in den Koeffizienten die p^ν durch ihre Differentiationsresultate, so erhalten wir allgemein für die Koeffizienten von $\sin 2\mu t$

$$\left\{ \frac{(2\mu)^{2\mu-1}}{(2\mu)! 0!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu} + (-1)^1 \frac{(2\mu)^{2\mu+1}}{(2\mu+1)! 1!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+2} + \right. \\ \left. + (-1)^2 \frac{(2\mu)^{2\mu+3}}{(2\mu+2)! 2!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+4} + \dots (-1)^\lambda \frac{(2\mu)^{2\mu+2\lambda-1}}{(2\mu+\lambda)! \lambda!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+2\lambda} + \dots \right\}$$

und von $\sin(2\mu+1)t$

$$\left\{ \frac{(2\mu+1)^{2\mu}}{(2\mu+1)! 0!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+1} + (-1)^1 \frac{(2\mu+1)^{2\mu+2}}{(2\mu+2)! 1!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+3} + \right. \\ \left. + (-1)^2 \frac{(2\mu+1)^{2\mu+4}}{(2\mu+3)! 2!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+5} + \dots (-1)^\lambda \frac{(2\mu+1)^{2\mu+2\lambda}}{(2\mu+1+\lambda)! \lambda!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\mu+2\lambda+1} + \dots \right\},$$

also für S_K eine Reihe, die nach $\sin nt$ fortschreitet ($n = 2\mu$ gesetzt). Lassen wir in der Doppelsumme

$$S_K = 2 \sum_{n=1}^K \sum_{\lambda=0}^K (-1)^\lambda \frac{n^{n+2\lambda-1}}{(n+\lambda)! \lambda!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2\lambda} \sin nt \quad (7)$$

$K \rightarrow \infty$ gehen, so haben wir (vorbehaltlich der absoluten Konvergenz von (7)) in der Tat die Entwicklung (4) nach $\sin nt$ mit den Koeffizienten

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \frac{n^{n+2\kappa-1}}{(n+\kappa)! \kappa!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n+2\kappa} = \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon)$$

und damit die Auflösung der Keplerschen Gleichung in der Lagrange-Besselschen Form.

3. Die absolute Konvergenz der Doppelsumme (7) und damit die Erlaubtheit der Einführung der Koeffizienten $J_n(n\varepsilon)$ läßt sich für hinreichend kleine ε schon elementar mit dem d'Alembertschen Kriterium erweisen.

In der Summe⁵⁾

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} \left| (-1)^\kappa \frac{(v+1)^{v+2\kappa}}{(v+1+\kappa)! \kappa!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{v+2\kappa+1} \sin(v+1)t \right| \leq \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(v+1)^{v+2\kappa}}{(v+1+\kappa)! \kappa!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{v+2\kappa+1}$$

kann man, weil

$$\frac{(v+1)^{2\kappa}}{(v+1+\kappa)! \kappa!} = \frac{(v+1)^{2\kappa}}{(v+1)! (v+1+1) \dots (v+1+\kappa) \kappa!} < \frac{(v+1)^{2\kappa}}{(v+1)! (v+1)^\kappa \kappa!} = \frac{(v+1)^\kappa}{(v+1)! \kappa!}$$

ist, setzen

⁵⁾ Für wichtige Hinweise bei der nachfolgenden Majoratenabschätzung danke ich Herrn Prof. *Niethammer*.

$$\begin{aligned}
& (\nu + 1)^\nu \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\nu + 1)^{2\kappa}}{(\nu + 1 + \kappa)! \kappa!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\kappa} < \\
& < \frac{(\nu + 1)^\nu \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+1}}{(\nu + 1)!} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(\nu + 1)^\kappa \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2\kappa}}{\kappa!} = \frac{(\nu + 1)^\nu}{(\nu + 1)!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+1} e^{(\nu+1)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Also wird die Doppelsumme

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left| (-1)^\kappa \frac{(\nu + 1)^{\nu+2\kappa}}{(\nu + 1 + \kappa)! \kappa!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+2\kappa+1} \sin(\nu + 1)t \right| < \\
& < e \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu + 1)^\nu \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+1} e^{\nu\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}}{(\nu + 1)!}.
\end{aligned}$$

Die Majorante konvergiert, wenn nur

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{(\nu + 1)^\nu \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu+1} e^{\nu\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \nu!}{(\nu + 1)! \nu^{\nu-1} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^\nu e^{(\nu-1)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}} \right| = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \frac{(\nu + 1)^{\nu-1}}{\nu^{\nu-1}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) e^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \right| < 1$$

ist, d. h. für

$$e \cdot \frac{\varepsilon}{2} e^{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} < 1.$$

Der Konvergenzradius der Entwicklung ist also größer oder gleich ε_0 , wo ε_0 durch

$$e \frac{\varepsilon_0}{2} e^{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_0 e^{1 + \frac{\varepsilon_0^2}{4}} = 2 \quad (8)$$

bestimmt ist⁶⁾. $\varepsilon_0 = 0,660\dots$ weicht um weniger als 0,003 von dem von Laplace angegebenen Wert $\varepsilon_1 = 0,6627\dots$ für die Gültigkeit der Entwicklung (2) ab, der sich aus

$$1 + \sqrt{1 + \varepsilon_1^2} = \varepsilon_1 e^{\frac{1}{1 + \varepsilon_1^2}} \quad (9)$$

ergibt, wie sich mit wesentlich höheren Hilfsmitteln zeigen läßt⁷⁾.

⁶⁾ Unter dieser Schranke liegen die numerischen Exzentrizitäten der Planeten, Planetoiden und sogar mancher periodischer Kometen.

⁷⁾ vgl. etwa *Tisserand, Mécanique céleste*, t. I, p. 265.

Mit der Substitution $\varepsilon_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ erhält man bekanntlich aus (9) zur Bestimmung des Laplaceschen Konvergenzradius die transzendente Gleichung

$$\cos \alpha_1 \operatorname{lognat} \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} = 1 ,$$

während man mit der Substitution $\frac{\varepsilon_0}{2} = \operatorname{tg} \alpha_0$ für ε_0 eine analoge Gleichung aus (8)

$$\cos^2 \alpha_0 \operatorname{lognat} \operatorname{ctg} \alpha_0 = 1$$

erhält⁸⁾.

Während die Herleitung der Entwicklung (4) mit Hilfe des Reversions-theorems (2) von Lagrange eine Einschränkung der Bedingung $0 < \varepsilon < 1$ aus (1) zu $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 = 0,6627\dots$ erfordert, erlaubt die Anwendung des Fourierschen Entwicklungssatzes, die Gültigkeit der weiteren Bedingung $0 \leq \varepsilon < 1$ zu zeigen. Die Besselsche Herleitung der Entwicklung (4) ist also für das ganze Intervall $0 < \varepsilon < 1$ gültig.

⁸⁾ Beide Formeln $1 + \sqrt{1 + \varepsilon_1^2} = \varepsilon_1 e^{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \varepsilon_1^2}}$ und $\varepsilon_0 e^{1 + \frac{\varepsilon_0^2}{4}} = 2$ liefern bis auf Größen von der Ordnung ε^8 als erste Näherungslösung

$$\varepsilon = \frac{2}{e} - \frac{\varepsilon^8}{4} \pm \dots$$

(Eingegangen den 25. Juli 1940.)

Über ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope

Von H. HADWIGER, Bern

Ein System von n , alle in einem festen Punkt O angreifenden Vektoren

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$$

eines s -dimensionalen Vektorraumes R_s , nennen wir *Vektorstern*, und bezeichnen einen solchen mit \mathfrak{S}_n , und schreiben gelegentlich

$$\mathfrak{S}_n \equiv \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}. \quad (1)$$

Wir setzen voraus, daß der Rang von \mathfrak{S}_n stets gleich s ist, das heißt, die von den Vektoren des \mathfrak{S}_n aufgespannte Vektormannigfaltigkeit ist mit dem Vektorraum R_s identisch. In diese Voraussetzung ist die Bedingung $n \geq s$ mit eingeschlossen.

Ziel dieser Arbeit ist es, einige durch besondere Eigenschaften ausgezeichnete Typen von Vektorsternen in gegenseitige Beziehung zu bringen. So lassen sich einfache Zusammenhänge nachweisen, die zwischen den Sternen vom *Pohlke'schen* Typus, den *Koordinatensternen* und den regelmäßigen Sternen, insbesondere den den regulären Polytopen zugeordneten *regulären* Sternen bestehen.

Wir entwickeln zunächst die Begriffe, die wir zur Charakterisierung der ausgezeichneten Sterne, die wir studieren werden, verwenden.

Ist K eine, den Ursprung O festlassende kongruente Abbildung des Vektorraumes R_s auf sich, so bezeichnen wir mit $K[\mathfrak{x}]$ den Bildvektor von \mathfrak{x} , und in sinngemäßer Übertragung auf alle Vektoren eines Sternes, mit $K[\mathfrak{S}_n]$ den Bildstern von \mathfrak{S}_n .

Die Gruppe aller K , die einen gegebenen Stern \mathfrak{S}_n invariant lassen, so daß also

$$K[\mathfrak{S}_n] = \mathfrak{S}_n$$

gilt, nennen wir die zum \mathfrak{S}_n gehörende *Gruppe*. Sie kann auch als Permutationsgruppe der zu \mathfrak{S}_n gehörenden Vektoren \mathbf{a}_v aufgefaßt werden, oder als Gruppe von kogredienten Permutationen von Zeilen und Spalten der zu \mathfrak{S}_n gehörenden *Gram'schen* Matrix

$$A = || (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k) ||, \quad (2)$$

welche diese in sich überführen.

Auf Grund der Eigenschaften dieser Gruppe lassen sich gewisse wichtige Sterntypen charakterisieren. Ein Stern heißt *transitiv*, wenn seine Gruppe transitiv ist, das heißt, wenn durch Operationen der Gruppe jeder Vektor in jeden anderen übergeführt werden kann. Anschaulich gesehen ist für transitive Sterne charakteristisch, daß hinsichtlich der gestaltlichen Beziehungen, die ein Vektor mit dem gesamten Stern eingeht, alle Vektoren des Sternes äquivalent sind.

Ein Vektor s heißt *Symmetrievektor* eines Sternes \mathfrak{S}_n , wenn seine Gruppe eine Untergruppe von nur die Vektoren λs invariant lassenden Abbildungen aufweist. Der Vektor s kann zu \mathfrak{S}_n gehören oder nicht.

Einen Stern nennen wir *symmetrisch*, wenn alle seine Vektoren Symmetrievektoren sind. Einen transitiven und symmetrischen Stern wollen wir *regelmäßig* nennen. Die vom Mittelpunkt eines regulären (konvexen) Polytops nach den Ecken führenden Vektoren bilden einen *regulären Stern*. Die regulären Vielecke des R_2 sollen als reguläre Polytope mitzählen. Im R_1 sei $\mathfrak{S}_2 \equiv \{x, -x\}$ der einzige reguläre Stern.

Besonders wichtig ist der aus s orthogonalen Einheitsvektoren bestehende *Einheitsstern*

$$\mathfrak{E}_s \equiv \{e_1, \dots, e_s\}. \quad (3)$$

Er ist offenbar transitiv aber nicht symmetrisch. Der *Diederstern* im R_3 ist für $n > 6$ symmetrisch aber nicht transitiv. Der *Simplexstern*, der zum Simplex gehörende reguläre Stern, ist transitiv und symmetrisch.

Einen weiteren Gesichtspunkt, nach welchem Sterne ausgezeichnet werden können, gewinnt man, wenn man die Eigenwerte der *Gram'schen* Matrix (2), das heißt die n Wurzeln

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (4)$$

der charakteristischen Gleichung

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (5)$$

studiert. So hat *E. Stiefel*¹⁾ eine Kennzeichnung der *Pohlke'schen* Sterne für den Fall $n = s + 1$ auf Grund der Eigenwerte (4) gegeben. Unter einem *Pohlke'schen* Stern versteht man einen \mathfrak{S}_n , der durch schiefe oder orthogonale Parallelprojektion eines \mathfrak{E}_n im R_n auf den R_s , $s = n - 1$, entsteht.

¹⁾ *E. Stiefel*, Zum Satz von Pohlke. Comment. Math. Helv. 10 (1937/38), S. 208 bis 225. Vgl. bes. Satz 4 auf S. 213 und die in Satz 5 auf S. 214 enthaltene Umkehrung.

Für die Entwicklung der in diesem Aufsatz zur Sprache kommenden Zusammenhänge interessieren uns solche Sterne \mathfrak{S}_n , die durch Orthogonalprojektion eines \mathfrak{C}_n im R_n auf einen R_s , $n \geq s$, entstehen. Wir nennen sie *Pohlke'sche Normalsterne*.

Dem Gedankengang von *Stiefel* folgend, wäre es nicht schwierig, die analogen Bedingungen im Falle eines solchen Sternes für beliebige $n \geq s$ zu finden. Wir werden aber den bezüglichen Satz später aus anderen leichter folgern. (Es handelt sich um Satz III.)

Allgemein läßt sich über die Eigenwerte (4) aussagen, daß genau $n - s$ davon verschwinden müssen, da s der Rang von A ist. Da weiter A symmetrisch und nicht negativ definit ist, sind die s nicht verschwindenden Eigenwerte reell und positiv.

Noch eine letzte für uns wesentliche Definition:

Ein $\mathfrak{S}_n \equiv \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\}$ heißt *Koordinatenstern*, wenn für alle Vektoren \mathfrak{x} aus R_s die Identität gilt

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{x}) \mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{x}. \quad (6)$$

Offensichtlich ist ein Einheitsstern \mathfrak{E}_s ein Koordinatenstern, da ja die Darstellung

$$\sum_{\nu=1}^s (\mathfrak{e}_\nu, \mathfrak{x}) \mathfrak{e}_\nu = \mathfrak{x} \quad (7)$$

als geläufige Komponentenzerlegung nach den Richtungen der s Koordinatenvektoren interpretiert wird. Die Bildung von (6) kann als direkte Verallgemeinerung der Darstellung (7) angesehen werden. Da, wie sich später ergeben wird, der \mathfrak{E}_s der einzige \mathfrak{S}_s ist, der einen Koordinatenstern darstellt, sind nur die Fälle $n > s$ interessant.

1. Auf einen ersten Zusammenhang, der zwischen ausgezeichneten Sternen besteht, eintretend, beweisen wir den folgenden Satz:

Satz I. *Ein \mathfrak{S}_n ist dann und nur dann ein Koordinatenstern, wenn er ein Pohlke'scher Normalstern ist.*

Wir überlegen uns, daß im Falle $n > s$ $\mathfrak{S}_n \equiv \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\}$ im R_s dann und nur dann ein *Pohlke'scher Normalstern* ist, wenn es in einem zu R_s orthogonalen R_{n-s} ein $\bar{\mathfrak{S}}_n \equiv \{\bar{\mathfrak{a}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{a}}_n\}$ so gibt, daß die

$$\mathfrak{e}_\nu = \mathfrak{a}_\nu + \bar{\mathfrak{a}}_\nu \quad (8)$$

im R_n , in den man die Räume R_s und R_{n-s} eingelagert hat, einen \mathfrak{E}_n bilden. Im Falle $n = s$ gilt offenbar das letzte bereits für die

$$\mathbf{e}_\nu = \mathbf{a}_\nu . \quad (9)$$

Diese Aussagen stellen eine Interpretation der Definition der *Pohlke'schen* Normalsterne dar.

a) Es sei \mathfrak{S}_n , $n > s$, ein *Pohlke'scher* Normalstern. Es gilt dann

$$\mathbf{e}_\nu = \mathbf{a}_\nu + \bar{\mathbf{a}}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) , \quad (10)$$

$$(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\mu) = \begin{cases} 1 & (\nu = \mu) \\ 0 & (\nu \neq \mu) \end{cases} .$$

Für alle Vektoren \mathbf{x} aus R_s ist

$$(\bar{\mathbf{a}}_\nu, \mathbf{x}) = 0 , \quad (11)$$

insbesondere auch

$$(\bar{\mathbf{a}}_\nu, \mathbf{a}_\mu) = 0 . \quad (12)$$

Da $\mathfrak{E}_n \equiv \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ im R_n ein Koordinatenstern ist, gilt für alle Vektoren aus R_n , insbesondere auch für jeden Vektor \mathbf{x} aus R_s ,

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathbf{e}_\nu, \mathbf{x}) \mathbf{e}_\nu = \mathbf{x} , \quad (13)$$

oder mit Rücksicht auf (11)

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{x}) (\mathbf{a}_\nu + \bar{\mathbf{a}}_\nu) = \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{x}) \mathbf{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}_\nu = \mathbf{x} . \quad (14)$$

Da der Vektor

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}_\nu$$

zum Raum R_s , in dem die beiden anderen in der Relation (14) auftretenden Vektoren liegen, orthogonal ist, muß er verschwinden. Es resultiert

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{x}) \mathbf{a}_\nu = \mathbf{x} , \quad (15)$$

also ist \mathfrak{S}_n ein Koordinatenstern.

b) Es sei \mathfrak{S}_n , $n > s$, ein Koordinatenstern. Wir wählen ein System von n orthogonalen Einheitsvektoren

$$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n ,$$

so daß die ersten s Vektoren

$$\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s$$

zu R_s gehören. Die übrigen Vektoren

$$\mathbf{p}_{s+1}, \dots, \mathbf{p}_n$$

gehören dann zu einem zu R_s orthogonalen R_{n-s} . Im R_n bilden wir nun die s Vektoren

$$q_i = \sum_{\nu=1}^n (a_\nu, p_i) p_\nu \quad (i = 1, 2, \dots, s); \quad (16)$$

dann ist mit Rücksicht auf die Orthogonalität der p_ν

$$(q_i, q_k) = \sum_{\nu=1}^n (a_\nu, p_i) (a_\nu, p_k)$$

oder

$$(q_i, q_k) = (p_k, \sum_{\nu=1}^n (a_\nu, p_i) a_\nu),$$

und da \mathfrak{S}_n ein Koordinatenstern ist, wird

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu, p_i) a_\nu = p_i$$

so daß

$$(q_i, q_k) = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \quad (17)$$

resultiert.

Mit (16) werden somit s orthogonale Einheitsvektoren definiert. Es lassen sich weitere $n - s$ Vektoren

$$q_{s+1}, \dots, q_n$$

so hinzufügen, daß ein System von n orthogonalen Einheitsvektoren

$$q_1, \dots, q_n$$

entsteht. Endlich bilden wir die n Vektoren

$$e_i = \sum_{\nu=1}^n (q_\nu, p_i) p_\nu \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

Aus (16) folgt nun, daß

$$(q_\nu, p_i) = (a_i, p_\nu)$$

ist, so daß wegen

$$\sum_{\nu=1}^s (a_i, p_\nu) p_\nu = a_i$$

folgt

$$e_i = a_i + \bar{a}_i, \quad (19)$$

wenn man

$$\sum_{\nu=s+1}^n (q_\nu, p_i) p_\nu = \bar{a}_i \quad (20)$$

setzt. Die \bar{a}_i gehören dann zu dem von den Vektoren p_ν , $\nu \geq s + 1$ auf-

gespannten, zu R_s orthogonalen R_{n-s} . Nun ist mit Berücksichtigung von (18)

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \sum_{\nu=1}^n (q_\nu, p_i) (q_\nu, p_k)$$

oder

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = (p_k, \sum_{\nu=1}^n (q_\nu, p_i) q_\nu) = (p_k, p_i),$$

also

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}. \quad (21)$$

Die Vektoren (19) bilden somit einen \mathfrak{E}_n , also ist \mathfrak{S}_n ein *Pohlke'scher* Normalstern.

Man überlegt sich leicht, daß der Beweis für $n = s$ mit einigen Abänderungen der Ausdrucksweise gleich verläuft. Satz I sagt in diesem Falle aus, daß der \mathfrak{E}_s der einzige Koordinatenstern \mathfrak{S}_s im R_s ist.

2. Durch die Definition des Koordinatensternes wird das Studium der einem beliebigen Stern

$$\mathfrak{S}_n \equiv \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$$

zugeordneten linearen *Vektortransformation*

$$\mathbf{x}' = T(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^n (a_\nu, \mathbf{x}) a_\nu \quad (22)$$

nahegelegt. Diese hat folgende Eigenschaften:

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}); \quad (23)$$

$$T(\alpha \mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}); \quad (24)$$

$$(T(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (T(\mathbf{y}), \mathbf{x}). \quad (25)$$

Wir nennen \mathbf{x} *Eigenvektor* von T , falls

$$T(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \quad \text{ist.} \quad (26)$$

Der zugehörige *Eigenwert* λ ist wegen

$$(T(\mathbf{x}), \mathbf{x}) > 0 \quad (27)$$

positiv. Zwei verschiedenen Eigenwerten zugehörige Eigenvektoren sind orthogonal, denn nach (25) gilt

$$0 = (T(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2) - (T(\mathbf{x}_2), \mathbf{x}_1) = (\lambda_1 - \lambda_2) (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Die Eigenwerte von T sind nun mit den s nicht verschwindenden Eigenwerten der Gram'schen Matrix

$$A = || (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_k) || \quad (2)$$

identisch. Ist nämlich λ eine r fache Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$|A - \lambda E| = 0, \quad (5)$$

so besitzt das homogene Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{a}_\mu) x_\nu = \lambda x_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

r linear unabhängige Lösungen. Diese ergeben r linear unabhängige Eigenvektoren von T , die zum Eigenwert λ gehören, denn aus (28) folgt

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{a}_\mu) x_\nu \mathbf{a}_\mu = \lambda \sum_{\mu=1}^n x_\mu \mathbf{a}_\mu,$$

oder wenn man

$$\sum_{\mu=1}^n x_\mu \mathbf{a}_\mu = \mathbf{x}$$

setzt,

$$T(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}. \quad (29)$$

Berücksichtigt man noch, daß die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren orthogonal sein müssen, so ergibt sich, daß die s nicht verschwindenden Eigenwerte von A Eigenwerte von T sind, denen s linear unabhängige Eigenvektoren

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s$$

zugehören. Man darf nach geläufigen Überlegungen annehmen, daß

$$(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

ist. Ist umgekehrt λ ein Eigenwert von T , so kann er nicht von allen Eigenwerten von A verschieden sein, da sonst der zugehörige Eigenvektor zu allen \mathbf{x}_i orthogonal sein müßte, was aber für keinen nicht verschwindenden Vektor des R_s möglich ist. Damit ist die oben stehende Behauptung betreffend die Eigenwerte von T bewiesen. Es ergeben sich folgende Sätze:

Satz II. *Ein \mathfrak{S}_n ist dann und nur dann ein Koordinatenstern, wenn die s nicht verschwindenden Eigenwerte der Gram'schen Matrix von \mathfrak{S}_n alle 1 sind.*

Ist nämlich \mathfrak{S}_n ein Koordinatenstern, so ist $\lambda = 1$ ein s -facher Eigenwert, da für alle Vektoren des R_s die Identität

$$T(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$$

gilt und umgekehrt. In Verbindung mit Satz I gewinnen wir:

Satz III. *Ein \mathfrak{S}_n ist dann und nur dann ein Pohlke'scher Normalstern, wenn die s nicht verschwindenden Eigenwerte der Gram'schen Matrix von \mathfrak{S}_n alle 1 sind.*

3. Es zeigt sich nun, daß viele durch Eigenschaften ihrer Gruppe ausgezeichnete Sterne Koordinatensterne und somit auch Pohlke'sche Normalsterne sind.

Wir zeigen zunächst, daß ein Symmetrievektor eines Sternes Eigenvektor der zugeordneten Vektortransformation T ist.

Es sei \mathfrak{s} ein Symmetrievektor von \mathfrak{S}_n . Nach Definition gibt es dann in der Gruppe von \mathfrak{S}_n eine Untergruppe kongruenter Abbildungen mit dem invarianten Vektor \mathfrak{s} , die \mathfrak{S}_n in sich überführen. Für einen beliebigen Vektor folgt aus

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{x}) \mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{x}' \quad (30)$$

$$\sum_{\nu=1}^n (K(\mathfrak{a}_\nu), K(\mathfrak{x})) K(\mathfrak{a}_\nu) = K(\mathfrak{x}'), \quad (31)$$

wo K eine Operation der Untergruppe ist. Wegen der Invarianz

$$K(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n$$

erfahren die \mathfrak{a}_ν durch K nur eine Permutation, so daß sich (31) schreiben läßt

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathfrak{a}_\nu, K(\mathfrak{x})) \mathfrak{a}_\nu = K(\mathfrak{x}'), \quad (32)$$

oder

$$T(K(\mathfrak{x})) = K(T(\mathfrak{x})). \quad (33)$$

Wählen wir für \mathfrak{x} nun den invarianten Vektor \mathfrak{s} , so folgt aus (33) wegen

$$\begin{aligned} K(\mathfrak{s}) &= \mathfrak{s} \\ T(\mathfrak{s}) &= K(T(\mathfrak{s})). \end{aligned} \quad (34)$$

Also ist auch $T(\mathfrak{s})$ invariant für alle K der Untergruppe. Hieraus schließen wir

$$T(\mathfrak{s}) = \lambda \mathfrak{s} ,$$

was zu beweisen war.

Man kann nun nach diesen Vorbereitungen den für unsere Ziele wichtigen Satz beweisen:

Satz IV. *Jeder einer Kugel vom Radius $\sqrt{\frac{s}{n}}$ einbeschriebene regelmäßige \mathfrak{S}_n ist ein Koordinatenstern, also auch ein Pohlke'scher Normalstern.*

Ferner gilt:

Satz V. *Jeder einer Kugel vom Radius $\sqrt{\frac{s}{n}}$ einbeschriebene reguläre \mathfrak{S}_n ist ein Koordinatenstern, also auch ein Pohlke'scher Normalstern.*

Da für $s < 4$ unmittelbar eingesehen werden kann, daß die regulären Sterne regelmäßig sind, folgt die Richtigkeit von Satz V für die Vielecks- und Polyedersterne direkt aus Satz IV. Wir folgern später den Satz V aus einem allgemeineren für alle regulären Polytope gültigen Theorem.

Nach Definition ist ein regelmäßiger \mathfrak{S}_n symmetrisch und transitiv. Wegen der Symmetrie ist jeder Vektor \mathfrak{a}_ν von \mathfrak{S}_n Symmetrievektor, also wie weiter oben bewiesen wurde auch Eigenvektor der zu \mathfrak{S}_n gehörenden, durch (22) definierten Transformation T . Es sei also

$$T(\mathfrak{a}_k) = \lambda_k \mathfrak{a}_k \tag{35}$$

und folglich

$$\lambda_k \mathfrak{a}_k^2 = (T(\mathfrak{a}_k), \mathfrak{a}_k) = \sum_{\nu=1}^n (\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{a}_k)^2 . \tag{36}$$

Wegen der Transitivität von \mathfrak{S}_n gibt es in der Gruppe von \mathfrak{S}_n eine Operation K , so daß

$$K(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n \quad \text{und} \quad K(\mathfrak{a}_k) = \mathfrak{a}_i$$

wird. Da K eine kongruente Abbildung ist, gilt zunächst nach (36)

$$\lambda_k \mathfrak{a}_k^2 = \sum_{\nu=1}^n (K(\mathfrak{a}_\nu), K(\mathfrak{a}_k))^2 = \sum_{\nu=1}^n (\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{a}_i)^2 = \lambda_i \mathfrak{a}_i^2 ; \tag{37}$$

denn die rechts außen stehende Summe entsteht aus der links benachbarten durch Permutation der Summanden. Da nun die Vektoren transitiver Sterne alle gleich lang sind, folgt aus (37)

$$\lambda_k = \lambda_i = \lambda ; \tag{38}$$

alle Vektoren von \mathfrak{S}_n sind Eigenvektoren, die zum gleichen Eigenwert λ gehören. Da der Rang von \mathfrak{S}_n nach Voraussetzung s ist, muß λ ein s -facher Eigenwert der zu \mathfrak{S}_n gehörenden Gram'schen Matrix sein.

Ist ϱ der Radius der Umkugel von \mathfrak{S}_n , so ist die *Spur* der Gram'schen Matrix $n\varrho^2$, und da diese eine Invariante ist, gilt

$$n\varrho^2 = s\lambda ,$$

oder also

$$\lambda = \frac{n}{s} \varrho^2 . \quad (39)$$

Wählen wir für ϱ den Wert $\sqrt{\frac{s}{n}}$ so folgt, daß die s nicht verschwindenden Eigenwerte von \mathfrak{S}_n alle 1 sind. Mit Rücksicht auf die Sätze II und III ist somit Satz IV bewiesen.

4. Besteht ein \mathfrak{S}_n aus lauter Einheitsvektoren, so nennen wir ihn *normiert*. Für uns sind diejenigen normierten \mathfrak{S}_n von Interesse, für die alle nicht verschwindenden Eigenwerte gleich ausfallen. Die Spurrelation ergibt für den s -fachen Eigenwert

$$\lambda = \frac{n}{s} \quad (40)$$

durch analoge Überlegung, wie vor (39). Für alle Vektoren des Raumes gilt dann

$$T(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^n (\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{x}) \mathfrak{a}_\nu = \frac{n}{s} \mathfrak{x} . \quad (41)$$

In dieser Darstellung kann

$$(\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{x}) \mathfrak{a}_\nu$$

als Projektion des Vektors \mathfrak{x} auf die durch den Einheitsvektor \mathfrak{a}_ν festgelegte Gerade interpretiert werden.

Wir definieren:

Ein Büschel von n Geraden des R_s heißt *P-Büschel*, wenn die Summe der n Projektionen eines beliebigen Vektors \mathfrak{x} auf die Geraden den Vektor $\frac{n}{s} \mathfrak{x}$ ergibt.

Nach der voranstehenden Betrachtung ist folgendes klar:

Ein Geradenbüschel ist dann und nur dann ein P-Büschel, wenn der einer Kugel vom Radius $\sqrt{\frac{s}{n}}$ einbeschriebene Stern der Richtungsvektoren der Geraden ein Pohlke'scher Normalstern bzw. ein Koordinatenstern ist.

Für viele Überlegungen ist es wichtig, sich an die sich direkt aus der Definition ergebende Regel zu erinnern:

Das Vereinigungsbüschel zweier P-Büschel ist wieder ein P-Büschel.

Spezielle Vorkommnisse derartiger P-Büschel wurden bereits festgestellt:

So hat *E. Schönhardt*²⁾ den folgenden Satz ausgesprochen:

„Projiziert man im d -dimensionalen Raum einen Vektor v senkrecht auf die sämtlichen n Kanten eines regulären Körpers gleicher Dimension, so ergibt die Summe der Projektionen den Vektor $\frac{n}{d} v$.“

Der zitierte Satz wurde für die Dimensionen $d = 1, 2, 3$ von *Schönhardt* bewiesen und für $d > 4$ als Vermutung ausgesprochen.

Das Verfahren, das *Th. Vahlen*³⁾ zum Beweise dieses Projektionssatzes eingeschlagen hat, eignet sich für die Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen, und liefert z. B. mühelos das Gewünschte für das $2s$ -Zell, das $(s + 1)$ -Zell und das 2^s -Zell.

Nach den Sätzen von *Schönhardt* und *Vahlen* bilden also die Kanten eines regulären Körpers ein P-Büschel.

Es gelingt, wie man leicht einsehen wird, den Satz aus Satz V abzuleiten, so daß sich also die Vermutung von *Schönhardt* im vollen Umfange bestätigt.

5. Es seien G_1, G_2, \dots, G_n n Geraden eines beliebigen Geradenbüschels im R_s , und θ_{ik} bezeichne den Zwischenwinkel von G_i und G_k .

Wir interessieren uns für die Quadratsumme

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \cos^2 \theta_{ik}. \quad (42)$$

Diese ist die sogenannte *Normalspur* der *Gram'schen Matrix*

$$A = || \cos \theta_{ik} || \quad (43)$$

der Richtungseinheitsvektoren, und mit Rücksicht auf ihre Invarianz gilt die Relation

$$\Delta = \sum_{\nu=1}^s \lambda_{\nu}^2. \quad (44)$$

²⁾ *E. Schönhardt*, Über die Summe der Projektionen eines Vektors. Deutsche Mathematik, Jahrg. 2, Heft 3 (1937), S. 446—451. Der zitierte Satz findet sich auf S. 451.

³⁾ *Th. Vahlen*, Bemerkungen zu der Arbeit: *E. Schönhardt*, Über die Summe der Projektionen eines Vektors. Deutsche Mathematik, Jahrg. 2, Heft 3 (1937), S. 452—454.

Da andererseits wegen der Spurregel

$$\sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} = n$$

sein muß, folgert man die Ungleichung

$$\Delta \geq \frac{n^2}{s} . \quad (45)$$

In (45) gilt das Gleichheitszeichen offenbar dann und nur dann, wenn alle Eigenwerte gleich sind. Es gilt somit der folgende Satz:

Satz VI. *Ein Geradenbüschel ist dann und nur dann ein P-Büschel, wenn die Quadratsumme der Kosinuswerte der Zwischenwinkel den minimalen Wert $\frac{n^2}{s}$ annimmt.*

Es sei außerdem G eine beliebige Gerade im Raum, und θ_{ν} der Zwischenwinkel von G und G_{ν} des oben betrachteten Büschels. Ist \mathbf{e} , $|\mathbf{e}| = 1$, Richtungsvektor von G und \mathbf{a}_{ν} , $|\mathbf{a}_{\nu}| = 1$, Richtungsvektor von G_{ν} , so gilt

$$(T(\mathbf{e}), \mathbf{e}) = \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_{\nu}, \mathbf{e})^2 = \sum_{\nu=1}^n \cos^2 \theta_{\nu} . \quad (46)$$

Sind alle nicht verschwindenden Eigenwerte von T gleich, so ist

$$T(\mathbf{e}) = \frac{n}{s} \mathbf{e} ,$$

woraus wir mit Rückblick auf (46) folgern, daß stets

$$\sum_{\nu=1}^n \cos^2 \theta_{\nu} = \frac{n}{s} \quad (47)$$

ist. Im umgekehrten Sinne ist der analoge Schluß möglich.

Es ergibt sich:

Satz VII. *Ein Geradenbüschel ist dann und nur dann ein P-Büschel, wenn die Quadratsumme der Kosinuswerte der Zwischenwinkel der Büschelgeraden mit einer veränderlichen Geraden konstant ausfällt. Die fragliche Konstante ist $\frac{n}{s}$.*

6. Wir bezeichnen ein P-Büschel mit n Geraden im R_s mit $P(n, s)$. So bilden s orthogonale Geraden im R_s offenbar ein $P(s, s)$. Nach Satz V gibt es stets ein $P(n, s)$, wenn n die Eckpunktzahl eines regulären Polytops im R_s ist, oder sich als Summe solcher Zahlen darstellen läßt.

Eine derartige Zerlegung ist für $s \geq 3$ aber nicht für alle $n \geq s$ möglich⁴⁾, so daß die Existenz eines $P(n, s)$ für beliebige $n \geq s$ zunächst fraglich ist. Wir zeigen aber:

Existenzsatz: Für jede Zahl $n \geq s$ existiert ein $P(n, s)$.

Es gilt nämlich:

- a) Aus der Existenz eines $P(n, s)$ und eines $P(m, s)$ folgt die Existenz eines $P(n + m, s)$.
- b) Aus der Existenz eines $P(n, s)$ folgt die Existenz eines $P(n, n - s)$.

Die Aussage a) ist eine direkte Folge der Definition und wurde früher bereits erwähnt; b) ergibt sich so: Wenn ein $P(n, s)$ existiert, so gibt es einen der Kugel vom Radius $\sqrt{\frac{s}{n}}$ eingeschriebener Koordinatenstern

$$\mathfrak{S}_n = \{a_1, \dots, a_n\}, \quad |a_\nu| = \sqrt{\frac{s}{n}}, \quad \text{im } R_s.$$

Nach der Charakterisierung der Koordinatensterne, die wir zu Beginn von Satz I gewählt haben, gibt es einen Stern

$$\bar{\mathfrak{S}}_n = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \quad \text{im } R_{n-s},$$

wo R_{n-s} orthogonal zu R_s ist, so daß im R_n die Vektoren

$$e_\nu = a_\nu + \bar{a}_\nu$$

einen \mathfrak{C}_n bilden. Wegen der Symmetrie dieser Kennzeichnung ist offenbar $\bar{\mathfrak{S}}_n$ im R_{n-s} ein Koordinatenstern, und wegen

$$e_\nu^2 = 1 = a_\nu^2 + \bar{a}_\nu^2, \quad |\bar{a}_\nu| = \sqrt{\frac{n-s}{n}},$$

ist $\bar{\mathfrak{S}}_n$ der Kugel vom Radius $\sqrt{\frac{n-s}{n}}$ eingeschrieben. So ergibt sich die Existenz eines $P(n, n - s)$.

Mit Hilfe von a) und b) gelingt der Existenznachweis für ein beliebiges $P(n, s)$, $s \geq 2$, leicht. Wir nehmen einmal an, der Beweis sei geleistet für alle Dimensionen, die kleiner sind als s . Es gibt also $P(n, r)$ für alle $n \geq r$ und $1 \leq r < s$; nach b) gibt es also auch stets ein $P(r + s, s)$, und

⁴⁾ Im Falle $s = 3$ z. B. gestatten alle Zahlen eine derartige Zerlegung mit Ausnahme von $n = 5$. So bliebe die Existenz eines $P(5, 3)$ ungewiß.

wegen der Existenz des $P(s, s)$ nach a) ein $P(ks + r, s)$, $1 \leq r < s$, $1 \leq k$, sowie auch ein $P(ks, s)$.

Der Existenzsatz ist somit auch richtig für die Dimension s . Da er aber für $s = 1$ (trivialerweise) richtig ist, ist er für alle s richtig, w. z. b. w.

7. Wir beweisen jetzt:

Die vom Mittelpunkt eines regulären Polytops durch die Eckpunkte gelegten Geraden bilden ein P -Büschel⁵⁾.

Nach Satz VI genügt es, nachzurechnen, daß die Quadratsumme der Kosinuswerte der Zwischenwinkel den kleinsten Wert $\frac{n^2}{s}$ erreicht.

In der unten folgenden Tabelle sind die zu dieser Verifikation erforderlichen Elemente zusammengestellt⁶⁾.

Die Kolonnen der Tabelle enthalten:

1. Die Dimension s des Raumes.
2. Die Bezeichnung des regulären Polytops.
3. Die Eckpunktzahl n .
4. Die Nummer i der Sorte von Kosinuswerten. Die n^2 Elemente der *Gram*'schen Matrix wurden zweckmäßig in Sorten gleicher Elemente eingeteilt.
5. Die Zahl m_i der in der i -ten Sorte enthaltenen gleichen Kosinuswerte. Offenbar gilt $\sum m_i = n^2$.
6. Der Kosinuswert $\cos \theta_i$ der i -ten Sorte.
7. Die Quadratsumme

$$\Delta = \sum m_i \cos^2 \theta_i .$$

8. Der Wert λ der s nicht verschwindenden, zusammenfallenden Eigenwerte der *Gram*'schen Matrix des Polytops.

Es stellt sich in der Tat heraus, daß Δ stets den Wert $\frac{n^2}{s}$ annimmt.

Mit dem obenstehenden Satz ist nun auch der äquivalente Satz V, dessen Beweis wir noch schuldig geblieben sind, sichergestellt.

⁵⁾ Bei allen Polytopen mit Gegenecken wird die entsprechende Achse zweimal geliefert, und muß im P -Büschel auch doppelt gezählt werden. Selbstverständlich bilden in diesen Fällen die einfach gezählten Geraden ebenfalls ein P -Büschel mit halber Geradenzahl. So entsteht z. B. aus dem Oktaederbüschel mit 6 Geraden das Orthogonalbüschel mit 3 Geraden.

⁶⁾ Als Unterlage diente: *A. Urech, Polytopes réguliers de l'espace à n dimensions et leurs groupes de rotations*, Thèse E. P. F., Zurich (1925).

s	Polytop	n	i	m_i	$\cos \theta_i$	A	λ
2	Reguläres n -Eck	n	i	n	$\cos \frac{2(i-1)\pi}{n}$ $i = 1, 2, \dots, n$	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n}{2}$
3	Tetraeder	4	1	4	1	$\frac{16}{3}$	$\frac{4}{3}$
			2	12	$-\frac{1}{3}$		
3	Hexaeder	8	1	8	1	$\frac{64}{3}$	$\frac{8}{3}$
			2	24	$\frac{1}{3}$		
			3	24	$-\frac{1}{3}$		
			4	8	-1		
3	Oktaeder	6	1	6	1	12	2
			2	24	0		
			3	6	-1		
3	Ikosaeder	12	1	12	1	48	4
			2	60	$\frac{1}{\sqrt{5}}$		
			3	60	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		
			4	12	-1		
3	Dodekaeder	20	1	20	1	$\frac{400}{3}$	$\frac{20}{3}$
			2	60	$\frac{\sqrt{5}}{3}$		
			3	120	$\frac{1}{3}$		
			4	120	$-\frac{1}{3}$		
			5	60	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$		
			6	20	-1		
4	5-Zell	5	1	5	1	$\frac{25}{4}$	$\frac{5}{4}$
			2	20	$-\frac{1}{4}$		
4	16-Zell	8	1	8	1	16	2
			2	48	0		
			3	8	-1		

s	Polytop	n	i	m_i	$\cos \theta_i$	A	λ
4	8-Zell	16	1	16	1	64	4
			2	64	$\frac{1}{2}$		
			3	96	0		
			4	64	$-\frac{1}{2}$		
			5	16	-1		
4	24-Zell	24	1	24	1	144	6
			2	192	$\frac{1}{2}$		
			3	144	0		
			4	192	$-\frac{1}{2}$		
			5	24	-1		
4	600-Zell	120	1	120	1	3600	30
			2	1440	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$		
			3	2400	$\frac{1}{2}$		
			4	1440	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$		
			5	3600	0		
			6	1440	$\frac{1 - \sqrt{5}}{4}$		
			7	2400	$-\frac{1}{2}$		
			8	1440	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$		
			9	120	-1		
4	120-Zell	600	1	600	1	90000	150
			2	2400	$\frac{1 + 3\sqrt{5}}{8}$		
			3	7200	$\frac{5 + \sqrt{5}}{8}$		
			4	14400	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$		

s	Polytop	n	i	m_i	$\cos \theta_i$	A	λ
4	120-Zell (Fortsetzung)	600	5	7200	$\frac{3}{4}$	90000	150
			6	2400	$\frac{-1 + 3\sqrt{5}}{8}$		
			7	14400	$\frac{3 + \sqrt{5}}{8}$		
			8	14400	$\frac{\sqrt{5}}{4}$		
			9	19200	$\frac{1}{2}$		
			10	14400	$\frac{1 + \sqrt{5}}{8}$		
			11	7200	$\frac{5 - \sqrt{5}}{8}$		
			12	14400	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$		
			13	16800	$\frac{1}{4}$		
			14	14400	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{8}$		
			15	14400	$\frac{3 - \sqrt{5}}{8}$		
			16	32400	0		
			17	14400	$\frac{-3 + \sqrt{5}}{8}$		
			18	14400	$\frac{1 - \sqrt{5}}{8}$		
			19	16800	$-\frac{1}{4}$		
			20	14400	$\frac{1 - \sqrt{5}}{4}$		
			21	7200	$\frac{-5 + \sqrt{5}}{8}$		
			22	14400	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{8}$		
			23	19200	$-\frac{1}{2}$		
			24	14400	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$		

s	Polytop	n	i	m_i	$\cos \theta_i$	A	λ
4	120-Zell (Fortsetzung)	600	25	14400	$\frac{-3 - \sqrt{5}}{8}$	90000	150
			26	2400	$\frac{1 - 3\sqrt{5}}{8}$		
			27	7200	$-\frac{3}{4}$		
			28	14400	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$		
			29	7200	$\frac{-5 - \sqrt{5}}{8}$		
			30	2400	$\frac{-1 - 3\sqrt{5}}{8}$		
			31	600	-1		
s	$s+1$ -Zell	$s+1$	1	$s+1$	1	$\frac{(s+1)^2}{s}$	$\frac{s+1}{s}$
			2	$s(s+1)$	$-\frac{1}{s}$		
s	$2s$ -Zell	$2s$	1	$2s$	1	$4s$	2
			2	$4s(s-1)$	0		
			3	$2s$	-1		
s	$2s$ -Zell	$2s$	i	$2s \binom{s}{i}$ ($i=0, 1, \dots, s$)	$1 - \frac{2i}{s}$ ($i=0, 1, \dots, s$)	$\frac{4s}{s}$	$\frac{2s}{s}$

Zum Schlusse weisen wir noch auf folgendes hin: Wenn man außer der durch Satz VII klargestellten, für P -Büschel charakteristischen Eigenschaft der Winkel der Büschelgeraden mit einer beliebigen Geraden, verlangt, daß die Summe der Kosinuskwerte verschwindet, so gelangt man zu dem von *L. Schläfli* eingeführten Begriff des eutaktischen Büschels. Herr *W. Gruner* in Bern machte mich in freundlicher Weise darauf aufmerksam, daß bereits *L. Schläfli* die Eutaxie der regulären Büschel hergeleitet hat. ⁷⁾

(Eingegangen den 9. August 1940.)

⁷⁾ *L. Schläfli*, Theorie der vielfachen Kontinuität, herausgegeben von *J. H. Graf*, Bern 1901, § 35. Über die Summe der Quadrate der Projektionen eines Strahles auf symmetrisch verteilte Richtungen, S. 134—139.

Une propriété des variétés du second ordre

Par LOUIS KOLLROS, Zurich

Steiner a énoncé sans démonstration une propriété des coniques qu'on peut généraliser dans l'espace à n dimensions.

On sait que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique est un cercle; on le désigne sous le nom de *cercle orthoptique* de la conique; le carré de son rayon r est égal à la somme des carrés des demi-axes de la conique.

Pour une ellipse $r^2 = a^2 + b^2$. Si h et \bar{h} sont deux hyperboles conjuguées, celle, h , qui est située dans l'angle aigu des asymptotes a un cercle orthoptique réel c pour lequel $r^2 = a^2 - b^2$; le cercle orthoptique \bar{c} de \bar{h} est imaginaire. Pour l'hyperbole équilatère $r = 0$. Pour la parabole $r = \infty$; la droite orthoptique de la parabole est la directrice.

Les rayons de courbure d'une conique ont avec son cercle orthoptique la relation suivante:

*Théorème de Steiner*¹⁾: „Si, en un point P d'une conique, on porte sur la normale extérieure n une longueur égale au rayon de courbure de la conique en P , le cercle c' décrit sur cette longueur comme diamètre coupe orthogonalement le cercle orthoptique.“ Et inversement: *Si l'on trace un cercle c' tangent à une conique en l'un de ses points P et orthogonal à son cercle orthoptique c , le diamètre de c' est égal au rayon de courbure de la conique en P . Si donc p est la polaire de P par rapport au cercle orthoptique c , le point P' où p coupe la normale n est le symétrique, par rapport à P , du centre de courbure de la conique en P .*

Ce théorème s'applique aussi à l'hyperbole \bar{h} située dans l'angle obtus des asymptotes; le cercle c' orthogonal au cercle imaginaire \bar{c} de rayon ir coupe diamétralement le cercle concentrique réel de rayon r ; la polaire de P par rapport à \bar{c} est l'antipolaire de P par rapport au cercle réel. Pour l'hyperbole équilatère, la polaire de P par rapport au cercle O de rayon nul est le diamètre perpendiculaire à OP . Pour la parabole, le centre du cercle c' est sur la directrice; on a donc le résultat connu: le rayon de courbure en un point P d'une parabole est le double du segment de la normale compris entre P et la directrice.

Au § 1 je démontre le théorème de Steiner et je prouve qu'il est une propriété caractéristique des coniques, c'est-à-dire que, parmi les courbes planes, les coniques seules jouissent de cette propriété.

¹⁾ Crelle 30, p. 271; Oeuvres complètes, tome II, p. 341.

Dans le § 2 j'indique la généralisation du théorème de Steiner dans l'espace à trois dimensions: „Le diamètre de la sphère tangente à une quadrique Q en un de ses points P et orthogonale à sa sphère orthoptique est égal à la somme des rayons de courbure principaux de la quadrique en P “, donc aussi égal à la somme des rayons de courbure des sections normales de Q menées par deux diamètres conjugués quelconques de l'indicatrice de P .

Au § 3 je trouve l'équation aux dérivées partielles de toutes les quadriques admettant une sphère donnée comme sphère orthoptique.

Le § 4 montre que le théorème de Steiner est le cas particulier pour $n = 2$ d'un théorème de l'espace euclidien à n dimensions relatif aux variétés du second ordre (ou hyperquadriques).

§ 1. Démonstration du théorème de Steiner

Une conique c' est harmoniquement circonscrite à une conique k quand il existe un triangle inscrit à c' et polaire à k ; il en existe alors une infinité; il y aura donc aussi une infinité de triangles polaires de c' et circonscrits à k puisqu'on peut transformer les coniques c' et k l'une en l'autre par polaires réciproques. Si les c' sont des cercles, ils sont orthogonaux au cercle orthoptique; ce théorème a été publié par *Faure*²⁾; il se trouve déjà, sous sa forme projective générale, dans deux manuscrits de Steiner intitulés: „Der neueste Satz“; l'un est de 1845 et l'autre du 15 juillet 1858; il se généralise dans l'espace à n dimensions: „Les hypersphères harmoniquement circonscrites à une hyperquadrique en coupent orthogonalement l'hypersphère orthoptique.“

Dans le plan, les points d'intersection des cercles c' et de la conique k peuvent être réels ou imaginaires; dans le cas limite où le cercle c' est tangent à k , on a le théorème énoncé dans l'introduction.

En négligeant des infiniment petits du troisième ordre, on peut remplacer la conique k en un de ses points P par son cercle de courbure k' en P ; soit ρ son rayon; le cercle orthoptique de k' a le rayon $\rho\sqrt{2}$; tout cercle tangent à k' et orthogonal à son cercle orthoptique a un diamètre égal à ρ .

Plus généralement, si ρ est le rayon de courbure d'une courbe plane quelconque en un de ses points P et si l'on considère deux tangentes t' et t'' voisines de la tangente t à cette courbe en P , le cercle conjugué au triangle $t t' t''$ tend vers un cercle de diamètre ρ quand t' et t'' se rapprochent indéfiniment de t .

²⁾ Nouv. Ann. de Math., t. 19, p. 234 (1860).

La vérification analytique du théorème de Steiner est très simple
Soit

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0$$

l'équation d'une conique;

$$x^2 + y^2 = A + B$$

celle de son cercle orthoptique c ; $P(\bar{x}, \bar{y})$ un point quelconque de la conique;

$$\bar{x}x + \bar{y}y = A + B$$

l'équation de la polaire p de P par rapport au cercle c .

Les équations de la normale à la conique en P sont:

$$x = \bar{x} + \frac{\bar{x}\lambda}{A} \quad \text{et} \quad y = \bar{y} + \frac{\bar{y}\lambda}{B};$$

cette normale coupe la polaire p au point P' pour lequel le paramètre λ a la valeur: $\lambda = A + B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2$.

Le diamètre $d = PP'$ du cercle c' sera donc:

$$d = (A + B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2) \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{A^2} + \frac{\bar{y}^2}{B^2}}.$$

On trouve la même expression si l'on calcule le rayon de courbure à la conique en P .

Le théorème de Steiner est une propriété caractéristique des coniques.

Etant donné le cercle fixe $c: x^2 + y^2 = r^2$, cherchons toutes les courbes planes telles que — P étant un point quelconque de la courbe, M le centre de courbure en P et P' le symétrique de M par rapport à P — le cercle c' de diamètre $d = PP'$ soit orthogonal au cercle donné c .

Pour trouver l'équation différentielle la plus simple de cette famille de courbes, il faut choisir le système de coordonnées dans lequel le rayon de courbure s'exprime le plus simplement. Considérons la courbe comme enveloppe de la droite:

$$x \cos u + y \sin u = p;$$

p et u sont les coordonnées polaires du pied N de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur la droite. Lorsque P se déplace sur la courbe le segment $ON = p$ est une fonction de l'angle u . Il est facile de voir que la

dérivée $p'(u)$ de la fonction $p(u)$ est représentée par la distance du point N au point de contact P de la droite avec son enveloppe et que le rayon de courbure de cette enveloppe en P est égal à la somme de la fonction $p(u)$ et de sa seconde dérivée $p''(u)$.

Ainsi les deux conditions du problème sont :

$$d = p + p''$$

et

$$\left(p + \frac{d}{2}\right)^2 + p'^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

condition d'orthogonalité de c et c' . On en déduit l'équation différentielle des courbes cherchées :

$$pp'' + p'^2 + 2p^2 = r^2.$$

La substitution $p^2 = t$ la transforme en :

$$t'' + 4t = 2r^2$$

dont l'intégrale est :

$$t = p^2 = C \cos 2u + D \sin 2u + \frac{r^2}{2}.$$

C'est l'équation tangentielle de toutes les coniques admettant le cercle donné comme cercle orthoptique.

Les directions des axes sont données par $p' = 0$ ou $\operatorname{tg} 2u = \frac{D}{C}$ et leurs longueurs $2a$ et $2b$ par :

$$a^2 = A = \frac{r^2}{2} + \sqrt{C^2 + D^2} \quad ; \quad A + B = r^2 .$$

$$b^2 = B = \frac{r^2}{2} - \sqrt{C^2 + D^2}$$

Pour $C = D = 0$, on a le cercle de rayon $\frac{r}{\sqrt{2}}$; si $D = 0$ et $C \neq 0$, on a les coniques rapportées à leurs axes : ellipses ou hyperboles suivant que B est positif ou négatif ; leur équation peut s'écrire :

$$p^2 = A \cos^2 u + B \sin^2 u ;$$

si $C = 0$ et $D \neq 0$, on a les coniques précédentes tournées de 45° autour de leur centre.

§ 2. Généralisation dans l'espace à trois dimensions

Soit $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'équation d'une surface dans l'espace à trois dimensions.

Posons :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f_{ik} = f_{ki} ,$$

on aura (en supprimant le signe somme) :

$$f_i dx_i = 0$$

et les 3 égalités : $df_i = f_{ik} dx_k$, i et $k = 1, 2, 3$, la sommation devant être faite sur l'indice qui se répète. Soit n la normale en un point quelconque $P(x_i)$ de la surface ; ses cosinus directeurs sont :

$$c_i = \frac{f_i}{F} \quad \text{où} \quad F^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 ;$$

donc

$$\frac{dc_i}{c_i} = \frac{df_i}{f_i} - \frac{dF}{F} .$$

Mais

$$dc_i = \frac{dx_i}{\rho}$$

pour un déplacement de P sur une de ses lignes de courbure, ρ étant le rayon de courbure correspondant. On a donc en remplaçant c_i et df_i par leurs valeurs :

$$\frac{F dx_i}{\rho} = f_{ik} dx_k - f_i \frac{dF}{F} .$$

Si, aux trois équations ainsi obtenues :

$$\left(f_{11} - \frac{F}{\rho} \right) dx_1 + f_{12} dx_2 + f_{13} dx_3 - f_1 \frac{dF}{F} = 0$$

$$f_{12} dx_1 + \left(f_{22} - \frac{F}{\rho} \right) dx_2 + f_{23} dx_3 - f_2 \frac{dF}{F} = 0$$

$$f_{13} dx_1 + f_{23} dx_2 + \left(f_{33} - \frac{F}{\rho} \right) dx_3 - f_3 \frac{dF}{F} = 0$$

on ajoute :

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = 0 ,$$

on aura 4 équations homogènes en dx_1, dx_2, dx_3 et $-\frac{dF}{F}$; il faut donc que l'on ait, quand P se déplace sur une ligne de courbure :

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \frac{F}{\varrho} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} - \frac{F}{\varrho} & f_{23} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} - \frac{F}{\varrho} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

C'est l'équation du second degré en ϱ dont les deux racines sont les rayons de courbure principaux ϱ_1 et ϱ_2 de la surface en P .

Dans le cas particulier des quadriques :

$$2f \equiv \frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \frac{x_3^2}{A_3} - 1 = 0 ,$$

$$f_i = \frac{x_i}{A_i} ; f_{ii} = \frac{1}{A_i} \quad \text{et} \quad f_{ik} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k ;$$

l'équation en ϱ devient :

$$\begin{aligned} & \frac{x_1^2}{A_1^2} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{F}{\varrho} \right) \left(\frac{1}{A_3} - \frac{F}{\varrho} \right) + \frac{x_2^2}{A_2^2} \left(\frac{1}{A_3} - \frac{F}{\varrho} \right) \left(\frac{1}{A_1} - \frac{F}{\varrho} \right) + \\ & + \frac{x_3^2}{A_3^2} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{F}{\varrho} \right) \left(\frac{1}{A_2} - \frac{F}{\varrho} \right) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\varrho^2 - \left[(A_2 + A_3) \frac{x_1^2}{A_1} + (A_3 + A_1) \frac{x_2^2}{A_2} + (A_1 + A_2) \frac{x_3^2}{A_3} \right] F \varrho + A_1 A_2 A_3 F^4 = 0 ,$$

où

$$F^2 = \sum \frac{x_i^2}{A_i^2} .$$

Le coefficient de $-\varrho$, somme des deux rayons de courbure principaux, peut aussi s'écrire :

$$(A_1 + A_2 + A_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) F = \varrho_1 + \varrho_2 .$$

Mais on trouve la même expression en calculant le diamètre d de la sphère tangente à la quadrique en P et orthogonale à sa sphère orthoptique :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = A_1 + A_2 + A_3 .$$

Les 3 équations de la normale n à la quadrique en $P(x_i)$ sont :

$$X_i = x_i + f_i \lambda ;$$

le plan polaire :

$$x_i X_i = A_1 + A_2 + A_3$$

de P par rapport à la sphère orthoptique coupe n au point P' pour lequel

$$\lambda = \Sigma (A_i - x_i^2)$$

puisque $x_i f_i = 1$; alors PP' ou

$$d = \Sigma (A_i - x_i^2) F = \varrho_1 + \varrho_2 .$$

On a donc le

Théorème : Le diamètre de la sphère tangente à une quadrique Q en l'un quelconque de ses points P et orthogonale à la sphère orthoptique de Q est égal à la somme des rayons de courbure principaux de la quadrique en P , donc aussi égal à la somme des rayons de courbure des sections normales de Q menées par deux diamètres conjugués quelconques de l'indicatrice de P .

§ 3. Equation aux dérivées partielles des quadriques admettant une sphère donnée comme sphère orthoptique

Pour trouver cette équation nous utiliserons dans l'espace à trois dimensions le système de coordonnées tangentielles analogue à celui que nous avons employé dans le plan au § 1.

Nous considérons la surface comme enveloppe du plan :

$$p = x_1 \cos u \cos v + x_2 \sin u \cos v + x_3 \sin v ;$$

la distance $p = ON$, la longitude u et la latitude v sont les trois coordonnées polaires du pied N de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur le plan; x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées rectangulaires du point de contact P du plan avec la surface. Quand P varie sur la surface, p est une fonction de u et v . Si l'on calcule les dérivées partielles p'_u et p'_v , on voit que le déterminant des coefficients de x_1, x_2 et x_3 dans les expressions de $p, \frac{p'_u}{\cos v}$ et p'_v est égal à un; on a donc :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2 + \left(\frac{p'_u}{\cos v} \right)^2 + p_v'^2$$

ou

$$\overline{PN}^2 = \left(\frac{p'_u}{\cos v} \right)^2 + p_v'^2 .$$

Les rayons de courbure principaux ϱ_1 et ϱ_2 de la surface en P s'expriment à l'aide des dérivées partielles secondes p''_{uu} , p''_{uv} , p''_{vv} . Si l'on désigne par R , S et T les expressions suivantes :

$$R = p + p''_{vv} ; S = \frac{p''_{uv}}{\cos v} + \frac{\sin v}{\cos^2 v} p'_u ; T = \frac{p''_{uu}}{\cos^2 v} - \frac{\sin v}{\cos v} p'_v + p ,$$

on a :

$$R + T = \varrho_1 + \varrho_2 \quad \text{et} \quad RT - S^2 = \varrho_1 \varrho_2 .$$

Si donc on reporte sur la normale extérieure n à la surface en P la longueur $PP' = d = \varrho_1 + \varrho_2$, la sphère de diamètre d sera orthogonale à la sphère fixe: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ si l'on a :

$$\left(p + \frac{d}{2}\right)^2 + \overline{PN}^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

ou

$$p^2 + pd + \left(\frac{p'_u}{\cos v}\right)^2 + p'^2_v = r^2$$

et enfin en remplaçant d par sa valeur $R + T$:

$$p p''_{vv} + p'^2_v + \sec^2 v (p p''_{uu} + p'^2_u) - \operatorname{tg} v \cdot p p'_v + 3p^2 = r^2 .$$

C'est l'équation aux dérivées partielles cherchée.

En posant $p^2 = t$, elle prend la forme simple :

$$t''_{vv} + \sec^2 v \cdot t''_{uu} - \operatorname{tg} v \cdot t'_v + 6t = 2r^2 .$$

En particulier, si $r^2 = A_1 + A_2 + A_3$, les intégrales de cette équation représentées par les quadriques rapportées à leurs axes sont :

$$t = p^2 = (A_1 \cos^2 u + A_2 \sin^2 u) \cos^2 v + A_3 \sin^2 v .$$

Suivant que le nombre des A_i positifs est trois, deux ou un, ces surfaces sont des ellipsoïdes, des hyperboloïdes à une nappe ou des hyperboloïdes à deux nappes.

Les autres intégrales sont les équations tangentielles de ces mêmes quadriques après une rotation quelconque autour de l'origine.

§ 4. Propriété des variétés du second ordre

Nous démontrons maintenant le théorème général relatif à une hyperquadrique située dans un espace à n dimensions.

Théorème : Le diamètre de l'hypersphère tangente à une hyperquadrique Q en l'un de ses points P et orthogonal à l'hypersphère orthoptique de Q est égal à la somme des $(n - 1)$ rayons de courbure principaux de l'hyperquadrique en P .

Dans sa „Theorie der vielfachen Kontinuität“, *Schläfli* avait déjà montré (p. 154) qu'une hyperquadrique Q :

$$\frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \dots + \frac{x_n^2}{A_n} = 1$$

a une hypersphère orthoptique.

Si l'on pose :

$$\frac{1}{p^2} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{A_i^2}$$

les cosinus directeurs c_i de la normale à l'hyperquadrique en un de ses points $P(x_i)$ sont :

$$c_i = \frac{p x_i}{A_i}$$

et la distance du centre O au plan tangent en P est :

$$c_i x_i = p ,$$

en supprimant le signe somme ($i = 1, 2, \dots, n$). On a donc aussi pour cette distance p , l'expression :

$$p^2 = A_i c_i^2 .$$

Si l'on mène par l'origine O n directions (1), (2), ..., (n) formant un système orthogonal et si l'on désigne leurs cosinus directeurs respectivement par :

c_{i_1} pour la direction (1), c_{i_2} pour la direction (2), ..., c_{i_n} pour la direction (n), i variant de 1 à n , les hyperplans tangents à Q perpendiculaires à ces n directions formeront aussi un système orthogonal et leurs distances p_k à l'origine seront données par les n équations :

$$p_k^2 = A_i c_{i_k}^2 \quad k = 1, 2, \dots, n .$$

En les additionnant et en remarquant que les c_{ik} satisfont aux conditions d'orthogonalité :

$$\sum_{i=1}^n c_{ik}^2 = 1 ,$$

on a :

$$p_1^2 + \dots + p_n^2 = A_1 + \dots + A_n .$$

Si le point d'intersection I des n hyperplans tangents orthogonaux a les coordonnées X_i , la distance OI sera donnée par :

$$\overline{OI}^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2 = p_1^2 + \dots + p_n^2$$

et le lieu géométrique de tous les points analogues à I est l'hypersphère orthoptique :

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 = A_1 + \dots + A_n .$$

L'hyperplan polaire π d'un point $P(x_i)$ de l'hyperquadrique Q par rapport à l'hypersphère orthoptique a l'équation :

$$x_i X_i = A_1 + \dots + A_n .$$

La normale n à Q en P est donnée par les n équations :

$$X_i = x_i + \frac{x_i}{A_i} \lambda ;$$

elle coupe π au point P' pour lequel $\lambda = \sum (A_i - x_i^2)$ et le diamètre $PP' = d$ de l'hypersphère tangente à Q en P et orthogonale à l'hypersphère orthoptique de Q est donnée par :

$$d = \frac{1}{p} \sum (A_i - x_i^2) \quad \text{puisque} \quad \sum \frac{x_i^2}{A_i^2} = \frac{1}{p^2} .$$

Il est facile de voir par une méthode analogue à celle du § 2 que d est aussi égal à la somme des rayons de courbure principaux $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-1}$ de l'hyperquadrique Q en P .

Ces ϱ_i sont, en effet, les racines de l'équation du degré $(n - 1)$ en ϱ :

$$\left| \begin{array}{cccccc} \frac{1}{A_1} - \frac{1}{p\varrho} & 0 & \dots & 0 & \frac{x_1}{A_1} \\ 0 & \frac{1}{A_2} - \frac{1}{p\varrho} & \dots & 0 & \frac{x_2}{A_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{A_n} - \frac{1}{p\varrho} & \frac{x_n}{A_n} \\ \frac{x_1}{A_1} & \frac{x_2}{A_2} & \dots & \frac{x_n}{A_n} & 0 \end{array} \right| = 0$$

ou:

$$\frac{x_1^2}{A_1^2} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{p\varrho} \right) \dots \left(\frac{1}{A_n} - \frac{1}{p\varrho} \right) + \dots + \frac{x_n^2}{A_n^2} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{p\varrho} \right) \dots \left(\frac{1}{A_{n-1}} - \frac{1}{p\varrho} \right) = 0 .$$

En multipliant par $A_1 A_2 \dots A_n \varrho^{n-1}$ et en tenant compte de l'équation de Q : $\sum \frac{x_i^2}{A_i} = 1$, on voit que le coefficient de $-\varrho^{n-2}$, donc la somme des rayons de courbure principaux de Q en P , est identique à l'expression trouvée pour d :

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_{n-1} = \frac{1}{p} \sum (A_i - x_i^2) = d .$$

Le produit de la distance p par la somme des ϱ_i est égal à la puissance du point P par rapport à l'hypersphère orthoptique de Q .

(Reçu le 31 août 1940.)

Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen

Von HEINZ HOPF, Zürich

L. E. J. Brouwer
zum 60. Geburtstag

1. Der „Rang“ λ einer geschlossenen Lieschen Gruppe G soll im folgenden so definiert sein: G enthält λ -dimensionale, aber nicht höherdimensionale Abelsche Untergruppen. Diese Definition weicht zwar von der üblichen etwas ab, sie ist aber am Platze, wenn man will, daß der nachstehende Satz von E. Cartan für beliebige geschlossene Gruppen, nicht nur für halb-einfache, Gültigkeit habe:¹⁾

Die Summe der Bettischen Zahlen einer geschlossenen Gruppe vom Range λ ist gleich 2^λ .

Da der Rang bereits durch die Eigenschaften der Gruppe in der Umgebung des Eins-Elementes bestimmt ist, vermittelt der Satz eine der interessanten Beziehungen, die zwischen der lokalen und der globalen Struktur von G bestehen. Er ist von Cartan im Rahmen seiner Theorie der invarianten Integrale durch eine Rechnung bewiesen worden.

Wir werden im folgenden für den Rang eine Deutung innerhalb der Homologie-Theorie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten angeben, welche die Gültigkeit des Satzes in Evidenz setzt. Als Koeffizientenbereich für die Homologien soll der Körper der rationalen Zahlen — oder auch der Körper der reellen Zahlen — dienen; dann ist, wie ich gezeigt habe, der Homologie-Ring $\mathfrak{R}(G)$ einer geschlossenen Gruppe G dimensionstreu isomorph dem Homologie-Ring eines topologischen Produktes

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_l, \quad l \geq 1,$$

wobei die S_i Sphären von ungeraden Dimensionen sind.²⁾ Es ist klar, daß die Summe der Bettischen Zahlen dieses Produktes, also auch die Summe der Bettischen Zahlen von G , gleich 2^l ist; daher ist der Cartansche Satz mit dem folgenden äquivalent:

Der Rang λ von G ist gleich der Anzahl l der Faktoren in dem Sphärenprodukt, dessen Ring dem Ring von G isomorph ist.

Dieser Satz enthält die Deutung des Ranges als Homologiegröße; er

¹⁾ (2), Nr. 56; (4), § VII, p. 24. — Die fetten Nummern in Klammern beziehen sich auf das Literatur-Verzeichnis am Ende der Arbeit.

²⁾ H. Hopf, Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen [Annals of Math. 42 (1941)].

wird im folgenden neu bewiesen werden, und zwar mit prinzipiell anderen Hilfsmitteln als denen, auf welchen der frühere Beweis des Cartanschen Satzes beruht.³⁾

2. Die zu beweisende Gleichheit zwischen der „lokal“ definierbaren Zahl λ und der „global“ definierten Zahl l wird mit Hilfe des Brouwerschen Abbildungsgrades zu Tage treten. Wir betrachten für eine ganze Zahl k die Abbildung

$$p_k(x) = x^k,$$

welche jedem Element von G seine k -te Potenz zuordnet; ihr Grad sei γ_k . Die Gleichheit $\lambda = l$ ist gesichert, sobald für eine Zahl $k > 1$ die beiden folgenden Sätze bewiesen sind:

Satz I. Der Homologie-Ring der geschlossenen Gruppe G sei dem Ring des topologischen Produktes von l Sphären ungerader Dimensionen dimensions-treu isomorph; dann ist $\gamma_k = k^l$.

Satz II. Die geschlossene Gruppe G enthalte eine λ -dimensionale Abelsche Untergruppe, und es gebe keine höher-dimensionale Abelsche Untergruppe von G ; dann ist $\gamma_k = k^\lambda$.

Beide Sätze gelten für beliebige ganze Zahlen k .

3. Die Beweise der beiden Sätze werden ganz unabhängig voneinander sein; der Abbildungsgrad zeigt sich in ihnen von zwei verschiedenen Seiten: das eine Mal tritt er als eine der Größen auf, die zu dem Homologietypus einer Abbildung gehören, das andere Mal als Bedeckungszahl der Umgebungen einzelner Punkte. Mit diesen Andeutungen ist folgendes gemeint:⁴⁾

Eine Abbildung f einer Mannigfaltigkeit M in sich bewirkt eine Abbildung des Homologie-Ringes $\mathfrak{R}(M)$ in sich, die wir ebenfalls f nennen; sie ist ein additiver Homomorphismus. Die algebraischen Eigenschaften dieser Ring-Abbildung charakterisieren den Homologietypus der Abbildung f von M . Das Eins-Element des Ringes $\mathfrak{R}(M)$, das durch den orientierten Grundzyklus von M repräsentiert wird, bezeichnen wir selbst mit M ; dann ist der Grad γ von f durch die Gleichung

$$f(M) = \gamma M$$

gegeben. Dies ist die algebraische und globale Definition des Grades, die wir beim Beweise des Satzes I benutzen.

³⁾ Dadurch wird die in Fußnote 30 meiner Arbeit²⁾ gestellte Aufgabe gelöst.

⁴⁾ Alle im folgenden benutzten Eigenschaften des Abbildungsgrades findet man im Kap. XII der „Topologie I“ von Alexandroff-Hopf [Berlin 1935].

Dem Beweise des Satzes II dagegen liegt die anschauliche und lokale Bedeutung des Grades zugrunde. Die Abbildung f heie im Punkte q „glatt“, wenn jeder Punkt p , der auf q abgebildet wird, eine Umgebung besitzt, in welcher f eineindeutig ist; ist f in q glatt, so besteht das Urbild $f^{-1}(q)$ nur aus endlich vielen Punkten, da in der Umgebung eines Hufungspunktes von Urbildpunkten von q die geforderte Eineindeutigkeit nicht bestehen könnte; eine Umgebung von q erleidet also eine endliche Anzahl schlichter Bedeckungen durch die Bildmenge; die Bedeckungszahl, d. h. die Anzahl der positiven Bedeckungen vermindert um die Anzahl der negativen Bedeckungen, ist der Grad von f . Er hängt nicht von dem Punkt q ab, es gilt also der folgende „Hauptsatz“ ber den Abbildungsgrad: Ist die Abbildung f in zwei verschiedenen Punkten q_1 und q_2 glatt, so sind die Bedeckungszahlen in den beiden Punkten einander gleich; ist insbesondere die Bedeckungszahl in einem Punkt q_1 von 0 verschieden, so kann sie in keinem Punkt gleich 0 sein, es gibt also zu jedem Punkt q wenigstens einen Punkt p mit $f(p) = q$.

Die Glattheit in einem Punkte q ist speziell dann gesichert, wenn f stetig differenzierbar ist und die Funktionaldeterminante in keinem Urbildpunkt von q verschwindet; das Vorzeichen einer Bedeckung von q ist dasselbe wie das Vorzeichen der Funktionaldeterminante in dem betreffenden Urbildpunkt.

4. Der Satz I wird im § 1 bewiesen (für beliebige k). Die Untersuchung des Homologietypus der Abbildungen p_k geschieht mit Hilfe des Begriffes der „minimalen“ Elemente eines Homologieringes (Nr. 5) und unter Benutzung der Theorie des „Umkehrungs-Homomorphismus“ (Nr. 9).

Der § 2, der den Beweis des Satzes II enthält (für $k > 0$), kann ohne Kenntnis des § 1 gelesen werden; aus der Homologietheorie kommt in ihm nichts vor. Die Grundlage des Beweises ist die Tatsache, daß die Funktionaldeterminante einer Abbildung p_k bei positivem k nirgends negativ ist (Nr. 15). Zur Vermeidung von Komplikationen nehmen wir die geschlossene Gruppe G als analytisch an, was bekanntlich keine Einschränkung bedeutet. Aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen werden die folgenden beiden Sätze ohne Beweis benutzt: 1. Die Existenz eines kanonischen Koordinatensystems in der Umgebung des Einselementes (Nr. 17). — 2. Die Tatsache, daß jede kompakte zusammenhängende Abelsche Untergruppe von G ein „Toroid“ ist, d. h. das direkte Produkt von endlich vielen Kreisdrehungsgruppen (Nr. 18). — Zwei weitere Sätze über geschlossene Liesche Gruppen, die auf dem Wege zum Satz II auftreten, werden wir nicht als bekannt voraussetzen, sondern

mit Hilfe des Abbildungsgrades neu beweisen: a) Jede geschlossene Gruppe wird von ihren infinitesimalen Transformationen erzeugt, d. h. sie wird von ihren einparametrischen Untergruppen vollständig überdeckt (Nr. 17). — b) Diejenigen Toroide in G , welche nicht in höherdimensionalen Toroiden enthalten sind, haben sämtlich die gleiche Dimension λ (Nr. 21).

Im § 3 werden, im Anschluß an den § 2, noch einige weitere Bemerkungen über die Abbildungen p_k gemacht; dabei treten die bekannten „singulären“ Gruppenelemente auf, und unser Rang $\lambda = l$ wird mittels der charakteristischen Polynome der zu G adjungierten linearen Gruppe ausgedrückt, wie es bei halb-einfachen Gruppen üblich ist (Nr. 26).

Ich möchte noch feststellen, daß Gespräche mit Herrn H. Samelson dazu beigetragen haben, die in dieser Arbeit behandelten Fragen zu klären.

§ 1.

5. Der Koeffizientenbereich für die Homologien soll immer der rationale Körper sein. Die Homologieklassen einer geschlossenen orientierbaren Mannigfaltigkeit M werden in der üblichen Weise durch Bettische Addition und Schnitt-Multiplikation zu dem Ring $\mathfrak{R}(M)$ vereinigt.

Ein homogen-dimensionales Element V von $\mathfrak{R}(M)$ heißt „minimal“, wenn es keine anderen Vielfachen in $\mathfrak{R}(M)$ besitzt als die durch Multiplikation mit rationalen Zahlen α entstehenden Vielfachen αV — welche die gleiche Dimension wie V haben — und als die 0-dimensionalen Elemente — welche infolge des Poincaré-Veblenschen Dualitätssatzes Vielfache jedes von 0 verschiedenen Elementes sind; die 0-dimensionalen Elemente selbst rechnen wir nicht zu den minimalen.⁵⁾

Es gilt der Invarianzsatz: Bei jeder stetigen Abbildung von M in eine Mannigfaltigkeit M' ist das Bild eines minimalen Elementes von $\mathfrak{R}(M)$ wieder ein minimales Element von $\mathfrak{R}(M')$.⁵⁾

6. In der Mannigfaltigkeit Γ sei eine stetige Multiplikation erklärt, d. h. jedem geordneten Punktepaar (p, q) von Γ sei ein Punkt $p \cdot q$ von Γ zugeordnet, der stetig von dem Paar (p, q) abhängt. Setzen wir

$$p \cdot q = L_p(q) = R_q(p),$$

so ist L_p eine stetige Abbildung von Γ in sich; da L_p stetig von p abhängt, ist die durch L_p bewirkte Abbildung des Ringes $\mathfrak{R}(\Gamma)$ in sich unabhängig von p ; wir nennen diese Ringabbildung L ; analog ist die Ringabbildung R erklärt.

⁵⁾ A. a. O.²⁾, Nr. 32—34.

Ist M irgend eine Mannigfaltigkeit⁶⁾, und sind f, g zwei Abbildungen von M in Γ , so wird durch

$$P_{f,g}(a) = f(a) \cdot g(a) ,$$

wobei a einen variablen Punkt von M bezeichnet und das Produkt auf der rechten Seite im Sinne der stetigen Multiplikation in Γ zu bilden ist, eine neue Abbildung von M in Γ erklärt; die durch $f, g, P_{f,g}$ bewirkten Ringabbildungen nennen wir ebenfalls $f, g, P_{f,g}$

Hilfssatz 1. Für jedes minimale Element V von $\mathfrak{R}(M)$ gilt

$$P_{f,g}(V) = Rf(V) + Lg(V) .$$

Beweis. Die stetige Multiplikation in Γ kann als Abbildung F des topologischen Produktes $\Gamma \times \Gamma$ in Γ aufgefaßt werden:

$$F(p \times q) = p \cdot q$$

für jedes Punktepaar (p, q) von Γ . Ist Z irgend ein Element von $\mathfrak{R}(\Gamma)$ und E das durch einen einfachen Punkt repräsentierte Element, so ist⁷⁾

$$F(E \times Z) = L(Z) , \quad F(Z \times E) = R(Z) . \quad (1)$$

Sind Π_1, Π_2 die Projektionen von $\Gamma \times \Gamma$ auf Γ , die durch

$$\Pi_1(p \times q) = p , \quad \Pi_2(p \times q) = q$$

gegeben sind, so ist⁷⁾

$$\Pi_1(Z \times E) = \Pi_2(E \times Z) = Z , \quad (2a)$$

$$\Pi_1(E \times Z) = \Pi_2(Z \times E) = 0 , \quad (2b)$$

wobei für (2b) vorausgesetzt ist, daß Z positive Dimension hat.

Die Abbildungen f und g von M in Γ bewirken eine Abbildung Q von M in $\Gamma \times \Gamma$:

$$Q(a) = f(a) \times g(a)$$

für jeden Punkt a von M ; es ist

$$P_{f,g} = FQ , \quad (3)$$

$$\Pi_1 Q = f , \quad \Pi_2 Q = g . \quad (4)$$

⁶⁾ Alle Mannigfaltigkeiten sollen geschlossen und orientierbar sein.

⁷⁾ Analog wie oben bezeichnen wir die durch die stetigen Abbildungen F, Π, \dots bewirkten Ring-Abbildungen selbst mit F, Π, \dots

Es sei nun V ein minimales Element von $\mathfrak{R}(M)$; nach dem Invariansatz (Nr. 5) ist $Q(V)$ minimales Element von $\mathfrak{R}(I \times I)$; die minimalen Elemente dieses Ringes sind aber, wie man aus den bekannten Homologie- und Schnitt-Eigenschaften in Produkt-Mannigfaltigkeiten leicht bestätigt⁸⁾, die Elemente

$$(V' \times E) + (E \times V''),$$

wobei V', V'' minimale Elemente von $\mathfrak{R}(I)$ sind, die auch 0 sein können. Es gibt also zwei solche Elemente V', V'' in $\mathfrak{R}(I)$, daß

$$Q(V) = (V' \times E) + (E \times V'') \quad (5)$$

ist. Aus (5), (4), (2a), (2b) folgt

$$V' = f(V), \quad V'' = g(V),$$

also

$$Q(V) = (f(V) \times E) + (E \times g(V)). \quad (6)$$

Aus (6), (3), (1) folgt

$$P_{f,g}(V) = Rf(V) + Lg(V), \quad (7)$$

was zu beweisen war.

7. Wir nehmen jetzt an, daß die stetige Multiplikation in Γ ein Einselement besitzt; es gebe also einen Punkt e , so daß für jeden Punkt p

$$e \cdot p = p \cdot e = p$$

ist. Dann ist L_e die identische Abbildung von Γ auf sich, und L die identische Abbildung von $\mathfrak{R}(I)$ auf sich; das Gleiche gilt für R_e und R . Die Gleichung (7) lautet daher

$$P_{f,g}(V) = f(V) + g(V). \quad (8)$$

Wir betrachten in Γ die Potenzabbildungen

$$p_k(x) = x^k;$$

für sie gilt

$$p_0(x) = e, \quad p_k(x) = x \cdot p_{k-1}(x); \quad (9)$$

falls in Γ die Gruppenaxiome erfüllt sind, sind diese Abbildungen von vornherein für alle positiven und negativen k definiert; andernfalls sind sie durch (9) wenigstens für alle positiven k definiert.

⁸⁾ Man vgl. Kap. V der „Topology“ von *Lefschetz* [New York 1930].

Hilfssatz 2. In Γ sei eine stetige Multiplikation mit Eins-Element erklärt; die Potenzabbildungen p_k seien in dem soeben besprochenen Sinne definiert. Dann ist für jedes minimale Element V von $\mathfrak{R}(\Gamma)$

$$p_k(V) = kV. \quad (10)$$

Beweis. Für $k = 0$ und $k = 1$ ist (10) offenbar richtig. Setzen wir $M = \Gamma, f = p_1, g = p_{k-1}$, so ist nach (9) $p_k = P_{f,g}$, und folglich nach (8)

$$p_k(V) = V + p_{k-1}(V).$$

Hieraus folgt (10) für positive k durch Schluß von $k - 1$ auf k , für negative k durch Schluß von k auf $k - 1$.⁹⁾

8. Als weitere Vorbereitung für den Beweis des Satzes I stellen wir hier Eigenschaften des Ringes der Produkt-Mannigfaltigkeit

$$P = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_l$$

zusammen, wobei die S_i Sphären von ungeraden Dimensionen sind; die Beweise übergehen wir.⁸⁾

Die durch die Grundzyklen repräsentierten Elemente der Ringe $\mathfrak{R}(S_i)$ und $\mathfrak{R}(P)$, also die Eins-Elemente dieser Ringe, seien selbst mit S_i bzw. P , die durch einfache Punkte repräsentierten Elemente dieser Ringe seien mit E_i bzw. E bezeichnet.

In $\mathfrak{R}(P)$ besteht eine volle Homologiebasis, d. h. die Vereinigung von Homologiebasen aller Dimensionen, aus den 2^l Elementen

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_l, \quad (11)$$

wobei X_i entweder S_i oder E_i ist.

V_i sei dasjenige Element (11), in welchem $X_i = S_i, X_j = E_j$ für $j \neq i$ ist. V_1, \dots, V_l sind minimale Elemente, und zwar bilden sie eine Basis aller minimalen Elemente von $\mathfrak{R}(P)$: sie sind linear unabhängig, und jedes minimale Element ist eine lineare Verbindung von ihnen.

⁹⁾ Herr B. Eckmann hat mir gezeigt, daß der Hilfssatz 1 seine Gültigkeit behält, wenn man die in ihm behauptete Gleichung als Gleichung in einer Hurewiczschen Homotopiegruppe deutet und unter V eine Sphäre beliebiger Dimension versteht; sowie, daß der Hilfssatz 2 gültig bleibt, wenn man (10) als Gleichung in einer Hurewiczschen Gruppe deutet und unter V irgend ein Element dieser Gruppe versteht.

Z_j sei dasjenige Element (11), in welchem $X_i = \pm E_i$, $X_j = S_j$ für $j \neq i$ ist, wobei das Vorzeichen von E_i so gewählt ist, daß $Z_i \cdot V_i = +E$ ist. Das System aller Produkte

$$Z_{i_1} \cdot Z_{i_2} \cdots Z_{i_r}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_r, \quad (12)$$

zusammen mit dem Eins-Element P ist bis auf Vorzeichen identisch mit dem System der Elemente (11); es bildet also eine Basis in $\mathfrak{R}(P)$; bezeichnen wir die Produkte (12), in welchen $r > 1$ ist, mit Y_1, Y_2, \dots , so haben wir also eine Basis

$$P, Z_1, \dots, Z_t, Y_1, Y_2, \dots; \quad (13)$$

sie ist dual zu der Basis

$$E, V_1, \dots, V_t, W_1, W_2, \dots; \quad (14)$$

(auf den Bau der Elemente W_j kommt es im Augenblick nicht an); daß die Basis (13) zur Basis (14) dual ist, bedeutet: es ist

$$P \cdot E = Z_i \cdot V_i = Y_j \cdot W_j = E,$$

während für jedes andere Paar aus (13) und (14), in welchem die Dimensionzahlen der beiden Elemente sich zur Dimensionszahl von P ergänzen, das Produkt gleich 0 ist.

Folgende Produktregeln sind wichtig:

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdots Z_t = \pm E, \quad (15)$$

wobei es uns auf das Vorzeichen nicht ankommt; ferner

$$Z_i \cdot Z_i = 0, \quad (16)$$

$$Z_i \cdot Z_j = -Z_j \cdot Z_i \quad \text{für } i \neq j; \quad (17)$$

(die Voraussetzung, daß die Dimensionen der S_i ungerade sind, ist im vorstehenden nur für (17) gebraucht worden).

9. Wir erinnern jetzt an den „Umkehrungs-Homomorphismus“ der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.¹⁰⁾ Es seien M, M' zwei Mannigfaltigkeiten; $\{U_i\}$ bzw. $\{U'_j\}$ seien volle Homologiebasen in ihren Ringen, und $\{X_i\}$ bzw. $\{X'_j\}$ seien die zu diesen Basen dualen Basen. Eine Abbildung f von M in M' bewirkt eine Abbildung von $\mathfrak{R}(M)$ in $\mathfrak{R}(M')$, die durch

$$f(U_i) = \sum \alpha_{ij} U'_j \quad (18)$$

¹⁰⁾ *H. Hopf*, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten [Crelle's Journ. 163 (1930), 171—188], Satz I und Satz Ia.

gegeben sei; dann gilt der Satz: Die Abbildung φ von $\mathfrak{R}(M')$ in $\mathfrak{R}(M)$, die durch

$$\varphi(X'_j) = \sum \alpha_{ij} X_i \quad (19)$$

gegeben ist, ist nicht nur ein additiver, sondern auch ein multiplikativer Homomorphismus.

Wir nehmen jetzt an, daß M und M' gleiche Dimension haben; dann ist der Abbildungsgrad γ von f erklärt. In den obigen Basen seien $U_1 = M$, $U'_1 = M'$ die Eins-Elemente, $X_1 = E$, $X'_1 = E'$ die durch einfache Punkte repräsentierten Elemente der beiden Ringe. Die Gleichung (18) für $i = 1$ lautet

$$f(U_1) = \gamma U'_1,$$

es ist also $\alpha_{11} = \gamma$; da die U_i für $i > 1$ kleinere Dimension haben als $U'_1 = M'$, ist $\alpha_{i1} = 0$ für $i > 1$. Folglich lautet (19) für $j = 1$:

$$\varphi(E') = \gamma E; \quad (20)$$

auch durch diese Formel ist der Grad γ charakterisiert.

10. Es sei jetzt G eine Mannigfaltigkeit, deren Ring dem Ring der Produkt-Mannigfaltigkeit P aus Nr. 8 dimensionstreu isomorph sei. Diejenigen Elemente aus $\mathfrak{R}(G)$, die bei diesem Isomorphismus den Elementen V_i, Z_i, Y_j, W_j, E aus $\mathfrak{R}(P)$ entsprechen, bezeichnen wir mit denselben Buchstaben; nur statt P schreiben wir G .

Eine Abbildung f von G in sich sei gegeben; die Bilder $f(V_h)$ der minimalen Elemente V_h sind nach dem Invarianzsatz (Nr. 5) selbst wieder minimale Elemente; infolge der Basis-Eigenschaft der V_i (Nr. 8) bestehen daher Gleichungen

$$f(V_h) = \sum \gamma_{hi} V_i. \quad (21)$$

Hilfssatz 3. Der Grad von f ist die Determinante der γ_{hi} .

Beweis. Der Umkehrungs-Homomorphismus φ von f bewirkt unter anderem die folgenden Substitutionen:

$$\varphi(Z_i) = \sum \gamma_{hi} Z_h + \sum \beta_{ji} Y_j, \quad (22)$$

wobei die γ_{hi} dieselben sind wie in (21). Wir multiplizieren die l Gleichungen (22) für $i = 1, 2, \dots, l$ miteinander; dabei entsteht auf der rechten Seite eine lineare Verbindung von Produkten Π_λ , von denen jedes l Faktoren, teils Z_h und teils Y_j , enthält; nun ist aber jedes Y_j gemäß

seiner Definition selbst Produkt von mindestens zwei Z_h ; diejenigen Π_λ , welche wenigstens einen Faktor Y_j enthalten, lassen sich daher als Produkte von mehr als l Faktoren Z_h schreiben, und folglich verschwinden sie auf Grund von (17) und (16). Es ergibt sich also zunächst

$$\Pi\varphi(Z_i) = \Pi(\sum \gamma_{hi} Z_h),$$

wobei die Produkte auf beiden Seiten über $i = 1, 2, \dots, l$ zu erstrecken sind. Auf der linken Seite benutze man jetzt die multiplikativ-homomorphe Eigenschaft von φ und die Formel (15), und auf der rechten Seite wende man (17), (16), (15) an; dann erhält man

$$\varphi(E) = \text{Det.}(\gamma_{hi}) \cdot E.$$

Nach (20) ist daher $\text{Det.}(\gamma_{hi})$ der Grad von f .

11. Der Satz I (Nr. 2) ist eine unmittelbare Folge aus dem soeben bewiesenen Hilfssatz 3 und dem Hilfssatz 2 (Nr. 7); denn für die Potenzabbildung p_k einer Gruppen-Mannigfaltigkeit G lautet auf Grund des Hilfssatzes 2 die Substitution (21)

$$p_k(V_i) = kV_i, \quad i = 1, 2, \dots, l;$$

ihre Determinante ist k^l ; nach dem Hilfssatz 3 ist dies der Grad von p_k .

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der stetigen Multiplikation in G nicht benutzt worden ist; nur muß ein Eins-Element e existieren, und die Potenzen p_k müssen so definiert sein, daß die Formeln (9) gelten.

§ 2.

12. G sei eine n -dimensionale Liesche Gruppe; vorläufig setzen wir nicht voraus, daß sie geschlossen sei; ihr Eins-Element heiße e . Es seien Abbildungen h_1, h_2, \dots, h_r gegeben, welche eine Umgebung von e so in eine Umgebung von e abbilden, daß

$$h_\varrho(e) = e, \quad \varrho = 1, 2, \dots, r, \quad (1)$$

ist. Dann ist auch das Produkt

$$h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x) \cdot \dots \cdot h_r(x)$$

eine Abbildung mit $h(e) = e$.

Wir benutzen in der Umgebung von e ein festes Koordinatensystem; die Nummern der Koordinaten deuten wir durch obere Indizes an. Die

$h_e^i(x)$ seien stetig differenzierbare Funktionen der x^k ; dann sind die Funktionalmatrizen H, H_1, H_2, \dots, H_r der Abbildungen h, h_1, h_2, \dots, h_r im Punkte e definiert.

Wir behaupten:

$$H = H_1 + H_2 + \dots + H_r. \quad (2)$$

Es genügt, dies für $r = 2$ zu beweisen, da sich dann der allgemeine Fall durch wiederholte Anwendung ergibt.

Die Multiplikation in G sei durch

$$y \cdot z = f(y; z)$$

gegeben, in Koordinaten:

$$(y \cdot z)^i = f^i(y^1, \dots, y^n; z^1, \dots, z^n).$$

Aus

$$f(y; e) = y, \quad f(e; z) = z$$

folgt

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j} \right)_{z=e} = \left(\frac{\partial f^i}{\partial z^j} \right)_{y=e} = \delta_{ij}, \quad (3)$$

wobei (δ_{ij}) die Einheitsmatrix ist. Differentiation von

$$h^i(x) = f^i(h_1(x); h_2(x))$$

ergibt

$$\frac{\partial h^i}{\partial x^k} = \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial h_1^j}{\partial x^k} + \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial z^j} \cdot \frac{\partial h_2^j}{\partial x^k},$$

also nach (1) und (3)

$$\left(\frac{\partial h^i}{\partial x^k} \right)_{x=e} = \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial x^k} \right)_{x=e} + \left(\frac{\partial h_2^i}{\partial x^k} \right)_{x=e}.$$

Das ist die Behauptung (2) für $r = 2$.

13. Wir wollen die Funktionalmatrix der Potenzabbildung¹¹⁾

$$p_k(x) = x^k$$

von G in sich an einer Stelle $x = a$ untersuchen; die Matrix selbst hängt zwar von den Koordinatensystemen in den Umgebungen der Punkte a und $p_k(a) = a^k$ ab, aber wesentlich sind nur solche Eigenschaften, die von der Koordinatenwahl unabhängig sind; wir werden die Koordinatensysteme möglichst bequem wählen. Da wir uns besonders für das Vorzeichen der

¹¹⁾ Obere Indizes sind im folgenden immer Exponenten (nicht Koordinaten-Nummern).

Funktionaldeterminante interessieren, haben wir dabei auf Orientierungsfragen zu achten.

Die Mannigfaltigkeit G ist analytisch und orientierbar; es sind also lokale analytische Koordinatensysteme ausgezeichnet, die dort, wo sie übereinandergreifen, durch reguläre Transformationen mit positiver Funktionaldeterminante auseinander hervorgehen, und es sind beliebige reguläre Koordinatentransformationen mit positiven Determinanten zugelassen. Durch solche Koordinatentransformationen werden wir jetzt in den Umgebungen der Punkte a und a^k spezielle Koordinatensysteme einführen, und in bezug auf diese Systeme werden wir die Funktionalmatrix P_k der Abbildung p_k berechnen. Das Verschwinden oder Nicht-Verschwinden (Nr. 14) sowie das Vorzeichen (Nr. 15) der Funktionaldeterminante von p_k wird durch die spezielle Wahl der Koordinatensysteme nicht beeinflusst.

In der Umgebung des Punktes e nehmen wir ein festes Koordinatensystem; die Abbildung $x \rightarrow xa$ einer Umgebung von e auf eine Umgebung von a hat, da sie sich durch eine Deformation von G erzeugen läßt, positive Funktionaldeterminante; infolgedessen kann man durch eine zugelassene Koordinatentransformation in der Umgebung von a erreichen, daß die Funktionalmatrix dieser Abbildung die Einheitsmatrix E wird. Ebenso kann man durch eine zugelassene Koordinatentransformation in der Umgebung des Punktes a^k erreichen, daß die Funktionalmatrix der Abbildung $x \rightarrow a^{k-1}xa$ einer Umgebung von e auf eine Umgebung von a^k die Einheitsmatrix E wird. Damit sind in den Umgebungen von e , a , a^k Koordinatensysteme eingeführt, an denen wir festhalten wollen.

Es sei $k > 0$. Setzen wir

$$a^{-e} x a^e = h_e(x)$$

und

$$h(x) = h_{k-1}(x) \cdot h_{k-2}(x) \cdot \dots \cdot h_1(x) \cdot h_0(x),$$

so verifiziert man leicht die Identität

$$x^k = a^{k-1} \cdot h(xa^{-1}) \cdot a.$$

Man kann also die Abbildung $p_k(x)$, welche x in x^k überführt, in drei Schritten ausführen:

$$x \rightarrow xa^{-1} = x_1 \rightarrow h(x_1) = x_2 \rightarrow a^{k-1}x_2a = x^k.$$

Die Funktionalmatrizen des ersten und des dritten Schrittes sind, dank der von uns gewählten Koordinatensysteme, die Einheitsmatrizen; die

Funktionalmatrix P_k von p_k an der Stelle $x = a$ ist daher gleich der Funktionalmatrix von h an der Stelle $x_1 = e$; diese Matrix ist nach Nr. 12

$$H = H_{k-1} + H_{k-2} + \cdots + H_1 + H_0,$$

wenn H_e die Funktionalmatrix von h^e an der Stelle e bezeichnet.

Nun ist h_e die e -te Iteration der Abbildung h_1 , und es ist $h_1(e) = e$; folglich ist H_e die e -te Potenz der Matrix H_1 . Schreiben wir A statt H_1 , so haben wir damit das folgende Resultat:

Bei geeigneter Wahl von zugelassenen Koordinatensystemen in den Umgebungen der Punkte a und a^k ist die Funktionalmatrix der Abbildung $p_k(x) = x^k$, $k > 0$, an der Stelle $x = a$

$$P_k = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}; \quad (4)$$

dabei bezeichnet A die Funktionalmatrix der Abbildung $x \rightarrow a^{-1}xa$ an der Stelle $x = e$, also die Matrix derjenigen adjungierten linearen Transformation, welche zum Element a gehört.

14. Wir fassen die Matrix A und ihre Potenzen als lineare Transformationen des Vektorbündels im Punkte e auf. Ein „Fixvektor“ von A ist ein Vektor \mathfrak{x} mit $A\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$, also ein Eigenvektor mit dem Eigenwert $+1$. Wir behaupten:

Dann und nur dann ist die Determinante $|P_k| = 0$, wenn es einen Vektor gibt, der Fixvektor von A^k , aber nicht Fixvektor von A ist.

Beweis. Aus (4) folgt

$$P_k \cdot (E - A) = E - A^k, \quad (5a)$$

$$(E - A) \cdot P_k = E - A^k. \quad (5b)$$

Es gebe nun erstens einen Vektor \mathfrak{x} der in der Behauptung genannten Art; dann ist (wenn \mathfrak{o} den Nullvektor bezeichnet)

$$(E - A^k)\mathfrak{x} = \mathfrak{o}, \quad (E - A)\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' \neq \mathfrak{o},$$

und nach (5a) $P_k \mathfrak{x}' = \mathfrak{o}$, also $|P_k| = 0$.

Es sei zweitens $|P_k| = 0$; dann gibt es einen Vektor $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ mit $P_k \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$; nach (5b) ist \mathfrak{x} Fixvektor von A^k ; wäre er auch Fixvektor von A , so wäre $A^e \mathfrak{x} = \mathfrak{x}$ für jedes e , also nach (4) $P_k \mathfrak{x} = k\mathfrak{x}$; dies ist nicht verträglich mit $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, $P_k \mathfrak{x} = \mathfrak{o}$; folglich ist \mathfrak{x} nicht Fixvektor von A .

15. Von jetzt an sei die Gruppe G geschlossen. Wir behaupten:
Für jedes $k > 0$ und an jeder Stelle a von G ist die Determinante

$$|P_k| \geq 0. \quad (6)$$

Beweis. Für ein beliebiges Element b von G sei B die zugehörige adjungierte Matrix, d. h. die Funktionalmatrix der Transformation $x \rightarrow b^{-1}xb$ an der Stelle $x = e$, und $C_b(\zeta)$ das charakteristische Polynom von B , also

$$C_b(\zeta) = |\zeta E - B|.$$

Bekanntlich gilt für geschlossene Gruppen der Satz, daß die Wurzeln dieser Polynome den Betrag 1 haben. Ich erinnere an den Beweis¹²⁾: die Koeffizienten der Polynome C_b sind stetige Funktionen von b , also, da b auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit G variiert, beschränkt; folglich sind auch die Wurzeln beschränkt; da aber, wenn ζ Wurzel von C_b ist, die Potenz ζ^m Wurzel von C_{b^m} ist, sind auch alle Potenzen der Wurzeln mit positiven und mit negativen Exponenten beschränkt; das ist nur möglich, wenn die Wurzeln den Betrag 1 haben.

Insbesondere hat C_b keine reelle Wurzel $\zeta > 1$, und da $C_b(\zeta)$ für große positive ζ positiv ist, ist daher

$$C_b(\zeta) > 0 \quad \text{für} \quad \zeta > 1. \quad (7)$$

Wir betrachten nun die von dem Parameter ζ abhängige Matrizenschar

$$P_k(\zeta) = \zeta^{k-1}E + \zeta^{k-2}A + \dots + \zeta A^{k-2} + A^{k-1},$$

so daß also nach Nr. 13

$$P_k(1) = P_k$$

ist. Dann ist

$$(\zeta E - A) \cdot P_k(\zeta) = \zeta^k E - A^k,$$

also, wenn man zu den Determinanten übergeht und beachtet, daß A^k die zu dem Element a^k gehörige adjungierte Matrix ist,

$$C_a(\zeta) \cdot |P_k(\zeta)| = C_{a^k}(\zeta^k).$$

Hieraus und aus (7) folgt

$$|P_k(\zeta)| > 0 \quad \text{für} \quad \zeta > 1,$$

also

$$|P_k(1)| \geq 0.$$

Das ist die Behauptung (6).

¹²⁾ (8), Nr. 39.

Es sei noch bemerkt, daß der hiermit für geschlossene Gruppen bewiesene Satz für offene Gruppen im allgemeinen nicht gilt: bei der 6-dimensionalen Gruppe der eigentlichen affinen Transformationen der (x, y) -Ebene,

$$\left. \begin{aligned} x' &= ax + by + s \\ y' &= cx + dy + t \end{aligned} \right\}, \quad ad - bc > 0,$$

hat, wenn man a, b, c, d, s, t als Koordinaten benutzt, die Funktionaldeterminante der Abbildung p_2 den Wert

$$4(ad - bc)(a + d)^2((a + 1)(d + 1) - bc),$$

und dieser kann negativ werden — z. B. für $a = -2, d = -\frac{1}{2}, b = c = 0$.

16. Für jedes Element q der geschlossenen Gruppe G und für jedes $k > 0$ hat die Gleichung

$$x^k = q$$

wenigstens eine Lösung x in G .¹³⁾

Beweis. Gemäß dem „Hauptsatz“ über den Abbildungsgrad (Nr. 3) genügt es, einen Punkt q_1 zu finden, in welchem die Abbildung p_k glatt und die Bedeckungszahl nicht 0 ist. Da G analytisch und p_k eine analytische Abbildung ist, verschwindet die Funktionaldeterminante auf einer abgeschlossenen und höchstens $(n - 1)$ -dimensionalen Menge N , und das Bild $N' = p_k(N)$ ist ebenfalls abgeschlossen und höchstens $(n - 1)$ -dimensional; (n ist die Dimension von G). Im Punkte e ist, wie man z. B. aus (4) abliest, die Funktionaldeterminante nicht 0; daher gibt es eine Umgebung U von e , welche schlicht auf ein Gebiet U' abgebildet wird. In U' gibt es Punkte, die nicht zu N' gehören; jeder solche Punkt q_1 hat die gewünschten Eigenschaften: da er nicht zu N' gehört, ist p_k in ihm glatt; da die Funktionaldeterminante nach Nr. 15 nirgends negativ ist, ist seine Bedeckungszahl nicht negativ, und zwar ist sie gleich der Anzahl der Urbilder von q_1 ; diese Anzahl ist nicht 0, da q_1 zu U' gehört.

Den hiermit bewiesenen Satz kann man offenbar auch so formulieren: Für $k > 0$ ist

$$p_k(G) = G.$$

¹³⁾ Der Satz ist bekannt, denn er ist eine unmittelbare Folge des bekannten Satzes in Nr. 17 — man vgl. Fußnote 15; überdies ist er ein Korollar unseres Satzes I, den wir aber aus Gründen der Methode hier nicht benutzen wollen.

Auch dieser Satz verliert seine Gültigkeit für offene Gruppen: in der multiplikativen Gruppe der reellen Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad ad - bc = 1$$

ist

$$p_2(X) = X^2 = (a + d)X - E;$$

die Spur dieser Matrix ist $(a + d)^2 - 2$; zu einer Matrix Q , deren Spur < -2 ist, gibt es daher keine Lösung X der Gleichung $X^2 = Q$; Beispiel: $Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

17. Jedes Element q der geschlossenen Gruppe G gehört einer einparametrischen Untergruppe von G an¹⁴); dieselbe Behauptung drückt man oft so aus: die Gruppe G wird von ihren infinitesimalen Transformationen erzeugt¹⁵).

Beweis. U sei eine offene Umgebung des Punktes e , in welcher ein kanonisches Koordinatensystem existiert¹⁶); hieraus folgen zwei Tatsachen: 1. jeder Punkt von U gehört einer einparametrischen Untergruppe von G an, 2. für jeden Punkt q von U und jedes $k > 0$ gibt es in U einen Punkt x mit $x^k = q$; diese zweite Tatsache kann man auch so formulieren:

$$U \subset p_k(U). \quad (8)$$

Es sei x irgend ein Punkt von G . Infolge der Geschlossenheit von G enthält die Folge seiner positiven Potenzen x^m eine konvergente Teilfolge, es gibt also eine solche Zahlenfolge $m_1 < m_2 < \dots$, daß $\lim x^{m_i}$ existiert; dann ist $\lim x^{m_i - m_{i-1}} = e$; somit liegt jedenfalls eine Potenz x^k in U , und da U offen ist, gibt es eine Umgebung $V(x)$ von x mit $p_k(V(x)) \subset U$.

Jedem Punkt x ist eine solche Umgebung $V(x)$ zugeordnet; da G geschlossen ist, kann man aus dem unendlichen System dieser $V(x)$ endlich viele, etwa V_1, V_2, \dots, V_m , so auswählen, daß $\sum V_i = G$ ist; es gibt Zahlen k_i mit

$$p_{k_i}(V_i) \subset U, \quad i = 1, \dots, m. \quad (9)$$

¹⁴) Unter einer einparametrischen Gruppe soll immer eine zusammenhängende eindimensionale Gruppe verstanden werden, wie in (5), p. 86 und p. 184 ff.

¹⁵) Dieser Satz ist bekannt: er ergibt sich erstens leicht aus (3), Nr. 47, und er folgt zweitens auch aus der Deutung der einparametrischen Untergruppen als geodätische Linien — man vergleiche (1), chap. II — und der Tatsache, daß in einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit zwischen je zwei Punkten eine kürzeste Verbindung existiert.

¹⁶) (5), § 39.

Setzen wir $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_m = k^*$ und erklären wir k'_i durch $k_i \cdot k'_i = k^*$, so ergibt sich aus (9) durch Ausübung von $p_{k'_i}$

$$p_{k^*}(V_i) \subset p_{k'_i}(U); \quad (10)$$

nach (8) ist $U \subset p_{k_i}(U)$, und hieraus folgt durch Ausübung von $p_{k'_i}$

$$p_{k'_i}(U) \subset p_{k^*}(U);$$

hieraus und aus (10) ergibt sich

$$p_{k^*}(V_i) \subset p_{k^*}(U) .$$

Dies gilt für $i = 1, \dots, m$, und es ist $\sum V_i = G$; folglich ist auch $p_{k^*}(G) \subset p_{k^*}(U)$. Nach Nr. 16 ist aber $p_{k^*}(G) = G$; es ist also $G \subset p_{k^*}(U)$, und somit

$$p_{k^*}(U) = G .$$

Dies bedeutet: zu jedem Punkt q von G gibt es einen solchen Punkt x in U , daß $x^{k^*} = q$ ist; da x einer einparametrischen Gruppe G_1 angehört, gehört seine Potenz q derselben Gruppe G_1 an.

Es ist bekannt, daß auch der hiermit bewiesene Satz nicht für alle offenen Gruppen gilt; diese Tatsache ist, da ein Element q , für welches die Gleichung $x^2 = q$ keine Lösung besitzt, keiner einparametrischen Gruppe angehören kann, in der Bemerkung am Schluß von Nr. 16 enthalten.¹⁷⁾

18. Nach dem Satz aus Nr. 17 liegt jeder Punkt von G auf einer einparametrischen, also Abelschen, zusammenhängenden Untergruppe G_1 von G ; die abgeschlossene Hülle von G_1 ist eine abgeschlossene Untergruppe von G , also eine Liesche Gruppe¹⁸⁾; sie ist kompakt, Abelsch und zusammenhängend; folglich ist sie nach bekannten Sätzen das direkte Produkt von endlich vielen geschlossenen einparametrischen Gruppen, also von Kreisdrehungsgruppen¹⁹⁾. Eine solche Gruppe wollen wir ein „Toroid“ nennen. Wir haben also gezeigt:

Jeder Punkt von G liegt auf einem Toroid, welches Untergruppe von G ist.

19. Es sei hier an einige Eigenschaften der Toroide erinnert. Ein λ -dimensionales Toroid T_λ wird durch Koordinaten x_1, \dots, x_λ beschrieben, wobei die x_i die Restklassen der reellen Zahlen modulo 1 durchlaufen; die Zuordnung zwischen den Punkten von T_λ und den Systemen

¹⁷⁾ Man vergleiche (3), Nr. 24.

¹⁸⁾ (3), Nr. 26; (5), Th. 50.

¹⁹⁾ (3), Nr. 43; sowie, ohne Benutzung von Differenzierbarkeitseigenschaften: (5), Th. 42.

(x_1, \dots, x_λ) ist eineindeutig. Das Produkt zweier Elemente $x = (x_1, \dots, x_\lambda)$ und $y = (y_1, \dots, y_\lambda)$ ist durch

$$x \cdot y = (x_1 + y_1, \dots, x_\lambda + y_\lambda)$$

gegeben.

Wir werden die folgenden beiden Tatsachen benutzen.

(a) Auf jedem Toroid T gibt es Punkte c , deren Potenzen c^m überall dicht auf T liegen.

Das ist in dem klassischen Approximationssatz von Kronecker enthalten, der überdies besagt, daß diejenigen $c = (c_1, \dots, c_\lambda)$ die genannte Eigenschaft haben, für welche die einzige Relation

$$m_1 c_1 + \dots + m_\lambda c_\lambda = m$$

mit ganzen m_1, \dots, m_λ, m die triviale mit $m_1 = \dots = m_\lambda = 0$ ist.²⁰⁾

Da für ein c , dessen Potenzen auf T überall dicht sind, T die kleinste abgeschlossene Gruppe ist, welche c enthält, soll ein solches c ein erzeugendes Element von T heißen.

(b) Für jedes Element q des λ -dimensionalen Toroids T_λ und jede ganze Zahl $k > 0$ hat die Gleichung $x^k = q$ genau k^λ Lösungen x auf T_λ .

Diese Lösungen sind nämlich, wie man leicht bestätigt, wenn $q = (q_1, \dots, q_\lambda)$ ist, die Elemente $x = (x_1, \dots, x_\lambda)$ mit

$$x_i = \frac{q_i + m_i}{k},$$

wobei m_1, \dots, m_λ ganze Zahlen sind, welche unabhängig voneinander die Werte $0, 1, \dots, k - 1$ durchlaufen.

20. In G gibt es nach Nr. 18 ein Toroid; es gibt daher auch ein maximales Toroid, d. h. ein solches, das nicht in einem höher-dimensionalen Toroid enthalten ist; es gebe in G ein maximales Toroid T_λ von der Dimension λ . Dann gilt der Satz:

Für jedes $k > 0$ hat die Abbildung p_k von G den Grad k^λ .

Beweis. Es sei c ein erzeugendes Element von T_λ , gemäß Nr. 19 (a), und es sei x ein Element von G , das die Gleichung $x^k = c$ erfüllt. Nach

²⁰⁾ Eine Zusammenstellung verschiedener Beweise findet man bei *J. F. Koksma*, Diophantische Approximationen [Berlin 1936], p. 83; einige von ihnen bewegen sich im Rahmen der Theorie der stetigen Moduln, also der kontinuierlichen Abelschen Gruppen; hierher gehört auch ein neuer Beweis von Pontrjagin: (5), p. 150, Ex. 51.

Nr. 18 liegt x auf einem Toroid T' ; dann liegt auch jede Potenz von x , also auch jede Potenz von c , also, da c das Toroid T_λ erzeugt, auch T_λ auf T' ; da T_λ maximal ist, ist $T' = T_\lambda$. Folglich liegt x auf T_λ , und wir sehen: alle Lösungen x der Gleichung $x^k = c$ liegen auf T_λ .

Wir behaupten, daß in jedem dieser Punkte x die Funktionaldeterminante der Abbildung p_k von 0 verschieden ist; nach Nr. 14 ist dies bewiesen, sobald gezeigt ist: ist \mathfrak{x} Fixvektor der zu c gehörigen adjungierten Transformation C , so ist \mathfrak{x} auch Fixvektor der zu x gehörigen adjungierten Transformation X . Nun ist aber ein Fixvektor \mathfrak{x} von C auch Fixvektor der adjungierten Transformationen C^m , die zu den Potenzen c^m gehören, und aus Stetigkeitsgründen auch Fixvektor jeder Transformation C' , die zu einem Häufungspunkt c' der c^m gehört; alle Punkte von T_λ , also auch unsere x , sind solche c' . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Da die Funktionaldeterminante von p_k in keinem Urbildpunkt von c verschwindet, ist p_k im Punkte c glatt (Nr. 3), und die Bedeckungszahl in c ist definiert; da die Funktionaldeterminante nirgends negativ ist (Nr. 15), ist die Bedeckungszahl gleich der Anzahl der Urbildpunkte; wir sahen schon, daß es keine anderen Urbilder von c gibt als diejenigen auf T_λ ; deren Anzahl ist nach Nr. 19 (b) gleich k^λ . Diese Zahl ist also die Bedeckungszahl des Punktes c , und somit der Grad der Abbildung p_k .

21. Da der Grad von p_k nicht von dem speziell gewählten maximalen Toroid abhängt, ist ein Korollar des soeben bewiesenen Satzes:

Alle maximalen Toroide haben die gleiche Dimension λ .²¹⁾

Da ferner in jeder abgeschlossenen ϱ -dimensionalen Abelschen Untergruppe von G die Komponente, welche das Eins-Element enthält, ein ϱ -dimensionales Toroid ist, sieht man: *Die Zahl λ ist die höchste Dimension, welche eine Abelsche Untergruppe von G haben kann.*

Durch den Satz aus Nr. 20 zusammen mit den soeben gemachten Bemerkungen ist der Satz II (Nr. 2) für alle positiven Zahlen k bewiesen.

22. Damit ist unser Ziel, das in Nr. 1 gesteckt worden ist, nämlich der Beweis der Gleichheit $\lambda = l$, erreicht; hierfür hätte ja der Beweis der Sätze I und II für ein einziges $k > 1$ genügt. Da wir den Satz I für alle k , auch für die negativen, bewiesen haben, ist damit auch die Gültigkeit des Satzes II für die negativen k gesichert. Man wird aber wünschen, den Satz II auch für diese k ohne den algebraisch-topologischen Apparat

²¹⁾ Dieser Satz folgt leicht aus (6), Teil II, p. 354—366, oder auch aus (1), chap. I.

des § 1 zu beweisen; ein solcher Beweis wird sich später ergeben; im Augenblick bemerke ich als Vorbereitung dazu nur folgendes:

Da schon bewiesen ist, daß p_k für $k > 0$ den Grad k^λ hat, genügt es für den Beweis der Behauptung, daß p_{-k} den Grad $(-k)^\lambda$ habe, zu zeigen: die Abbildung p_{-1} , also die Inversion, welche x mit x^{-1} vertauscht, hat den Grad $(-1)^\lambda$. Sind x_1, \dots, x_n kanonische Koordinaten in der Umgebung des Punktes e , so befördert p_{-1} den Punkt mit den Koordinaten x_i in den Punkt mit den Koordinaten $-x_i$; daraus ist ersichtlich: der Grad von p_{-1} ist $(-1)^n$. Unsere Behauptung, dieser Grad sei $(-1)^\lambda$, ist daher gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\lambda \equiv n \pmod{2}. \quad (11)$$

Diese Tatsache aber wird sich in Nr. 27 aus einem allgemeinen Satze ablesen lassen.²²⁾

§ 3.

Es sollen hier noch einige Zusätze zu dem Inhalt des § 2 gemacht werden, um einerseits den Zusammenhang mit bekannten Begriffen aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen herzustellen²³⁾, und um andererseits die Frage nach der Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^k = g$ noch etwas weiter zu verfolgen. Wie bisher ist G eine geschlossene n -dimensionale Gruppe und λ ihr Rang, d. h. die Dimension ihrer maximalen Toroide.

23. Hilfssatz: Es sei T ein Toroid (beliebiger Dimension) in G und a ein Element von G , das mit allen Elementen von T vertauschbar ist; dann gibt es ein Toroid, welches sowohl T als auch a enthält.

Beweis: A sei die von T und a erzeugte abgeschlossene Gruppe und A^1 diejenige Komponente von A , die das Eins-Element e enthält. Dann ist eine Potenz a^m von a in A^1 enthalten; denn für jede hinreichend kleine Umgebung U von e bildet der Durchschnitt von A und U einen Teil einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit¹⁸⁾, also einen Teil von A^1 , und in jedem U gibt es Potenzen von a (man vgl. Nr. 17). Aus der Voraussetzung über T und a folgt, daß A Abelsch, also A^1 ein Toroid ist. Es sei c ein erzeugendes Element von A^1 (Nr. 19); da $c \cdot a^{-m} \in A^1$ ist, kann man ein Element b von A^1 so bestimmen, daß $b^m = c \cdot a^{-m}$ ist; es gibt (Nr. 18) ein Toroid T' , welches das Element $a \cdot b$ enthält. Jedes Element von T' ist mit $a \cdot b$, also auch mit $(a \cdot b)^m = c$, also auch mit jedem Element von

²²⁾ Da wir schon wissen, daß $\lambda = l$ ist, kann (11) auch als Korollar des in Nr. 1 angeführten Satzes gelten, welcher besagt, daß die n -dimensionale Gruppe G den gleichen Homologie-Ring hat wie ein topologisches Produkt aus l Sphären ungerader Dimensionen.

²³⁾ Man vergleiche z. B. (1), Nr. 1—6, und (6), Teil III, p. 379.

A^1 vertauschbar; folglich ist die von A^1 und T' erzeugte abgeschlossene Gruppe T'' Abelsch; da sie zusammenhängend ist, ist sie ein Toroid; sie enthält A^1 , also auch T ; sie enthält T' , also $a \cdot b$, also, da $b \in A^1$ ist, auch a ; sie hat also alle gewünschten Eigenschaften.

Aus dem Hilfssatz folgt unmittelbar: *Ein Element a , das mit allen Elementen eines λ -dimensionalen Toroides T_λ vertauschbar ist, liegt selbst auf diesem T_λ ; sowie, da die Eins-Komponente (d. h. die Komponente, die e enthält) jeder Abelschen Gruppe ein Toroid ist:*

Jede λ -dimensionale Abelsche Untergruppe von G ist zusammenhängend, also ein Toroid.

24. Unter dem Normalisator N_a eines Elementes a verstehen wir wie üblich die Gruppe der mit a vertauschbaren Elemente; die Eins-Komponente von N_a bezeichnen wir mit N_a^1 ; sie ist eine abgeschlossene zusammenhängende Liesche Gruppe, und sie hat selbst den Rang λ , da ein maximales Toroid, welches a enthält, zu ihr gehört. Wir behaupten: *Die Gruppe N_a^1 ist die Vereinigung derjenigen λ -dimensionalen Toroide, welche a enthalten.*

Beweis: Daß alle die genannten Toroide zu N_a^1 gehören, ist klar; zu zeigen ist: jedes Element b von N_a^1 liegt auf einem λ -dimensionalen Toroid, welches a enthält. Es sei also b ein Element von N_a^1 ; nach Nr. 18, angewandt auf die Gruppe N_a^1 , gibt es in N_a^1 ein Toroid, welches b enthält, und ein höchstdimensionales unter diesen Toroiden hat nach Nr. 21 die Dimension λ , da λ der Rang von N_a^1 ist; T_λ sei ein solches Toroid. Da es zu N_a gehört, ist a mit jedem Element von T_λ vertauschbar; nach Nr. 23 liegt daher a auf T_λ .

25. Im folgenden werden λ -dimensionale Toroide immer mit T_λ bezeichnet. Nach Nr. 18 und Nr. 21 liegt jedes Element a von G auf wenigstens einem T_λ .

Definition: Das Element a heißt „regulär“, wenn es auf nur einem T_λ liegt, und „singulär“, wenn es auf mindestens zwei T_λ liegt.

Ist a regulär und $a \in T_\lambda$, so folgt aus Nr. 24, daß $N_a^1 = T_\lambda$ ist; ist a singulär und $a \in T_\lambda$, so ist T_λ echte Untergruppe von N_a^1 , also hat N_a höhere Dimension als T_λ ; mithin läßt sich die Regularität oder Singulärheit auch so charakterisieren: *das Element a ist regulär oder singulär, je nachdem sein Normalisator die Dimension λ oder höhere Dimension hat.*

Hieraus und aus Nr. 24 folgt weiter, daß jedes singuläre Element unendlich vielen T_λ angehört.

Ein erzeugendes Element eines T_λ (Nr. 19) ist, wie man leicht sieht, immer regulär.

26. Die Normalisatoren hängen eng mit den Fixvektoren zusammen, die wir in Nr. 14 betrachtet haben. Jeder von \mathfrak{o} verschiedene Vektor \mathfrak{x} im Punkte e ist tangential an eine wohlbestimmte einparametrische Untergruppe; (diese wird durch die infinitesimale Transformation, die \mathfrak{x} darstellt, erzeugt)¹⁶⁾. Diese Untergruppe ist offenbar dann und nur dann in dem Normalisator N_a des Elementes a enthalten, wenn \mathfrak{x} Fixvektor der zu a gehörigen adjungierten Transformation A ist, also derjenigen linearen Transformation des Vektorbündels in e , welche durch die Abbildung $x \rightarrow a^{-1}xa$ bewirkt wird. Die Fixvektoren von A erfüllen ein lineares Vektorgebilde, das „Fixgebilde“ von A ; nach dem eben Gesagten ist klar: *Das Fixgebilde von A ist identisch mit dem Gebilde der Tangentialvektoren des Normalisators N_a im Punkte e .*

Insbesondere ist die Dimension von N_a gleich der Dimension dieses Fixgebildes, also gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Fixvektoren von A . Für die Untersuchung dieser Dimensionszahl ist nun wichtig der Satz von Weyl, welcher besagt, daß jede geschlossene Gruppe reeller linearer Transformationen einer orthogonalen Gruppe ähnlich ist.²⁴⁾ Nach diesem Satz kann man im Punkte e ein solches Koordinatensystem einführen, daß alle Matrizen A orthogonal werden. Für eine orthogonale Matrix aber ist die Maximalzahl linear unabhängiger Fixvektoren, also Eigenvektoren mit Eigenwerten $+1$, gleich der Vielfachheit der Zahl $+1$ als Wurzel des charakteristischen Polynoms von A ; diese Vielfachheit gibt also die Dimension des Normalisators N_a an. Damit haben wir auf Grund der Ergebnisse von Nr. 25 den folgenden Sachverhalt:

Ist das Element a regulär, so besitzt die zugehörige adjungierte Matrix A die Zahl $+1$ als λ -fache charakteristische Wurzel; ist a singulär, so ist $+1$ charakteristische Wurzel von A mit einer größeren Vielfachheit als λ .

Das charakteristische Polynom $C_a(\zeta) = |\zeta E - A|$ ist somit für jedes Element a durch $(\zeta - 1)^\lambda$ teilbar, aber nur für die singulären Elemente a durch eine höhere Potenz von $(\zeta - 1)$; dabei beachte man, daß nicht alle Elemente singulär sind, denn z. B. die erzeugenden Elemente eines T_λ sind regulär (Nr. 19); es gilt also folgender Satz, durch welchen der Rang charakterisiert wird:

Die charakteristischen Polynome der den Elementen a von G adjungierten linearen Transformationen A sind von der Form

$$C_a(\zeta) = (\zeta - 1)^\lambda \cdot F_a(\zeta),$$

wobei F_a ein Polynom ist, für welches $F_a(1) \neq 0$ ist; dann und nur dann ist $F_a(1) = 0$, wenn das Element a singulär ist.

²⁴⁾ (6), Teil I, p. 288—289; (3), Nr. 38.

Da die Koeffizienten des Polynoms F_a analytisch von a abhängen, geht hieraus zugleich hervor, daß die singulären Elemente eine abgeschlossene und nirgends dichte Punktmenge in G bilden.²⁵⁾

27. Die orthogonalen Transformationen A lassen sich stetig in die Identität überführen und haben daher die Determinante $+1$; die Vielfachheit der Zahl $+1$ als charakteristische Wurzel einer orthogonalen Matrix mit der Determinante $+1$ ist immer der Variablen-Anzahl n kongruent modulo 2; daher folgt aus Nr. 26 zunächst die Kongruenz

$$\lambda \equiv n \pmod{2}, \quad (11)$$

wodurch die in Nr. 22 besprochene Lücke ausgefüllt ist, und weiter der folgende allgemeinere Satz:

Die Dimension eines Normalisators N_a ist mit der Dimension n sowie mit dem Rang λ von G kongruent modulo 2; für ein singuläres Element a ist die Dimension von N_a daher mindestens $\lambda + 2$.

Für jedes Element a von G bilden die konjugierten Elemente $a' = t^{-1}at$, $t \in G$, eine Mannigfaltigkeit, die bekanntlich mit dem Raum der Restklassen, in welche G nach dem Normalisator N_a zerfällt, homöomorph ist; aus dem letzten Satz folgt daher:

Für jedes Element a bildet die Klasse seiner konjugierten Elemente $t^{-1}at$ eine Mannigfaltigkeit gerader Dimension; wenn a nicht dem Zentrum von G angehört, ist diese Dimension positiv, also mindestens 2.

28. Wir kehren zu unseren Abbildungen $p_k(x) = x^k$ mit beliebigen positiven Exponenten k zurück und untersuchen die Gleichung

$$x^k = q \quad (12)$$

bei gegebenem Element q .

Jedes T_λ , welches eine Lösung x von (12) enthält, enthält auch q ; folglich liegen alle Lösungen x in N_q^1 .

Ist q regulär, so liegen alle x in dem einzigen T_λ , das q enthält; ihre Anzahl ist also k^λ (Nr. 19).

q sei singulär und T_λ^0 eines der T_λ , die q enthalten; wir unterscheiden zwei Fälle, jenachdem es außer den Lösungen, die in T_λ^0 liegen, noch andere Lösungen von (12) gibt oder nicht.

²⁵⁾ Tatsächlich ist diese Menge nur $(n - 3)$ -dimensional: (6), Teil III, p. 379 und (1), Nr. 6.

Im ersten Fall sei x eine Lösung, die nicht in T_λ^0 liegt; nach Nr. 23 ist x nicht mit allen Elementen von T_λ^0 vertauschbar, x gehört also gewiß nicht zum Zentrum von N_q^1 ; die Klasse seiner in N_q^1 konjugierten Elemente, also die Menge der Elemente

$$x' = t^{-1}xt, \quad t \in N_q^1,$$

ist daher nach Nr. 27 eine mindestens 2-dimensionale Mannigfaltigkeit; aber alle Elemente x' erfüllen die Gleichung (12). Folglich enthält die Menge der Lösungen von (12) eine mindestens 2-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Zweiter Fall: q ist singular, und alle Lösungen x von (12) liegen in demselben T_λ^0 . Dann ist ihre Anzahl k^λ . Wir behaupten, daß dies ein Ausnahmefall ist, d. h. daß er höchstens für endlich viele k eintreten kann; genauer: das Zentrum Z von N_q^1 bestehe aus m Komponenten; dann kann der Ausnahmefall höchstens dann eintreten, wenn $k \leq m$ ist.

Beweis: Da es auf *jedem* T_λ , das q enthält, k^λ Lösungen gibt, liegen alle k^λ Lösungen von (12) auf jedem T_λ , welches q enthält; sie sind daher Elemente von Z ; wir haben also nur die durch p_k bewirkte Abbildung von Z in sich zu betrachten. Die Eins-Komponente Z^1 von Z ist ein Toroid T_ρ , und jede Komponente von Z ist mit Z^1 homöomorph; aus den Eigenschaften der Toroide ist leicht ersichtlich (man vergleiche Nr. 19, b): in jeder Komponente, welche überhaupt eine Lösung x enthält, gibt es genau k^ρ Lösungen x ; da es im ganzen k^λ Lösungen gibt, ist daher $k^\lambda \leq m \cdot k^\rho$. Hierbei ist ρ die Dimension von Z ; sie ist kleiner als λ , da aus $\rho = \lambda$ und aus Nr. 23 folgen würde, daß $N_q^1 = T_\rho = T_\lambda$ ist, entgegen der Tatsache, daß N_q infolge der Singularität von q größere Dimension hat als λ . Aus $k^\lambda \leq m \cdot k^\rho$ und $\rho < \lambda$ folgt $k \leq m$.

Fassen wir zusammen:

Ist q regulär, so hat die Gleichung (12) genau k^λ Lösungen x . Es sei q singular; dann kann derselbe einfache Sachverhalt — also die Existenz von genau k^λ Lösungen — für endlich viele Ausnahmewerte von k vorliegen; für alle anderen k gibt es unendlich viele Lösungen von (12), und zwar enthält die Menge der Lösungen eine mindestens 2-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Das Eins-Element e ist in jeder Gruppe, die nicht Abelsch ist, singular; daher besitzt die Gleichung

$$x^k = e \tag{13}$$

in jeder geschlossenen, nicht-Abelschen Gruppe wenigstens ∞^2 Lösungen, vorausgesetzt, daß k nicht ein Ausnahmewert ist; die Ausnahmewerte

können im Falle der Gleichung (13) nicht größer sein als die Anzahl m der Komponenten des Zentrums Z von G .

Ein trivialer Ausnahmewert für jedes singuläre Element q ist $k=1$. Auch $k=2$ tritt als Ausnahmewert auf: in der Gruppe $G=A_1$ der Quaternionen vom Betrage 1 — also einer Gruppe mit $n=3$, $\lambda=1$ — hat die Gleichung $x^2=e$ nur zwei Lösungen.²⁶⁾

L I T E R A T U R

- (1) *E. Cartan*, La géométrie des groupes simples [Annali di Mat. 4 (1927), 209—256].
- (2) *E. Cartan*, Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces [Ann. Soc. Pol. Math. 8 (1929), 181—225; sowie: Selecta, Jubilé scientifique (Paris 1939), 203—233].
- (3) *E. Cartan*, La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs [Paris 1930, Mémorial Sc. Math. XLII].
- (4) *E. Cartan*, La topologie des groupes de Lie [Paris 1936, Actualités scient. et industr. 358; sowie: L'enseignement math. 35 (1936), 177—200; sowie: Selecta (wie oben), 235—258].
- (5) *L. Pontrjagin*, Topological groups [Princeton 1939].
- (6) *H. Weyl*, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen [Math. Zeitschrift 23, 24 (1925, 1926), 271—309 bzw. 328—395].
- (7) *A. Weil*, Démonstration topologique d'un théorème fondamental de Cartan [C. R. 200 (1935), 518—520]. — In dieser Note, auf die ich erst nachträglich aufmerksam wurde, findet man für die Sätze aus Nr. 17, Nr. 21 und die Formel (11) aus Nr. 22 Beweise, die von den früher zitierten und von unseren Beweisen verschieden sind.

(Eingegangen den 18. September 1940.)

²⁶⁾ Dieses Beispiel — $G = A_1$, $k = 2$ — ist, wenn man sich auf einfache geschlossene Gruppen beschränkt, die den vier großen Killing-Cartanschen Klassen angehören, das einzige, in welchem es zu dem Element e einen Ausnahmewert $k > 1$ gibt, in welchem also die Gleichung (13) für ein $k > 1$ nur endlich viele Lösungen hat; man bestätigt dies leicht mit Hilfe derjenigen Eigenschaften der vier großen Klassen, die in (4), § IV, p. 14, angegeben sind.

Über die Sphären, die als Gruppenräume auftreten

VON HANS SAMELSON, Zürich

1. Eine Mannigfaltigkeit, deren Punkte die Elemente einer Gruppe bilden derart, daß die Gruppen-Operationen durch stetige Funktionen in der Mannigfaltigkeit vermittelt werden, heißt eine Gruppen-Mannigfaltigkeit (im folgenden auch kurz: Gruppe). Ist die Mannigfaltigkeit geschlossen, so darf man bekanntlich annehmen, daß die Mannigfaltigkeit analytisch ist und die Gruppenoperationen durch analytische Funktionen in der Mannigfaltigkeit dargestellt werden, daß also eine geschlossene Lie'sche Gruppe vorliegt. Die Frage, welche Mannigfaltigkeiten als Gruppen-Mannigfaltigkeiten auftreten können, kann man zunächst einmal auf die einfachsten geschlossenen Mannigfaltigkeiten, die n -dimensionalen Sphären S_n , spezialisieren. Es gilt der Satz:

Die einzigen Sphären, die Gruppen-Mannigfaltigkeiten sind, sind die S_1 und die S_3 .

Das folgt aus einem allgemeinen Satz von Cartan, nach dem für jede geschlossene Gruppe, deren Dimension ≥ 3 ist, die dritte Betti'sche Zahl nicht verschwindet¹⁾. Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Cartan'schen Theorie der Integralinvarianten in Gruppen. Bei dem elementaren Charakter des Satzes über die Sphären dürfte aber ein elementarer Beweis von Interesse sein. Ein solcher wird in dieser Arbeit geliefert.

Da der Beweis im Rahmen der Homologietheorie geführt wird, wird der Begriff der Sphäre durch den allgemeineren der Homologiesphäre ersetzt; das bedeutet hier: geschlossene Mannigfaltigkeit (der Dimension n), deren Betti'sche Zahlen außer der nullten und der n -ten verschwinden. (Bekanntlich können aus Gründen der Charakteristik nur Homologiesphären ungerader Dimension als Gruppen auftreten.) Der n -dimensionale projektive Raum werde mit P_n bezeichnet; für ungerade n ist P_n eine Homologiesphäre.

In der vorliegenden Arbeit werden wir dann den folgenden Satz beweisen:

Satz A. Die Gruppen-Mannigfaltigkeit G sei eine Homologiesphäre; dann ist G entweder der S_1 oder der S_3 oder dem P_3 homöomorph.

Es sei hier daran erinnert, daß S_1 , S_3 , P_3 tatsächlich als Gruppen auftreten: S_1 als multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1, S_3 als multiplikative Gruppe der Quaternionen vom Betrag 1, P_3 als

multiplikative Gruppe der „homogenen“, d. h. bis auf einen reellen Faktor bestimmten, Quaternionen, oder (was dasselbe ist) als Gruppe der Kugeldrehungen.

Ferner sei bemerkt, daß man aus der Tatsache, daß von den Sphären nur die S_1 und die S_3 Gruppen sind, leicht einen Teil des bekannten Frobenius'schen Satzes über die Schiefkörper schließen kann, nämlich: Der Rang eines Schiefkörpers über den reellen Zahlen ist entweder 1 oder 2 oder 4.²⁾

Ein Anhang am Schluß der Arbeit enthält Varianten zu einigen Beweisen.

2. Wir stellen zunächst einige bekannte Tatsachen zusammen:

a) U sei eine Untergruppe der geschlossenen n -dimensionalen Lie'schen Gruppe G , d. h. eine Untergruppe im abstrakt-gruppentheoretischen Sinn, die eine abgeschlossene Punktmenge von G ist. Dann ist bekannt: Man kann in einer hinreichend kleinen, dem euklidischen R_n homöomorphen, Umgebung V des Einheitspunktes e von G ein Koordinatensystem so einführen, daß der Teil von U , der in V liegt, also der Durchschnitt $U \cdot V$, eine Ebene in V durch den Punkt e bildet³⁾; die Dimension dieser Ebene ist die Dimension der Untergruppe. Aus diesem lokalen Verhalten und der Kompaktheit von U schließt man leicht: Ist die Untergruppe U zusammenhängend, dann ist sie eine topologisch und sogar analytisch in G eingelagerte Mannigfaltigkeit; ist U nicht zusammenhängend, dann ist die Komponente U^1 , die den Punkt e enthält, selbst eine zusammenhängende Untergruppe von G , also eine Mannigfaltigkeit in G , und U besteht aus endlich vielen Nebengruppen von U^1 , die die Komponenten von U sind; U^1 ist bekanntlich Normalteiler von U .

b) Die Gruppe G zerfällt in die (etwa linksseitigen) Nebengruppen aU der Untergruppe U , wobei a ein beliebiges Element von G bedeutet. Diese Zerlegung ist eine Faserung von G mit der Faser U .

Dabei versteht man unter der Faserung einer Mannigfaltigkeit M mit der Faser (-Mannigfaltigkeit) F folgendes^{4) 5)}: M ist zerlegt in Mannigfaltigkeiten, die alle zu F homöomorph sind und „Fasern“ heißen; durch jeden Punkt von G geht eine und nur eine Faser; und jede Faser besitzt eine Umgebung in M , die fasertreu homöomorph mit dem topologischen Produkt $E \times F$ ist; dabei ist E ein Element (Vollkugel); für die Dimensionen $d(M)$, $d(F)$, $d(E)$ gilt: $d(E) = d(M) - d(F)$; „fasertreu homöomorph“ heißt: jede Faser ist topologisch abgebildet auf eine der Mannigfaltigkeiten $p \times F$ in $E \times F$, wo p ein Punkt von E ist.

Faßt man die Fasern als Punkte eines Raumes auf, mit dem natürlichen Umgebungsbegriff, so erhält man den Faser- oder Basisraum B , der auch

mit $\frac{M}{F}$ bezeichnet wird; er ist offenbar eine Mannigfaltigkeit. Ordnet man jedem Punkt von M die Faser zu, auf der er liegt, so erhält man eine stetige Abbildung von M auf B , die Projektion P . Für jede hinreichend kleine Umgebung V eines beliebigen Punktes von B ist dann die Menge $P^{-1}(V)$, die ganz aus Fasern besteht, fasertreu homöomorph dem topologischen Produkt $V \times F$. Es gilt der Satz von Feldbau⁶⁾:

Ist E ein Element im Faserraum B , dann ist die Menge $P^{-1}(E)$ fasertreu homöomorph dem Produkt $E \times F$.

Daß die Zerlegung einer Gruppe G in die Nebengruppen einer Untergruppe U eine Faserung von G mit der Faser U ist, ist ganz leicht zu sehen. Der Faserraum wird dann auch Nebengruppenraum genannt.

Die Definition und die genannten Eigenschaften der Faserungen bleiben gültig, wenn die einzelne Faser statt aus einer (zusammenhängenden) Mannigfaltigkeit aus endlich vielen Mannigfaltigkeiten besteht. Dies ist der Fall bei der Nebengruppen-Zerlegung von G nach einer Untergruppe U , die nicht zusammenhängend ist.

c) Es ist bekannt, daß die einzige zusammenhängende geschlossene Abel'sche Gruppe der Dimension m die toroidale Gruppe, oder kurz: das Toroid, T_m ist. Dabei ist T_m folgendermaßen definiert:

K sei die Kreislinie S_1 , in natürlicher Weise als Gruppe aufgefaßt, also etwa als die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1; dann ist

$$T_m = K \times K \times \cdots \times K$$

das direkte Produkt von m Exemplaren der Gruppe K ; die Mannigfaltigkeit T_m ist also das topologische Produkt von m Kreislinien.

Das folgt aus den Untersuchungen von Pontrjagin oder aus einfachen Sätzen der Lie'schen Theorie.

d) Bei den eindimensionalen oder einparametrischen Untergruppen verzichtet man ausnahmsweise auf die Forderung der Abgeschlossenheit. Demgemäß gibt es zwei Arten von einparametrischen Untergruppen: Erstens die geschlossenen; diese sind der Gruppe K isomorph; zweitens die offenen; diese sind der additiven Gruppe der reellen Zahlen isomorph, also einer Geraden homöomorph. Beide Arten sind Abelsch. Die abgeschlossene Hülle einer offenen einparametrischen Untergruppe ist eine zusammenhängende geschlossene Abelsche Untergruppe, also ein Toroid T_m ; und zwar ist $m > 1$. Daraus entnimmt man sofort: Da es in G einparametrische Untergruppen gibt (s. u.), so gibt es mindestens eine geschlossene.

Man führe in der Umgebung des Einheitspunktes e von G ein differen-

zierbares Koordinatensystem ein; die einparametrischen Untergruppen sind dann dort differenzierbare Kurven durch e . Es gilt der Existenz- und Eindeutigkeitsatz: Zu jeder Geraden durch e gibt es genau eine einparametrische Untergruppe, die die Gerade im Punkte e berührt. Mit dem dadurch nahegelegten Umgebungsbegriff bilden also die einparametrischen Untergruppen einen $(n - 1)$ -dimensionalen projektiven Raum P_{n-1} , wenn n die Dimension von G ist.

Zu jeder Halbgeraden oder jedem Vektor im Punkt e gehört eine orientierte einparametrische Untergruppe, d. h. eine einparametrische Untergruppe, deren Mannigfaltigkeit — Kreis oder Gerade — auf eine der beiden möglichen Weisen orientiert ist. Die Mannigfaltigkeit der orientierten einparametrischen Untergruppen ist also eine $(n - 1)$ -dimensionale Sphäre S_{n-1} ; sie ist in evidentester Weise als zweiblättrige Überlagerung der Mannigfaltigkeit P_{n-1} der einparametrischen Untergruppen aufzufassen.

3. Unter dem Rang $\lambda(G)$ einer (geschlossenen Lie'schen) Gruppe G versteht man die größte der Dimensionen der Abel'schen Untergruppen von G (es läßt sich übrigens zeigen, daß $\lambda(G)$ auch gleich der Dimension eines jeden maximalen Toroids in G ist, also eines solchen, das in keinem größeren Toroid enthalten ist). 7)

Mit Hilfe dieser Definition zerlegen wir den zu beweisenden Satz A in zwei Teile:

Satz B. Ist die Gruppe G eine Homologiesphäre, dann ist $\lambda(G) = 1$.

Satz C. Die einzigen geschlossenen Mannigfaltigkeiten, die als Gruppenmannigfaltigkeiten vom Range 1 auftreten, sind S_1, S_3, P_3 .

Offenbar folgt Satz A aus Satz B und Satz C.

4. Den Satz B beweisen wir hier nicht; er ist aber richtig, als ein Spezialfall des folgenden allgemeineren Satzes über Gruppen-Mannigfaltigkeiten:

Satz B'. Hat die Gruppe G dieselben Betti'schen Zahlen wie das topologische Produkt von l Sphären ungerader Dimensionen, so ist $\lambda(G) = l$.

Denn für eine Homologiesphäre ist die Voraussetzung von B' mit $l = 1$ erfüllt.

Für den Beweis des Satzes B' verweisen wir auf den Anhang dieser Arbeit, Abschnitt a. Außerdem wird im Anhang, Abschnitt b, ein gänzlich anderer Beweis des Satzes B skizziert, der auf der Theorie der Faserungen beruht.

Der Satz B ist auch ein Korollar des Cartan'schen Satzes:

Die Summe der Betti'schen Zahlen einer geschlossenen Gruppe vom Rang λ ist gleich 2^λ . 8)

Da aber der Cartan'sche Beweis dieses Satzes dieselben Hilfsmittel aus der Theorie der Integralinvarianten benutzt wie der Beweis des in Nr. 1 genannten Satzes über die dritte Betti'sche Zahl, wollen wir uns aus Gründen der Methode nicht auf ihn berufen.

5. Wir kommen jetzt zum Hauptteil der Arbeit, nämlich zum Beweis des Satzes C: Aus $\lambda(G) = 1$ folgt $G = S_1$ oder $= S_3$ oder $= P_3$.

Es sei also G eine Gruppe mit $\lambda(G) = 1$; die Dimension von G sei n . Wir dürfen annehmen, daß n von 2 verschieden ist; denn bekanntlich ist die einzige geschlossene zweidimensionale Gruppe das Toroid T_2 , also vom Rang 2; diese Tatsache läßt sich auch leicht aus B' folgern.

Wir betrachten eine geschlossene einparametrische Untergruppe von G (solche gibt es immer, vgl. Nr. 2, d); sie heiße L .

Mit N bezeichnen wir den Normalisator von L , d. h. die Gruppe derjenigen Elemente a von G , für die

$$aLa^{-1} = L$$

gilt, die also die Untergruppe L in sich transformieren. N enthält L . Wir behaupten:

Der Normalisator N von L ist eindimensional und besteht aus einer (endlichen) Anzahl Nebengruppen von L :

$$N = L + a_1L + a_2L + \cdots + a_{r-1}L.$$

Weil N natürlich abgeschlossen ist, ist das gleichbedeutend mit der Behauptung: Die Komponente N^1 von N , die den Einheitspunkt e von G enthält (und die infolgedessen auch L enthält), fällt mit L zusammen.

Beweis: Jedes Element a des Normalisators N bewirkt einen Automorphismus von L durch die Zuordnung $p \rightarrow apa^{-1}$, wo p die Gruppe L durchläuft. Die Automorphismen von L , also die der Gruppe K (Nr. 2, c), kennt man aber: Neben der Identität gibt es noch genau einen, der jedem Element p sein Inverses p^{-1} zuordnet, die Inversion von L (oder K). (In der Darstellung durch die komplexen Zahlen vom Betrag 1 bedeutet die Inversion den Übergang zur konjugiert-komplexen Zahl.) Die Automorphismengruppe ist also diskret, sogar endlich. Ist nun b ein Punkt von N , der der e -Komponente N^1 angehört, dann läßt sich der von b bestimmte Automorphismus von L stetig in die Identität überführen: man lasse b in N^1 nach e wandern. Also ist dieser Automorphismus die Identität, und das heißt: b ist mit jedem Element von L vertauschbar.

Sei nun L' eine beliebige einparametrische Untergruppe von N^1 . Dann ist, wie eben gezeigt, jedes Element von L' mit jedem Element von L vertauschbar. Also ist die abgeschlossene Hülle der von L und L' er-

zeugten Gruppe eine (zusammenhängende) Abel'sche Gruppe, ein Toroid T'_m .

Nun ist $\lambda(G) = 1$, d. h. die Toroide in G sind höchstens eindimensional. Das Toroid T'_m , das ja die Gruppe L enthält, muß also mit L zusammenfallen, und das ist nur möglich, wenn auch L' mit L zusammenfällt. L ist also die einzige einparametrische Untergruppe von N^1 ; dann ist aber N^1 mit L identisch. Damit ist die Behauptung über N bewiesen.

Es wird sich später noch zeigen, daß für $n > 1$ die Anzahl r der Komponenten von N gleich zwei ist (Nr. 7).

6. Wir betrachten den Nebengruppenraum

$$W = \frac{G}{N}$$

(vgl. Nr. 2, b). Die Punkte von W sind also die Nebengruppen aN von N . Weil N eindimensional ist, ist W eine $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit; dabei ist n die Dimension $d(G)$ von G .

Bekanntlich entsprechen nun die Nebengruppen des Normalisators N_U einer Untergruppe U einer Gruppe eineindeutig den zu U konjugierten Untergruppen, nämlich dadurch, daß jede Nebengruppe aN_U von N_U genau aus denjenigen Elementen der Gruppe besteht, die U in eine bestimmte konjugierte Untergruppe, in aUa^{-1} , transformieren.

Im vorliegenden Fall haben wir $U = L$ und $N_U = N$. Die zu L konjugierten Untergruppen bilden eine Teilmenge der Menge aller geschlossenen einparametrischen Untergruppen, und diese Menge bildet den in Nr. 2, d, eingeführten $(n - 1)$ -dimensionalen projektiven Raum P_{n-1} ; denn da die abgeschlossene Hülle einer offenen einparametrischen Untergruppe ein Toroid T_m mit $m > 1$ ist (Nr. 2, d), andererseits aber $\lambda(G) = 1$ ist, so gibt es in G keine offenen einparametrischen Untergruppen. Die — eineindeutige — Zuordnung der Nebengruppen von N zu den zu L konjugierten Untergruppen ist offenbar eine stetige Abbildung des Nebengruppenraumes W in den von den einparametrischen Untergruppen gebildeten P_{n-1} , also eine topologische Abbildung. Aber aus der Tatsache, daß die $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit W topologisch in den P_{n-1} abgebildet ist, folgt nach bekannten Sätzen (Abbildungsgrad), daß W und P_{n-1} homöomorph sind. Wir haben also gezeigt:

G sei eine Gruppe der Dimension n und vom Rang 1. Dann ist der Nebengruppenraum $\frac{G}{N}$, der zu dem Normalisator N einer geschlossenen einparametrischen Untergruppe L gehört, dem projektiven Raum P_{n-1} homöomorph.

7. Wir ziehen jetzt den Nebengruppenraum

$$\overline{W} = \frac{G}{L}$$

heran, dessen Punkte die Nebengruppen aL von L sind. Wegen

$$N = L + a_1L + a_2L + \cdots + a_{r-1}L$$

(Nr. 4) besteht jede Nebengruppe aN von N aus r Nebengruppen von L , die die Komponenten von aN sind; andererseits ist jede Nebengruppe von L in einer Nebengruppe von N enthalten. Ordnet man jeder Nebengruppe von L die Nebengruppe von N zu, in der sie liegt, so erhält man eine Abbildung von \overline{W} auf W , bei der auf jeden Punkt von W genau r Punkte von \overline{W} abgebildet werden. Man sieht ganz leicht, daß diese Abbildung im kleinen topologisch ist. (Zwei Nebengruppen von L , die hinreichend nahe beieinander liegen, gehören zu verschiedenen Nebengruppen von N .) Also ist \overline{W} eine r -blättrige Überlagerungsmannigfaltigkeit von W , also auch von P_{n-1} .

Da P_{n-1} nur ein- oder zweiblättrige Überlagerungen besitzt, ist r entweder 1 oder 2. Das heißt: Entweder ist $N = L$, oder N besteht aus zwei Komponenten, also $N = L + a_1L$ mit einem gewissen Element a_1 . Für $n = 1$ ist bekanntlich $G = K$; dann liegt der erste Fall vor. Wir behaupten: Für $n > 1$ tritt der zweite Fall ein, also $N = L + a_1L$; und die Elemente von a_1L haben die Eigenschaft: der von ihnen erzeugte Automorphismus von L ist nicht die Identität, sondern die Inversion von L (vgl. Nr. 5).

Sei also $n > 1$ (wegen $n \neq 2$ ist dann sogar $n > 2$). Wir erteilen der Gruppe L eine beliebige, aber feste Orientierung (vgl. Nr. 2, d). Es sei a ein beliebiges Element von G ; wir betrachten die zu L konjugierte Gruppe aLa^{-1} . Durch die Orientierung von L ist dann auch eine Orientierung von aLa^{-1} bestimmt. Man sieht sofort: sind a, a' zwei Elemente von G , die zu derselben Komponente einer Nebengruppe bN von N gehören, dann bestimmen sie dieselbe Orientierung der zu bN gehörenden, zu L konjugierten, Untergruppe bLb^{-1} . Das bedeutet: Jede Komponente der Nebengruppe bN bestimmt eine der beiden Orientierungen der Gruppe bLb^{-1} , also eine der beiden orientierten einparametrischen Untergruppen, die die Untergruppe bLb^{-1} im Sinn von Nr. 2, d, überlagern.

Wäre jetzt $N = L$, also N einkomponentig, dann hätte man eine eindeutige und offenbar stetige Zuordnung der Nebengruppen von N zu den orientierten, zu dem orientierten L konjugierten, Untergruppen; d. h. man hätte eine topologische Abbildung der $(n - 1)$ -dimensionalen

Mannigfaltigkeit $W = \frac{G}{N}$ in die von den orientierten einparametrischen Untergruppen gebildete Sphäre S_{n-1} ; also wären W und S_{n-1} homöomorph, da S_{n-1} für $n > 1$ eine (zusammenhängende) Mannigfaltigkeit ist. Aber nach Nr. 6 ist W dem projektiven Raum P_{n-1} homöomorph; und P_{n-1} und S_{n-1} sind nicht homöomorph, da die Dimension n von G von 2 verschieden ist (Nr. 5). Also ist $r = 2$, also $N = L + a_1 L$ mit einem gewissen a_1 ; \overline{W} ist dann eine zweiblättrige Überlagerung von P_{n-1} , also der S_{n-1} homöomorph.

Genau wie eben schließt man jetzt, daß die zwei Komponenten, aus denen eine beliebige Nebengruppe aN besteht, verschiedene Orientierungen der zu aN gehörenden, zu L konjugierten, Gruppe aLa^{-1} bestimmen; sonst hätte man wieder eine eineindeutige Zuordnung der Nebengruppen von N zu den orientierten einparametrischen Untergruppen von G . Speziell muß die zweite Komponente $a_1 L$ von N selbst die Orientierung von L umkehren, und das bedeutet: der von ihren Elementen bestimmte Automorphismus von L ist die Inversion von L (vgl. Nr. 5).

Faßt man jetzt die geschlossenen orientierten einparametrischen Untergruppen als (eindimensionale) Zyklen im Sinne der Homologietheorie (mit den ganzen Zahlen als Koeffizienten) auf, dann liefert das zuletzt Bewiesene die Gleichung:

$$a_1 L a_1^{-1} = -L,$$

d. h. man erhält den Zyklus $a_1 L a_1^{-1}$ aus dem Zyklus L , indem man die Orientierung von L umkehrt. Andererseits sind $a_1 L a_1^{-1}$ und L homolog, sogar homotop in G : man bilde bLb^{-1} und lasse b in G von e nach a_1 laufen. Also gilt:

$$L \sim -L.$$

Damit können wir folgendes Ergebnis formulieren:

G sei eine Gruppe der Dimension $n (> 2)$ und vom Rang $\lambda(G) = 1$; L sei eine geschlossene einparametrische Untergruppe. Dann ist der Nebengruppenraum $\frac{G}{L}$ der $(n - 1)$ -dimensionalen Sphäre S_{n-1} homöomorph; für die als ganzzahliger Zyklus aufgefaßte Untergruppe L gilt die Homologie:

$$2L \sim 0 \text{ in } G.$$

8. Die Nebengruppenzerlegung ist ein spezieller Fall von Faserung (Nr. 2, b); und L ist dem Kreis S_1 homöomorph. Auf Grund des eben erhaltenen Satzes ist daher der Satz C bewiesen, wenn wir den folgenden Fasersatz beweisen:

M sei eine Mannigfaltigkeit der Dimension n (≥ 3); M sei gefasert mit der Faser S_1 ; der Faserraum $\frac{M}{S_1}$ sei der S_{n-1} homöomorph; und für die Faser gelte die Homologie $2S_1 \sim 0$. Dann ist M dreidimensional, und zwar ist M entweder der S_3 oder dem P_3 homöomorph.

Der Beweis dieses Satzes wird in naheliegender Weise mit Hilfe eines „Additionssatzes der kombinatorischen Topologie“ erbracht.⁹⁾

Der Faserraum, die S_{n-1} , wird durch eine Äquatorsphäre S_{n-2} in zwei Elemente E' und E'' zerlegt:

$$S_{n-1} = E' + E'', \quad S_{n-2} = E' \cdot E''.$$

Die Randsphäre von E' heiße S' , die von E'' heiße S'' ; in S' und S'' hat man also zwei Exemplare der Äquatorsphäre S_{n-2} .

P sei die Projektion von M auf S_{n-1} (vgl. Nr. 2, b). Nach dem Satz von Feldbau kann man die Urbildmenge $P^{-1}(E')$, die M' genannt werde, als das topologische Produkt $E' \times S_1$ auffassen. Entsprechend kann man die Menge $M'' = P^{-1}(E'')$ als $E'' \times S_1$ darstellen. M ist überdeckt mit M' und M'' :

$$M = M' + M''.$$

Der Durchschnitt $D = M' \cdot M''$ ist das Urbild $P^{-1}(S_{n-2})$ der Äquator- S_{n-2} . Man erkennt unmittelbar, daß D zusammenfällt mit dem Rand $S' \times S_1$ von $M' = E' \times S_1$ und ebenso mit dem Rand $S'' \times S_1$ von $M'' = E'' \times S_1$.

Wir betrachten jetzt eine feste Faser S_1 von M , und zwar eine solche, die in D liegt; sie repräsentiert dann die Homologiekategorie $p \times S_1$ von D , wo p den einfach gezählten Punkt von S' oder auch von S'' bedeutet. Daher ist $2S_1$, die doppelt gezählte Faser, nicht homolog 0 in D . Dagegen ist nach Voraussetzung $2S_1 \sim 0$ in M . Einem einfachen „Additionssatz“¹⁰⁾ entnimmt man jetzt: Weil der in D liegende Zyklus $2S_1$ in M homolog 0 ist, läßt er sich darstellen als Summe $z_1 + z_2$ zweier in D liegender Zyklen z_1, z_2 , wobei z_1 in M' und z_2 in M'' homolog 0 ist. Da, wie man leicht bestätigt, $2S_1$ weder in M' noch in M'' homolog 0 ist, kann weder z_1 noch z_2 in D homolog 0 sein. Betrachtet man D als Rand $S' \times S_1$ von $M' = E' \times S_1$, dann sieht man: die Zyklen von D , die in M' (aber nicht in D) homolog 0 sind, sind die Linearkombinationen von D selbst und der Sphäre $S' \times q$, wo q ein Punkt von S_1 ist.

Entsprechend sind die Zyklen von D , die in M'' homolog 0 sind, die Linearkombinationen von D und $S'' \times q$. Also muß sich schließlich $2S_1$ in D darstellen lassen als lineare Verbindung von D , $S' \times q$, $S'' \times q$. Die

Dimension von D ist $n - 1$, die von $S' \times q$ und $S'' \times q$ ist $n - 2$. Wegen $n > 2$ muß sich also der eindimensionale Zyklus $2S_1$ schreiben lassen als lineare Verbindung von $S' \times q$ und $S'' \times q$; daraus folgt: $n - 2 = 1$, also $n = 3$. Damit ist der erste Teil der Behauptung über M bewiesen.

Jetzt folgt weiter: M' und M'' sind dreidimensionale Volltorusse. M entsteht aus M' und M'' durch eine gewisse Identifizierung der Randflächen. Das bedeutet: M besitzt ein Heegaard-Diagramm vom Geschlecht 1. Daher ist M bekanntlich ein Linsenraum.¹¹⁾

Nun läßt sich die erste Betti'sche Gruppe von M leicht bestimmen. Weil E' und E'' zweidimensionale Elemente sind, läßt sich jeder eindimensionale Zyklus in M so deformieren, daß er in D liegt. Faßt man D als Randtorus des Volltorus M' auf und beachtet, daß der Meridiankreis $S' \times q$ von D homolog 0 in M' ist, so erhält man: jeder eindimensionale Zyklus in M ist in M homolog einem Vielfachen der Faser S_1 , des Breitenkreises $p \times S_1$ auf dem Torus D .

Ist $S_1 \sim 0$ in M , dann ist also die erste Betti'sche Gruppe von M die Nullgruppe. Der einzige solche Linsenraum ist aber die S_3 .

Ist S_1 nicht ~ 0 in M , dann ist wegen der Voraussetzung $2S_1 \sim 0$ die erste Betti'sche Gruppe von M zyklisch von der Ordnung 2. Der einzige solche Linsenraum ist der P_3 .

Damit ist der am Anfang dieser Nr. 8 genannte Fasersatz, also auch der Satz C, also auch der Satz A bewiesen.

Anhang.

a) Der Beweis des Satzes B' , von dem unser Satz B ein Spezialfall ist (Nr. 4), beruht auf der Betrachtung der Abbildungen $p_k(x) = x^k$ von G in sich, die jedem Element x seine k -te Potenz zuordnet; der Grad von p_k sei γ_k . Dann ist B' eine Konsequenz der folgenden beiden Sätze¹²⁾:

Satz I. Der Homologie-Ring der geschlossenen Gruppe G sei dem Ring des topologischen Produktes von l Sphären ungerader Dimensionen dimensions-treu isomorph; dann ist $\gamma_k = k^l$.

Satz II. Die geschlossene Gruppe G enthalte eine λ -dimensionale Abel'sche Untergruppe, und es gebe keine höher-dimensionale Abel'sche Untergruppe von G ; dann ist $\gamma_k = k^\lambda$.

Für B' genügt der Beweis von I und II für eine einzige Zahl $k > 1$, z. B. $k = 2$.

Zu dem Beweis von II im § 2 der Arbeit von Hopf⁷⁾ haben wir nichts hinzuzufügen; der Beweis von I aber läßt sich in unserem Falle, also im

Fälle $l = 1$, wesentlich einfacher führen, wenn man sich auf $k = 2$ beschränkt. Dann hat man also zu zeigen: Ist die Gruppe G eine Homologiesphäre, dann hat die Abbildung $p_2(x) = x^2$ von G in sich den Grad 2. Zum Beweis benützen wir einen bekannten Fixpunktsatz¹³⁾, nach dem für eine Abbildung f einer Homologiesphäre G in sich die Summe der Fixpunktindizes gleich $(-1)^n + c_f$ ist, wo c_f der Abbildungsgrad von f ist. Bei der Abbildung $p_2(x)$ einer Gruppe in sich ist nun der Einheitspunkt e der einzige Fixpunkt ($x^2 = x$ hat e als einzige Lösung), und der Fixpunktindex ist, wie man sieht, wenn man kanonische Parameter einführt, gleich 1. Also ist $c_{p_2} = 1 - (-1)^n$. Beachtet man noch, daß die Dimension einer Gruppen-Homologiesphäre ungerade ist, so folgt die Behauptung $c_{p_2} = 2$.

b) Ein anderer Beweis für Satz B beruht auf der Theorie der Faserungen; und zwar auf dem folgenden Satz: Die $(2r + 1)$ -dimensionale Homologiesphäre G sei gefasert mit der Faser S_1 ; dann hat der Faserraum $\frac{G}{S_1}$ dieselben Betti'schen Zahlen wie der komplexe projektive Raum K_r der (komplexen) Dimension r ; insbesondere hat die Charakteristik den Wert $r + 1$. (Dieser Satz war als Vermutung samt einer Beweisskizze von Herrn H. Hopf ausgesprochen worden; eine allgemeinere Theorie, die den Satz enthält, wird in der Dissertation von Herrn W. Gysin dargestellt werden.) Damit läßt sich nun leicht zeigen: Eine Gruppen-Homologiesphäre hat kein Toroid T_2 als Untergruppe.

Beweis: Ist ein T_2 Untergruppe einer beliebigen Gruppe G , dann ist T_2 direktes Produkt $K' \times K''$ zweier geschlossener einparametrischer Untergruppen K', K'' von G . Jede Nebengruppe aT_2 von T_2 in G ist gefasert in Nebengruppen von K'' , und der zugehörige Nebengruppenraum ist mit K' , also mit S_1 homöomorph (die Faserung von aT_2 entsteht aus der Zerlegung von T_2 in Nebengruppen von K'' durch Multiplikation mit a). Man betrachte nun den Nebengruppenraum $\frac{G}{K''}$. Faßt man alle Punkte von $\frac{G}{K''}$, die — als Nebengruppen von K'' in G betrachtet — in derselben Nebengruppe von T_2 liegen, zu einer Faser zusammen, so erhält man eine Faserung von $\frac{G}{K''}$ mit der Faser S_1 . Daraus folgt, daß $\frac{G}{K''}$ die Charakteristik 0 hat; denn eine in Kreise gefaserte Mannigfaltigkeit besitzt stetige, fixpunktfreie Deformationen in sich. Nach dem oben genannten Fasersatz ist also G keine Homologiesphäre.

c) Aus den in Nr. 6 und 7 bewiesenen Tatsachen: $\frac{G}{N} = P_{n-1}$,

$N = L + a_1 L$, und $2L \sim 0$ in G läßt sich die Behauptung „ $n = 3$ “ auch mit Hilfe der Theorie von Hurewicz¹⁴⁾ ableiten. Aus dieser Theorie ergibt sich nämlich leicht die Richtigkeit folgender Behauptung: *Die zweite Homotopiegruppe von $\frac{G}{N} = P_{n-1}$ ist nicht die Nullgruppe; dann muß $n = 3$ sein, denn P_{n-1} hat dieselben Homotopiegruppen wie S_{n-1} . Um die Behauptung zu beweisen, setzen wir für die bei Hurewicz mit H bezeichnete Untergruppe die Gruppe N ein; die Zahl n im Satz XII bei Hurewicz setzen wir gleich 2 (n bezeichnet also von hier an nicht mehr die Dimension von G). Dann ist nach diesem Satz eine gewisse Faktorgruppe von $\pi_2 \left(\frac{G}{N} \right)$ isomorph mit einer Untergruppe der Fundamentalgruppe $\pi_1(N)$ von N ; und zwar besteht diese Untergruppe aus denjenigen Elementen der Fundamentalgruppe von L (das ist die Gruppe $(H_0)^{S_{n-1}}$ bei Hurewicz), die in G nullhomotop sind (mit $(G^{S_{n-1}})_0$ ist bei Hurewicz die Klasse der zusammenziehbaren Abbildungen von S_{n-1} in G bezeichnet); sie ist nicht die Nullgruppe, denn nach Nr. 7 ist $2L \sim 0$ in G , also $2L$ auch homotop 0 in G (weil die Fundamentalgruppe der Gruppe G kommutativ ist).*

LITERATURVERZEICHNIS

- ¹⁾ E. Cartan, La Topologie ... des Groupes de Lie [L'Enseignement Math. 35 (1936), S. 197].
- ²⁾ O. Taubsky, Analytical methods in hypercomplex systems [Comp. Math. 3 (1936), Nr. 3].
- ³⁾ L. Pontrjagin, Topological Groups (Princeton 1939), Th. 50, vgl. insbesondere S. 200, Formel (20).
- ⁴⁾ J. Feldbau, C. R. 208 (1939), S. 1621.
- ⁵⁾ H. Seifert, Topologie dreidimensionaler gefaserner Räume [Acta math. 60 (1932)]. Wir bemerken, daß bei den von uns betrachteten Faserungen keine „Ausnahme-fasern“ im Sinne von Seifert vorkommen.
- ⁶⁾ A. a. O.⁴⁾, Th. A.
- ⁷⁾ H. Hopf, Über den Rang geschlossener Lie'scher Gruppen [Comment. Math. Helvet. 13 (1941), S. 119].
- ⁸⁾ A. a. O.¹⁾, S. 197.
- ⁹⁾ Vgl. auch die Betrachtungen a. a. O.⁵⁾.
- ¹⁰⁾ Alexandroff-Hopf, Topologie I (Berlin 1935), Kap. VII, § 2, Nr. 3. Man beachte dort: Liegt Z in $K_1 \cdot K_2$, dann auch die beiden Zyklen \dot{C}_1 und \dot{C}_2 .
- ¹¹⁾ Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie (Leipzig 1934), S. 220.
- ¹²⁾ A. a. O.⁷⁾, Nr. 2.
- ¹³⁾ A. a. O.¹⁰⁾, Kap. XIV, § 3, Nr. 1, Satz I und § 1, Nr. 4, d).
- ¹⁴⁾ W. Hurewicz, Beiträge zur Topologie der Deformationen I [Proc. Amsterdam 38 (1935), insbesondere Satz XII].

(Eingegangen den 18. September 1940.)

Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions. I.

Par ALEXANDRE OSTROWSKI, Bâle

Introduction

Si z est une fonction indéterminée de x , on peut toujours introduire deux variables X, Z par des équations

$$X = f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) \quad ; \quad Z = g\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right), \quad (1)$$

mais, en considérant Z comme fonction de X , l'expression de $\frac{dZ}{dX}$ contient en général $\frac{d^2z}{dx^2}$. Or, on peut choisir les fonctions f et g de sorte que l'expression de $\frac{dZ}{dX}$ ne dépende que de x , de z et de $\frac{dz}{dx}$:

$$\frac{dZ}{dX} = h\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right), \quad (2)$$

et qu'en plus x et z puissent être tirés des relations (1) et (2) en fonctions de X, Z et $\frac{dZ}{dX}$. On a alors affaire à une *transformation de contact*.

Par exemple, en posant avec Euler et Legendre

$$X = \frac{dz}{dx}, \quad Z = z - x \frac{dz}{dx}, \quad (3)$$

on a

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{\frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dx} - x \frac{d^2z}{dx^2}}{\frac{d^2z}{dx^2}} = -x. \quad (4)$$

Il existe aussi des transformations de cette sorte dans le cas d'une fonction z d'un nombre quelconque n de variables indépendantes x_1, \dots, x_n . Ce sont des transformations de contact dans l'espace à $n+1$ dimensions, dont la théorie, amorcée par Euler, Legendre, Ampère et Jacobi et poursuivie par Du Bois-Reymond et Darboux, a été surtout développée dans l'œuvre magnifique de Sophus Lie et complétée par S. Cantor et F. Engel.

On peut se demander s'il existe aussi des transformations analogues dans le cas par exemple de plusieurs fonctions d'une variable indépendante. Mais il est facile de montrer que, si par exemple, y_1 et y_2 sont deux fonctions indéterminées d'une variable indépendante x , on obtient, en posant

$$\xi = f\left(x, y_1, y_2, \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}\right), \quad \eta_1 = g(\dots), \quad \eta_2 = h(\dots),$$

pour les dérivées $\frac{d\eta_1}{d\xi}$, $\frac{d\eta_2}{d\xi}$ des expressions dépendant des dérivées secondes de y_1 et y_2 et que ces dérivées ne disparaissent de ξ , η_1 , η_2 que si les fonctions f, g, h sont indépendantes de $\frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dy_2}{dx}$, c'est-à-dire, si notre transformation est une transformation ponctuelle.

Toutefois, en combinant par exemple la transformation (3) avec la transformation identique $U = u$, u étant une fonction indéterminée de x , on exprime au moins les fonctions z et u de x par Z, U et X et par les dérivées $\frac{dZ}{dX}$, $\frac{dU}{dX}$, bien que l'expression de la dérivée $\frac{dU}{dX} = \frac{du}{dx} / \frac{d^2z}{dx^2}$ contienne la dérivée seconde de z . On a ici affaire à une transformation qui est réversible sans être une transformation de contact.

Plus généralement, si $y_\nu(x)$, ($\nu = 1, \dots, n$) sont n fonctions indéterminées de x , il existe des transformations

$$\xi = \xi(x, y, \dots, y^{(k)}) \quad ; \quad \eta_\nu = \eta_\nu(\dots),$$

telles qu'en dérivant ces relations, on puisse exprimer x et les y_ν en fonctions de ξ, η_ν et des dérivées des η_ν par rapport à ξ jusqu'à l'ordre k . Nous appelons des transformations de cette sorte *transformations réversibles d'éléments de ligne d'ordre k* . Si $k = 1$, nous parlerons tout simplement de *transformations R* .

Le présent mémoire est consacré à l'étude des transformations R pour $n = 2$, c'est-à-dire dans l'espace à trois dimensions. Dans un mémoire suivant nous établirons les principaux théorèmes concernant les transformations R dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions.

Si ξ, η_1 et η_2 sont donnés en fonctions de x, y_1, y_2 , $\frac{dy_1}{dx} = p_1, \frac{dy_2}{dx} = p_2$ de manière à conduire à une transformation R , nous montrons tout d'abord que les expressions de ξ, η_1, η_2 dépendent d'une même fonction de p_1, p_2 , c'est-à-dire qu'il existe une fonction

$$r = r(x, y_1, y_2, p_1, p_2),$$

telle que ξ, η_1, η_2 s'expriment tous les trois par x, y_1, y_2 et r . La fonction r jouit, en fonction de p_1 et p_2 , de la propriété que ses courbes de niveau sont des droites. r peut être choisi naturellement de différentes façons. Nous choisissons r d'une manière „canonique“, de sorte que r est univoquement déterminé par l'équation „Pfaffienne“ $ds = 0$, où

$$ds = e dy_1 - a(x, y_1, y_2, r) dy_2 - b(x, y_1, y_2, r) dx .$$

Ici l'on a ou bien $e = 1, a = r$ (type I), ou bien $e = 1, b = r, \frac{\partial a}{\partial r} = 0$ (type II), ou bien $e = 0, a = -1, b = r$ (type III).

La forme ds sera appelée la *première forme adjointe* rattachée à notre transformation R . En considérant les expressions de x, y_1, y_2 en fonctions de $\xi, \eta_1, \eta_2, \frac{d\eta_1}{d\xi} = \pi_1, \frac{d\eta_2}{d\xi} = \pi_2$, on exprime de la même façon x, y_1, y_2 par ξ, η_1, η_2 et par une grandeur

$$\varrho = \varrho(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) ,$$

définie univoquement par une équation $d\sigma = 0$, où

$$d\sigma = \varepsilon d\eta_1 - \alpha(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) d\eta_2 - \beta(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) d\xi ,$$

la *seconde forme adjointe* rattachée à notre transformation R , satisfait aux conditions analogues à celles énoncées pour ds .

Notre transformation R se réduit alors à une transformation ponctuelle entre deux espaces à 4 dimensions

$$(x, y_1, y_2, r) \quad \text{et} \quad (\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) ,$$

satisfaisant à la condition

$$d\sigma = \mu ds \tag{5}$$

(théorème I).

Ici les formes adjointes ds et $d\sigma$ peuvent être choisies arbitrairement (théorème III), et chaque transformation satisfaisant à (5) définit une transformation R .

De l'autre côté, si la forme ds est donnée, il suffit de choisir les expressions de ξ, η_1, η_2 en fonctions des x, y_1, y_2, r de sorte qu'elles satisfassent à une certaine équation différentielle (24,4) du texte, pour qu'il soit possible, en leur adjoignant une quatrième fonction $\varrho(x, y_1, y_2, r)$, d'obtenir une transformation R (théorème IV). Toutefois il y a certains cas d'exception.

Les transformations R ne forment pas un groupe, mais si l'on ne considère que les transformations R dont les deux formes adjointes sont égales entre elles quand on remplace $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$ dans $d\sigma$ resp. par x, y_1, y_2, r — les transformations R symétriques — l'ensemble des transformations R symétriques appartenant à une forme adjointe fixe forme un groupe.

Dans notre discussion, nous faisons généralement abstraction des transformations R provenant d'une transformation ponctuelle entre x, y_1, y_2 d'un côté et ξ, η_1, η_2 de l'autre. Toutefois, nous montrons (théorème II) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une forme adjointe $d\sigma$ puisse être transformée par une transformation ponctuelle en la forme adjointe $dy_1 - rdx$ est que les coefficients de $d\sigma$ soient des polynômes au plus linéaires en ϱ . (Une telle forme adjointe sera appelée axiale.)

L'intérêt de ce résultat consiste en ceci que les transformations R symétriques correspondant à la forme $dy_1 - rdx$ se réduisent aux transformations de contact dans le plan des x, y_1 .

Ces résultats sont développés dans le chapitre I du présent mémoire. Le § 1 de ce chapitre contient la démonstration que les transformations de contact dans le sens de Sophus Lie n'existent pas dans notre cas. Le § 2 est consacré à la définition des fonctions r et ϱ . Dans le § 3 nous démontrons le théorème I qui peut être considéré comme le résultat principal de ce chapitre, et nous ajoutons quelques remarques sur les transformations R du point de vue de la théorie des groupes.

Dans le § 4, les théorèmes II et III sur l'équivalence des formes adjointes sont démontrés. Relevons qu'il résulte du No. 62 du § 10 du second chapitre, que notre procédé de démonstration du théorème III contient une solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes dans le cas général. Dans le § 5 nous démontrons le théorème IV, et nous ajoutons au § 6 quelques remarques sur l'intégration de l'équation différentielle (24,4).

Pour un nombre $n > 2$ de fonctions de x , la solution du problème de trouver toutes les transformations R sera obtenue en généralisant les considérations du chapitre I. Mais dans le cas spécial $n = 2$ on obtient une solution particulièrement simple de notre problème en faisant usage des transformations de contact dans l'espace à trois dimensions. Cette solution est exposée dans le chapitre II.

En éliminant r et ϱ des 4 relations existant pour une transformation R entre x, y_1, y_2, r et $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$, on obtient une correspondance entre les espaces $S(x, y_1, y_2)$ et $\Sigma(\xi, \eta_1, \eta_2)$, définie par un couple d'équations

$$\Omega_\nu(x, y_1, y_2, \xi, \eta_1, \eta_2) = 0, \quad \nu = 1, 2. \quad (6)$$

C'est une *correspondance de rang 1* entre S et Σ . Nous montrerons dans le § 7 que réciproquement la transformation R est univoquement déterminée par la correspondance (6) et par ds , à l'exception de certaines transformations R , *transformations R singulières*, qu'on peut facilement toutes former (théorème V).

Dans le § 8 on part d'une correspondance (6) donnée à priori, et l'on cherche des conditions sous lesquelles, en choisissant une première forme adjointe ds , on obtient une transformation R . Cette recherche se réduit à la discussion du problème de caractériser certaines formes ds que nous appelons *singulières relativement à (6)*.

Notre résultat est que chaque forme ds est singulière relativement à (6), si la correspondance (6) est *intransitive*, c'est-à-dire, si les équations (6) peuvent être choisies dans la forme

$$f_\nu(x, y_1, y_2) - \varphi_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2) = 0, \quad \nu = 1, 2.$$

Si la correspondance (6) est *transitive*, elle définit dans chaque point de l'espace S un „cône élémentaire“ d'éléments de ligne. Si ce cône dégénère dans chaque point de S et devient un élément de surface, on a affaire à une correspondance *faiblement transitive dans S* .

Le résultat principal de la discussion du § 8 consiste en ceci que les formes singulières ds n'existent dans le cas de (6) transitive que si (6) est *faiblement transitive dans S* , et qu'on peut caractériser les formes singulières comme certaines formes axiales satisfaisant à une certaine relation linéaire qu'on établit facilement à partir des cônes élémentaires (dégénérés) définis dans S par (6).

Or, une correspondance (6) (du rang 1) définit d'après S. Lie une transformation de contact T . On peut alors (§ 9) interpréter nos formules au moyen de T . A chaque forme adjointe ds correspond un ensemble D de ∞^4 éléments de surface de S tel que par le point général de S passent ∞^1 éléments de surface de D . D sera appelé le *champ d'éléments de surface* correspondant à ds . D définit évidemment dans S une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre. Maintenant, si Δ est le champ d'éléments de surface correspondant dans Σ à $d\sigma$, D est *transformé dans Δ par la transformation de contact T* .

On peut dès lors obtenir les équations de notre transformation R de manière suivante: Chaque élément de ligne (x, y_1, y_2, p_1, p_2) général dans S est situé dans un élément de surface du champ D . Si à cet élément

de surface correspond par T un élément de surface de Δ passant par le point (ξ, η_1, η_2) , on a en exprimant ξ, η_1, η_2 en fonctions de x, y_1, y_2, p_1, p_2 , notre transformation R .

Toutefois, le résultat obtenu n'est pas applicable aux transformations singulières. Pour caractériser les transformations singulières, on peut utiliser les transformations de contact qui se rattachent à une *correspondance du rang 2*, définie par une seule relation

$$\Omega(x, y_1, y_2, \xi, \eta_1, \eta_2) = 0. \quad (7)$$

On obtient alors (§ 10) le théorème VI qui est le théorème fondamental du présent mémoire: *Chaque fois qu'une transformation de contact entre S et Σ transforme un champ D d'éléments de surface de S dans un champ Δ d'éléments de surface de Σ , on obtient par la règle énoncée plus haut une transformation R , et chaque transformation R peut être obtenue de cette façon.*

Toutefois, en appliquant ce théorème, il faut tenir compte de certaines singularités dues à la non-uniformité des transformations impliquées.

Nous avons dû dans la discussion des §§ 8, 9 plus entrer dans les détails que dans la première partie du mémoire. Cela a été nécessaire, puisque les transformations des équations différentielles aux dérivées partielles par une transformation de contact générale ne sont pas étudiées en détail dans les grands traités de Lie-Scheffers, Lie-Engel, Goursat et Campbell.

Cependant, une discussion générale de cette sorte se heurte à un obstacle apparemment infranchissable autant qu'on ne fait pas d'hypothèses très particulières sur les fonctions entrant dans le calcul. Une équation de la forme

$$F(r, x, y_1, y_2) = 0 \quad (8)$$

peut très bien n'admettre aucune solution par rapport à r , même si r entre effectivement dans F et si F est une fonction holomorphe en r, x, y_1, y_2 . Par exemple F pourrait être de la forme $e^{G(r, x, y_1, y_2)}$, G étant une fonction entière de ses arguments. Il est donc impossible en général de „tirer la valeur de r de l'équation (8)“ comme on est accoutumé de le faire dans les discussions générales de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles, surtout quand on utilise des considérations géométriques. Dans de tels cas on est forcé de se borner aux conditions nécessaires qui deviennent suffisantes dès que la solubilité des équations est assurée, par exemple dès que les fonctions entrant dans le calcul sont

algébriques. Quand on a atteint des conditions de cette sorte qu'on pourrait appeler des *conditions algébriquement complètes*, on n'a naturellement pas résolu complètement le problème, mais on a peut-être fait tout ce qu'on peut faire sans introduire des hypothèses trop spéciales.

C'est dans ce sens seulement qu'on peut considérer les résultats du § 8 comme définitifs.

C H A P I T R E I

Etude directe des Transformations R

§ 1. Préliminaires, exemples

1. Soit x une variable indépendante, et y_1, y_2 deux fonctions indéterminées de x ; p_1, p_2 leurs dérivées premières, z_1, z_2 leurs dérivées secondes.

Soit σ :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y_1, y_2, p_1, p_2) \\ \eta_1 &= \eta_1(x, y_1, y_2, p_1, p_2) \\ \eta_2 &= \eta_2(x, y_1, y_2, p_1, p_2) \end{aligned} \right\} \quad (1,1)$$

une transformation telle qu'en calculant au moyen de (1,1)

$$\pi_1 = \frac{d\eta_1}{d\xi} \quad \text{et} \quad \pi_2 = \frac{d\eta_2}{d\xi} ;$$

$$\pi_1 = \frac{\eta'_{1x} + p_1 \eta'_{1y_1} + p_2 \eta'_{1y_2} + z_1 \eta'_{1p_1} + z_2 \eta'_{1p_2}}{\xi'_x + p_1 \xi'_{y_1} + p_2 \xi'_{y_2} + z_1 \xi'_{p_1} + z_2 \xi'_{p_2}} = \pi_1(x, y_1, y_2, p_1, p_2, z_1, z_2), \quad (1,2)$$

$$\pi_2 = \frac{\eta'_{2x} + p_1 \eta'_{2y_1} + p_2 \eta'_{2y_2} + z_1 \eta'_{2p_1} + z_2 \eta'_{2p_2}}{\xi'_x + p_1 \xi'_{y_1} + p_2 \xi'_{y_2} + z_1 \xi'_{p_1} + z_2 \xi'_{p_2}} = \pi_2(x, y_1, y_2, p_1, p_2, z_1, z_2),$$

on obtienne premièrement comme l'inverse de σ une transformation s :

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) \\ y_1 &= y_1(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) \\ y_2 &= y_2(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) \end{aligned} \right\} \quad (1,3)$$

et, deuxièmement, en posant

$$\zeta_1 = \frac{d^2 \eta_1}{d\xi^2}, \quad \zeta_2 = \frac{d^2 \eta_2}{d\xi^2},$$

et en dérivant (1,3), des expressions pour p_1, p_2 analogues aux formules (1,2). Les transformations s et σ de ce type seront appelées au cours du présent mémoire transformations R . Elles présentent une certaine analogie (assez incomplète, il est vrai) avec les transformations de contact (Cf. No. 3).

Quand peut-on dire que les transformations s et σ sont inverses l'une de l'autre? Ceci est équivalent aux deux hypothèses suivantes:

I. En substituant dans (1,1) les expressions (1,3) de x, y_1, y_2 et les expressions correspondantes de p_1, p_2 , les 3 équations (1,1) deviennent des identités pour le couple „général“ des deux fonctions η_1, η_2 de ξ ¹⁾.

II. En substituant dans les équations (1,3) les expressions (1,1) et (1,2), ces équations deviennent des identités pour le couple „général“ des deux fonctions y_1, y_2 de x .

Il est évident qu'alors le système (1,1) possède en général pour chaque couple de fonctions η_1, η_2 de ξ des solutions, et chaque solution est donnée par (1,3). Le fait analogue subsiste pour le système (1,3).

Si l'on retient l'hypothèse I, l'hypothèse II peut être remplacée par l'hypothèse suivante:

II^o. Le système (1,3) possède une solution pour le couple „général“ des deux fonctions y_1, y_2 de x .

En effet, désignons par y_1^0, y_2^0 un couple général de fonctions de x et par p_1^0, p_2^0 leurs dérivées premières. Soit alors $\xi^0, \eta_1^0, \eta_2^0$ une solution des équations (1,3), et désignons par π_1^0, π_2^0 les dérivées de η_1^0, η_2^0 par rapport à ξ^0 . Cette solution est alors donnée d'après l'hypothèse I par les formules

$$\xi^0 = \xi(x, y_\nu^0, p_\nu^0); \quad \eta_\mu^0 = \eta_\mu(x, y_\nu^0, p_\nu^0), \quad \begin{matrix} \nu = 1, 2, \\ \mu = 1, 2, \end{matrix} \quad (1,4)$$

et l'on a

$$x = x(\xi^0, \eta_\mu^0, \pi_\mu^0), \quad y_\nu^0 = y_\nu(\xi^0, \eta_\mu^0, \pi_\mu^0), \quad \begin{cases} \nu = 1, 2, \\ \mu = 1, 2. \end{cases} \quad (1,5)$$

Alors, on a en substituant les expressions (1,4) dans (1,5):

$$\begin{aligned} x(\xi(x, y_\nu^0, p_\nu^0), \eta_\mu(x, y_\nu^0, p_\nu^0), \pi_\mu(x, y_\nu^0, p_\nu^0, z_\nu^0)) &= x \\ y(\xi(x, y_\nu^0, p_\nu^0), \eta_\mu(x, y_\nu^0, p_\nu^0), \pi_\mu(x, y_\nu^0, p_\nu^0, z_\nu^0)) &= y_\lambda^0, \quad \lambda = 1, 2. \end{aligned}$$

Donc, en substituant les expressions (1,1) et (1,2) dans (1,3), ces équations deviennent des identités pour le couple „général“ y_1, y_2 .

¹⁾ Si l'on dit qu'une assertion est valable pour un couple général de deux fonctions, on entend par là qu'il existe une expression différentielle Φ en deux fonctions, telle que l'assertion en question reste valable autant que l'expression Φ ne devient pas 0. Toutefois, cette notion s'applique généralement dans les recherches sur le comportement local, de sorte que les fonctions „générales“ pourraient très bien posséder des espaces lacunaires, même si elles sont analytiques.

Dans ce qui suit nous supposons partout que les substitutions (σ) et (s) sont inverses l'une de l'autre dans le sens de ce No.

2. Si les fonctions ξ, η_1, η_2 dans (1,1) ne contiennent pas p_1, p_2 , les fonctions x, y_1, y_2 de (1,3) sont indépendantes de π_1, π_2 .

En effet, les 3 fonctions dans (1,1) sont assurément indépendantes, puisque dans le cas contraire il existerait une relation entre ξ, η_1, η_2 et alors les équations (1,3) ne seraient pas résolubles pour le couple „général“ y_1, y_2 .

Donc on peut exprimer x, y_1, y_2 comme fonctions de ξ, η_1, η_2 . Mais d'un autre côté, d'après nos hypothèses, ces 3 fonctions sont exprimables par les expressions de droite en (1,3). Donc, si ces 3 expressions n'étaient pas indépendantes de π_1, π_2 , on obtiendrait du moins une équation différentielle pour $\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)$ et le couple η_1, η_2 ne serait pas „général“.

Il s'agit donc dans ce cas d'une transformation ponctuelle et de son inverse.

Dans ce qui suit nous allons supposer, si le contraire n'est pas dit explicitement, que les transformations (1,1), (1,3) ne se réduisent pas à des transformations ponctuelles. Alors au moins l'une des variables p_1, p_2 entre effectivement dans (1,1), et au moins l'une des variables π_1, π_2 entre effectivement dans (1,3).

3. Les expressions (1,2) de π_1, π_2 contiennent z_1, z_2 . Nous allons maintenant montrer que ces expressions contiennent effectivement au moins l'une des variables z_1, z_2 , s'il ne s'agit pas d'une transformation ponctuelle.

En effet, si π_1 et π_2 étaient indépendantes de z_1, z_2 , il résulte des formules (1,2) que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \eta'_{1 p_1} & \eta'_{1 p_2} \\ \eta'_{2 p_1} & \eta'_{2 p_2} \\ \xi'_{p_1} & \xi'_{p_2} \end{pmatrix}$$

serait égal à 1. Mais alors les 3 fonctions η_1, η_2, ξ , considérées comme fonctions de p_1, p_2 , seraient toutes les 3 exprimables par l'une d'elles. Il existerait donc une fonction $p = p(x, y_1, y_2, p_1, p_2)$ telle que ξ, η_1, η_2 pourraient être exprimés en fonctions de 4 variables x, y_1, y_2, p :

$$\begin{aligned} \xi &= \bar{\xi}(x, y_1, y_2, p) , \\ \eta_1 &= \bar{\eta}_1(x, y_1, y_2, p) , \\ \eta_2 &= \bar{\eta}_2(x, y_1, y_2, p) . \end{aligned}$$

Alors on a pour η_1 et η_2 :

$$\pi_1 = \frac{\bar{\eta}'_{1x} + p_1 \bar{\eta}'_{1y_1} + p_2 \bar{\eta}'_{1y_2} + \bar{\eta}'_{1p} \frac{dp}{dx}}{\bar{\xi}'_x + p_1 \bar{\xi}'_{y_1} + p_2 \bar{\xi}'_{y_2} + \bar{\xi}'_p \frac{dp}{dx}},$$

$$\pi_2 = \frac{\bar{\eta}'_{2x} + p_1 \bar{\eta}'_{2y_1} + p_2 \bar{\eta}'_{2y_2} + \bar{\eta}'_{2p} \frac{dp}{dx}}{\bar{\xi}'_x + p_1 \bar{\xi}'_{y_1} + p_2 \bar{\xi}'_{y_2} + \bar{\xi}'_p \frac{dp}{dx}}.$$

Or,

$$\frac{dp}{dx} = z_1 p'_{p_1} + z_2 p'_{p_2} + p_1 p'_{y_1} + p_2 p'_{y_2} + p'$$

contient effectivement une des variables z_1 et z_2 qui n'entrent pas d'après notre hypothèse dans π_1, π_2 . On a donc

$$\pi_1 = \frac{\bar{\eta}'_{1p}}{\bar{\xi}'_p}, \quad \pi_2 = \frac{\bar{\eta}'_{2p}}{\bar{\xi}'_p};$$

mais les expressions de droite ne dépendant ici que de x, y_1, y_2, p , nous aurions exprimé 5 grandeurs

$$\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2 \quad (3,1)$$

en fonctions de 4 grandeurs x, y_1, y_2, p .

Il existerait donc une relation non-identique entre les 5 grandeurs (3,1) tandis que η_1, η_2 est un couple „général“ de fonctions de ξ .

En particulier il n'est donc pas possible que dans une transformation (1,1) qui ne se réduit pas à une transformation ponctuelle, les 5 expressions (3,1) s'expriment au moyen de x, y_1, y_2, p_1, p_2 .

Les transformations de contact dans le sens étroit de Sophus Lie ne peuvent donc pas être généralisées au cas de 2 fonctions d'une variable indépendante si l'on ne veut pas se borner aux transformations ponctuelles ²⁾.

4. Exemples. I. Posons

$$\eta_2 = p_1 + p_2, \quad \eta_1 = y_1 + y_2 - x(p_1 + p_2), \quad \xi = y_2 - x(p_1 + p_2). \quad (4,1)$$

On a évidemment

$$\pi_1 = \frac{\frac{d\eta_1}{dx}}{\frac{d\xi}{dx}} = \frac{-x(p_1 + p_2)'_x}{-x(p_1 + p_2)'_x - p_1}, \quad \pi_2 = \frac{(p_1 + p_2)'_x}{-x(p_1 + p_2)'_x - p_1},$$

donc

²⁾ Cf. Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, T. I. (1896), pp. 478 — 480.

$$x = -\frac{\pi_1}{\pi_2}, \quad y_1 = \eta_1 - \xi, \quad y_2 = \xi - \frac{\pi_1}{\pi_2} \eta_2. \quad (4,1^0)$$

II. Pour

$$\xi = p_2, \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2 - x p_2 \quad (4,2)$$

on obtient

$$\pi_1 = \frac{p_1}{p_2' x}, \quad \pi_2 = \frac{p_2 - p_2 - x p_2' x}{p_2' x} = -x,$$

$$x = -\pi_2, \quad y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2 - \xi \pi_2, \quad (4,2^0)$$

c'est essentiellement la transformation de Legendre.

III. En posant

$$\xi = x, \quad \eta_1 = \frac{p_1}{p_2}, \quad \eta_2 = y_1 - \frac{p_1}{p_2} y_2, \quad (4,3)$$

on a

$$\pi_1 = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)'_x, \quad \pi_2 = p_1 - p_2 \frac{p_1}{p_2} - y_2 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)'_x,$$

$$y_2 = -\frac{\pi_2}{\pi_1}, \quad y_1 = \eta_2 - \frac{\pi_2}{\pi_1} \eta_1, \quad x = \xi. \quad (4,3^0)$$

IV. Des formules

$$\xi = \frac{p_1}{p_2} x, \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2, \quad (4,4)$$

il résulte

$$\pi_1 = \frac{p_1}{\frac{p_1}{p_2} + x \left(\frac{p_1}{p_2} \right)'_x}, \quad \pi_2 = \frac{p_2}{\frac{p_1}{p_2} + x \left(\frac{p_1}{p_2} \right)'_x}, \quad \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$x = \frac{\pi_2}{\pi_1} \xi, \quad y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2. \quad (4,4^0)$$

Dans cette transformation, chaque point se déplace suivant une parallèle à l'axe des x , le facteur dont se multiplie x étant proportionnel à la tangente de l'angle formé par la projection de l'élément de ligne sur le plan des y_1, y_2 avec l'axe des y_2 .

V. Une généralisation de l'exemple précédent est donnée par les formules:

$$\xi = X \left(\frac{p_1}{p_2}, x \right), \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2, \quad (4,5)$$

si

$$D = \frac{X'_{p_1}}{p_2} \neq 0, \quad X'_x \neq 0.$$

En effet, on a

$$\pi_1 = \frac{p_1}{X'_x + D \left(\frac{p_1}{p_2} \right)'_x}, \quad \pi_2 = \frac{p_2}{X'_x + D \left(\frac{p_1}{p_2} \right)'_x}, \quad \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

donc en résolvant la première équation (4,5) par rapport à x :

$$x = \Xi \left(\frac{\pi_1}{\pi_2}, \xi \right), \quad y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2. \quad (4,5^0)$$

VI. Enfin, si

$$\xi = \frac{p_2}{p_1 x}, \quad \eta_1 = y_1 - 2 \frac{p_2}{p_1}, \quad \eta_2 = y_2 - \frac{p_2^2}{p_1^2}, \quad (4,6)$$

on obtient

$$\pi_1 = x^2 \frac{p_1 - 2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)'_x}{x \left(\frac{p_2}{p_1} \right)'_x - \frac{p_2}{p_1}}, \quad \pi_2 = x^2 \frac{p_2 - 2 \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)'_x}{x \left(\frac{p_2}{p_1} \right)'_x - \frac{p_2}{p_1}}, \quad \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{p_2}{p_1},$$

$$x = \frac{\pi_2}{\pi_1 \xi}, \quad y_1 = \eta_1 + 2 \frac{\pi_2}{\pi_1}, \quad y_2 = \eta_2 + \frac{\pi_2^2}{\pi_1^2}. \quad (4,6^0)$$

§ 2. Les fonctions r et ϱ

5. Désignons par

$$\kappa (\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2)$$

une fonction de ses 5 arguments jouissant de la propriété de rester indépendante de z_1, z_2 quand on y exprime les arguments ξ, \dots, π_2 par $x, y_1, y_2, p_1, p_2, z_1, z_2$. Par exemple, les 3 fonctions x, y_1, y_2 dans (1,3) jouissent de cette propriété.

Posons

$$\delta = \frac{\partial}{\partial x} + p_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial y_2}. \quad (5,1)$$

Alors on peut écrire (1,2) dans la forme

$$\pi_\nu = \frac{\delta \eta_\nu + z_1 \eta'_{\nu p_1} + z_2 \eta'_{\nu p_2}}{\delta \xi + z_1 \xi'_{p_1} + z_2 \xi'_{p_2}}, \quad \nu = 1, 2. \quad (5,2)$$

Donc, en dérivant κ par rapport à z_1 et z_2 :

$$\begin{aligned} & (\eta'_{1 p_1} (\delta \xi + \xi'_{p_2} z_2) - \xi'_{p_1} (\delta \eta_1 + \eta'_{1 p_2} z_2)) \kappa'_{\pi_1} + \\ & + (\eta'_{2 p_1} (\delta \xi + \xi'_{p_2} z_2) - \xi'_{p_1} (\delta \eta_2 + \eta'_{2 p_2} z_2)) \kappa'_{\pi_2} = 0 . \end{aligned} \quad (5,3)$$

$$\begin{aligned} & (\eta'_{1 p_2} (\delta \xi + \xi'_{p_1} z_1) - \xi'_{p_2} (\delta \eta_1 + \eta'_{1 p_1} z_1)) \kappa'_{\pi_1} + \\ & + (\eta'_{2 p_2} (\delta \xi + \xi'_{p_1} z_1) - \xi'_{p_2} (\delta \eta_2 + \eta'_{2 p_1} z_1)) \kappa'_{\pi_2} = 0 . \end{aligned} \quad (5,4)$$

Les deux relations (5,3), (5,4) ne sont pas satisfaites identiquement en κ , sans quoi π_1 et π_2 seraient indépendantes de z_1 et z_2 . Donc on obtient pour κ une équation différentielle :

$$\gamma \kappa'_{\pi_1} + \kappa'_{\pi_2} = 0 , \quad (5,5)$$

où γ est indépendant du choix de κ . En plus, γ ne dépend évidemment pas de z_1, z_2 , et l'on obtient de (5,3), (5,4) les trois expressions pour γ :

$$\gamma = \frac{\eta'_{1 p_1} \xi'_{p_2} - \eta'_{1 p_2} \xi'_{p_1}}{\eta'_{2 p_1} \xi'_{p_2} - \eta'_{2 p_2} \xi'_{p_1}} , \quad (5,6)$$

$$\gamma = \frac{\eta'_{1 p_2} (\xi'_x + p_1 \xi'_{y_1} + p_2 \xi'_{y_2}) - \xi'_{p_2} (\eta'_{1 x} + p_1 \eta'_{1 y_1} + p_2 \eta'_{1 y_2})}{\eta'_{2 p_2} (\xi'_x + p_1 \xi'_{y_1} + p_2 \xi'_{y_2}) - \xi'_{p_2} (\eta'_{2 x} + p_1 \eta'_{2 y_1} + p_2 \eta'_{2 y_2})} , \quad (5,7)$$

$$\gamma = \frac{\eta'_{1 p_1} (\xi'_x + p_1 \xi'_{y_1} + p_2 \xi'_{y_2}) - \xi'_{p_1} (\eta'_{1 x} + p_1 \eta'_{1 y_1} + p_2 \eta'_{1 y_2})}{\eta'_{2 p_1} (\xi'_x + p_1 \xi'_{y_1} + p_2 \xi'_{y_2}) - \xi'_{p_1} (\eta'_{2 x} + p_1 \eta'_{2 y_1} + p_2 \eta'_{2 y_2})} , \quad (5,8)$$

dont l'une au moins ne devient pas indéterminée.

6. La condition (5,5) est évidemment nécessaire et suffisante pour que κ jouisse de la propriété en question. Or, $\gamma = \gamma(\xi, \eta_1, \dots, \pi_2)$, jouit aussi de la propriété de rester, exprimé par x, y_1, \dots , indépendant de z_1 et z_2 . Donc

$$\gamma \gamma'_{\pi_1} + \gamma'_{\pi_2} = 0 . \quad (6,1)$$

γ pourrait très bien être 0 ou ∞ (dans ce dernier cas, l'équation (5,5) se réduit à $\kappa'_{\pi_1} = 0$) ou bien, plus généralement, être indépendant de π_1 et π_2 . Nous distinguons trois cas :

1. γ est fini et indépendant de π_1, π_2 . Alors, nous posons

$$\varrho = \pi_1 - \gamma(\xi, \eta_1, \eta_2) \pi_2 . \quad (6,2)$$

2. γ dépend au moins d'une des variables π_1, π_2 . Alors, nous posons

$$\varrho = \gamma . \quad (6,3)$$

3. γ est égal à ∞ . Alors, nous posons

$$\varrho = \pi_2 . \quad (6,4)$$

7. Dans le cas 2. $\varrho = \gamma$, ϱ est aussi une intégrale de (5,5), donc chaque fonction κ s'exprime par ϱ , en adjoignant ξ, η_1, η_2 . Or l'expression $\pi_1 - \varrho\pi_2$ satisfait elle aussi la condition (5,5). Donc cette expression s'exprime par $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$:

$$\pi_1 - \varrho\pi_2 = \varphi(\varrho; \xi, \eta_1, \eta_2) . \quad (7,1)$$

Dans les cas 1. et 3, κ est une fonction de $\pi_1 - \gamma\pi_2$ ou de π_2 . Donc, dans tous les trois cas κ est une fonction de $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$.

Nous supposons dès maintenant que x, y_1, y_2 dans (1,3) sont exprimés en fonctions de $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$, et les dérivées partielles sont à calculer dans cette hypothèse.

Dans l'exemple II du No. 4 on a $\varrho = \pi_2$, dans les exemples I, III—VI :

$$\varrho = \frac{\pi_1}{\pi_2} .$$

8. Considérons maintenant une fonction $k(x, y_1, y_2, p_1, p_2)$ qui, exprimée par les variables grecques, ne dépende pas de ζ_1, ζ_2 . Il résulte évidemment d'un raisonnement complètement symétrique au précédent que notre fonction k satisfait à une équation différentielle

$$ck'_{p_1} + k'_{p_2} = 0 , \quad c = c(x, y_1, y_2, p_1, p_2) , \quad (8,1)$$

où la fonction c appartient, elle aussi, à la classe des fonctions k et satisfait à l'équation différentielle

$$cc'_{p_1} + c'_{p_2} = 0 \quad (8,2)$$

De même, posons $r = c$, si c dépend effectivement d'une des variables p_1, p_2 . Si c est indépendant de p_1, p_2 et fini, posons

$$r = p_1 - c(x, y_1, y_2) p_2 ; \quad (8,3)$$

Enfin, pour $c = \infty$, soit

$$r = p_2 . \quad (8,4)$$

Dans le cas $c = r$ il existe une fonction $f(r; x, y_1, y_2)$ telle que

$$p_1 - rp_2 = f(r; x, y_1, y_2) . \quad (8,5)$$

Dans tous les trois cas chaque fonction k s'exprime par x, y_1, y_2, r .

Dans ce qui suit nous supposons que ξ, η_1, η_2 en (1,1) sont exprimés en fonctions de x, y_1, y_2, r , et leurs dérivées partielles sont à calculer dans cette hypothèse.

Or, ϱ , exprimé en fonction des variables latines, appartient évidemment à la classe des fonctions k . Il en résulte que ϱ peut être exprimé par x, y_1, y_2, r :

$$\varrho = \varrho(x, y_1, y_2, r) . \quad (8,6)$$

De même r s'exprime par $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$:

$$r = r(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) . \quad (8,7)$$

Dans les exemples I, II du No. 4 on a resp.: $r = p_1 + p_2$; $r = p_2$; et dans les exemples III—VI : $r = \frac{p_1}{p_2}$.

9. La fonction $r = r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$, définie par (8,3) au moyen d'une fonction arbitraire $c(x, y_1, y_2)$, ou bien par (8,5) au moyen d'une fonction arbitraire $f(r, x, y_1, y_2)$, ou bien par (8,4) comme p_2 , possède la propriété qu'en posant $r = c_0$ et en variant la constante c_0 , on obtienne un *champ de droites* dans le plan des p_1, p_2 . Les variables x, y_1, y_2 sont alors à considérer comme paramètres.

Or, il est facile de voir que, réciproquement, au champ le plus général de droites \mathfrak{F} du plan des p_1, p_2 , dépendant des paramètres x, y_1, y_2 , correspond une et une seule fonction $r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$, définie comme en haut, telle que le champ \mathfrak{F} consiste en les lignes de niveau de r .

En effet, soit

$$A(t)p_1 + B(t)p_2 = C(t) \quad (9,1)$$

l'équation de la droite générale de \mathfrak{F} , dont on obtient les droites individuelles pour les valeurs particulières de t .

Alors, si $A(t) \neq 0$, on peut supposer dès le commencement $A(t) \equiv 1$. Maintenant, si $B(t)$ ne dépend pas de t , posons $c = -B(t)$, alors

$$r = p_1 - cp_2 \quad (9,2)$$

est une fonction dont les lignes de niveau forment le champ \mathfrak{F} .

Si $B(t)$ dépend effectivement de t , posons $B(t) = -r$ et exprimons $C(t)$ par r :

$$C(t) = f(r, x, y_1, y_2) .$$

Alors l'équation générale des droites de \mathfrak{F} est

$$p_1 - r p_2 = f(r, x, y_1, y_2) . \quad (9,3)$$

Donc \mathfrak{F} est l'ensemble des lignes de niveau de la fonction r tirée de (9,3).

Si enfin $A(t) = 0$, l'équation (9,1) se réduit à

$$p_2 = \frac{C(t)}{B(t)} = r ;$$

donc \mathfrak{F} consiste, dans ce cas aussi, en les lignes de niveau de la fonction $r = p_2$.

10. Supposons de l'autre côté que la fonction $F(p_1, p_2)$ soit une fonction générale dont les lignes de niveau sont des droites. Alors, l'inclinaison de la tangente le long d'une ligne de niveau $F(p_1, p_2) = c$ étant constante, F'_{p_1}/F'_{p_2} doit être une fonction de F :

$$\frac{F'_{p_1}}{F'_{p_2}} = \varphi(F) ;$$

donc, en écrivant que le Jacobien des deux fonctions F et $\frac{F'_{p_1}}{F'_{p_2}}$ est 0 :

$$F'^2_{p_2} F''_{p_1 p_1} - 2F'_{p_1} F'_{p_2} F''_{p_1 p_2} + F'^2_{p_1} F''_{p_2 p_2} = 0 \quad ^3) . \quad (10,1)$$

11. En interprétant p_1, p_2 comme des grandeurs caractéristiques d'un élément de ligne issu du point $P(x, y_1, y_2)$, on a une relation linéaire entre p_1 et p_2 pour $r = \text{const.}$, donc un élément de surface passant par x, y_1, y_2 . Un ensemble de ∞^4 éléments de surface, tel que par chaque point général de l'espace passent ∞^1 éléments de surface de cet ensemble, sera appelé dans la suite un *champ d'éléments de surface*.

La fonction $r(p_1, p_2, x, y_1, y_2)$ fait correspondre à chaque point P de l'espace S des (x, y_1, y_2) à trois dimensions, ∞^1 éléments de surface passant par P , caractérisés par la valeur de r . L'ensemble de ces ∞^1 éléments de surface forme donc un champ D d'éléments de surface. Le fait analogue étant exact pour l'espace Σ des (ξ, η_1, η_2) , on voit donc que notre transformation est une transformation entre les deux champs D et Δ d'éléments de surface, ainsi définis au moyen des deux fonctions r et ρ .

Le champ D peut être caractérisé dans les trois cas considérés au No. 8, comme l'ensemble des éléments de surface appartenant à une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre.

³⁾ Dans notre discussion est évidemment contenue la détermination de l'intégrale générale de l'équation (10,1).

Dans le cas I, où la fonction r est donnée par (8,5), les éléments de ligne passant par $P(x, y_1, y_2)$ et correspondant à un r fixe, satisfont à la relation

$$dy_1 - r dy_2 - f(r, x, y_1, y_2) dx = 0, \quad (11,1; I)$$

et sont donc situés sur l'élément de surface passant par P et dont les coordonnées de direction p, q ont les valeurs

$$p = \frac{\partial y_1}{\partial x} = f(r, x, y_1, y_2) \quad , \quad q = \frac{\partial y_1}{\partial y_2} = r \quad .$$

Ces éléments de surface appartiennent à l'équation différentielle aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = f\left(\frac{\partial y_1}{\partial y_2}, y_1, y_2, x\right) . \quad (I)$$

Dans le cas II, où r est donné par (8,3), on a pour une valeur fixe de r l'élément de surface

$$dy_1 - c(x, y_1, y_2) dy_2 - r dx = 0 \quad (11,1; II)$$

aux coordonnées de direction

$$p = \frac{\partial y_1}{\partial x} = r \quad , \quad q = \frac{\partial y_1}{\partial y_2} = c(x, y_1, y_2) \quad .$$

L'équation différentielle aux dérivées partielles correspondante est

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = c(x, y_1, y_2) . \quad (II)$$

Dans ce cas, les ∞^1 éléments de surface passant par un point P tournent autour d'un axe orthogonal à l'axe des x , mais non parallèle à l'axe des y_1 .

Enfin, dans le cas III, où r est donné par (8,4), l'élément de surface correspondant à un r fixe, est donné par

$$dy_2 - r dx = 0 . \quad (11,1; III)$$

Ces éléments de surface sont tous parallèles à l'axe des y_1 . Dans l'équation différentielle correspondante on prendra y_2 comme fonction de x et y_1 , et l'on aura

$$\frac{\partial y_2}{\partial y_1} = 0 . \quad (III)$$

Il est évident qu'en permutant les variables x, y_1, y_2 convenablement, chacun des cas II, III se réduit au cas I.

On peut aussi caractériser les éléments de surface au moyen des cosinus directeurs de la normale :

$$\alpha = \cos(n, x), \quad \beta = \cos(n, y_1), \quad \gamma = \cos(n, y_2), \quad (11,2)$$

de sorte que l'on ait

$$p : q : -1 = \alpha : \gamma : \beta, \quad p = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad q = -\frac{\gamma}{\beta}. \quad (11,3)$$

On obtient alors dans les cas I, II, III resp. pour les champs d'éléments de surface correspondant à ces cas :

$$\text{I} \quad \frac{\alpha}{\beta} = -f\left(-\frac{\gamma}{\beta}, x, y_1, y_2\right), \quad \beta \neq 0 ;$$

$$\text{II} \quad \frac{\gamma}{\beta} = -c(x, y_1, y_2), \quad \beta \neq 0 ;$$

$$\text{III} \quad \beta = 0 .$$

Les équations différentielles correspondant aux exemples I, II, III du No. 4 sont :

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = -1 ; \quad \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = 0 ; \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 .$$

Relevons enfin qu'une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes

$$F\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y, z\right) = 0 \quad (11,4)$$

peut toujours être réduite à une des formes (I), (II), (III).

Si F contient $\frac{\partial z}{\partial x}$, (11,4) équivaut à (I). Si F ne contient que $\frac{\partial z}{\partial y}$, (11,4) se réduit à (II). Enfin (III) est le cas limite de (II) pour $c = \infty$.

Notre transformation R correspond donc à une transformation d'une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre dans S en une équation analogue dans Σ .

Nous verrons au § 10 que notre transformation entre D et Δ s'obtient au moyen d'une transformation de contact, faisant correspondre les deux équations différentielles en question l'une à l'autre.

Les champs d'éléments de surface correspondant aux équations *linéaires* jouent dans la suite un rôle particulier. Ces champs sont carac-

térisés par le fait que leurs éléments de surface passant par un point général P tournent autour d'un élément de ligne — l'axe du champ dans P . Un tel champ d'éléments de surface sera appelé *linéaire*.

Aux cas des types II et III correspondent toujours des champs linéaires. Quant au type I, la condition nécessaire et suffisante pour que le champ correspondant soit linéaire, est que f soit un polynôme en r , au plus linéaire.

En désignant les cosinus directeurs de l'axe l par

$$\alpha_0 = \cos(l, x), \quad \beta_0 = \cos(l, y_1), \quad \gamma_0 = \cos(l, y_2), \quad (11,5)$$

et en posant dans le cas I: $f(r, x, y_1, y_2) = A(x, y_1, y_2)r + B(x, y_1, y_2)$, on a pour les cosinus directeurs d'un élément de surface général du champ dans les cas I, II, III resp.:

$$(I) \quad \alpha + B\beta - A\gamma = 0, \quad (II) \quad c\beta + \gamma = 0, \quad (III) \quad \beta = 0, \quad (11,6)$$

done pour l'axe du champ:

$$\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 = \begin{cases} 1 : B : -A, & f = Ar + B & (I) \\ 0 : C : 1 & & (II) \\ 0 : 1 : 0 & & (III) \end{cases} \quad (11,7)$$

§ 3. Les formes adjointes et la réduction aux transformations ponctuelles en 4 variables

12. Posons

$$d\sigma = \begin{cases} d\eta_1 - \varrho d\eta_2 - \varphi d\xi & (I) \\ d\eta_1 - \gamma d\eta_2 - \varrho d\xi & (II) \\ d\eta_2 - \varrho d\xi & (III) \end{cases} \quad (12,1)$$

suivant que γ contient effectivement l'une des deux variables η_1, η_2 , en est indépendant, ou devient ∞ .

De même soit

$$ds = \begin{cases} dy_1 - r dy_2 - f dx & (I) \\ dy_1 - c dy_2 - r dx & (II) \\ dy_2 - r dx & (III) \end{cases} \quad (12,2)$$

suivant que c contient effectivement l'une des variables p_1, p_2 , en est indépendant, ou devient ∞ .

Les formes ds et $d\sigma$ seront appelées dans la suite la première et la seconde *forme adjointe correspondant à la transformation R* considérée. Nous distinguerons les formes adjointes des types I, II, III, suivant que la première, la deuxième ou la troisième des formules (12,1) respectivement (12,2) est valable.

En posant

$$d\sigma = \varepsilon d\eta_1 - \alpha d\eta_2 - \beta d\xi, \quad (12,3)$$

$$ds = \varepsilon dy_1 - a dy_2 - b dx, \quad (12,4)$$

il résulte de (6,2), (6,4), (7,1), (8,3), (8,4) et (8,5):

$$e p_1 = a p_2 + b, \quad (12,5)$$

$$\varepsilon \pi_1 = \alpha \pi_2 + \beta. \quad (12,6)$$

13. En utilisant les expressions de ξ , η_1 , η_2 par x , y_1 , y_2 , r , on remplacera les formules (5,2) par

$$\pi_\nu = \frac{\delta\eta_\nu + \eta'_{\nu r} w}{\delta\xi + \xi'_r w}; \quad w = r'_{p_1} z_1 + r'_{p_2} z_2. \quad (13,1)$$

Il en résulte pour $\beta = \varepsilon \pi_1 - \alpha \pi_2$:

$$\beta = \frac{(\varepsilon \delta\eta_1 - \alpha \delta\eta_2) + w(\varepsilon \eta'_{1r} - \alpha \eta'_{2r})}{\delta\xi + \xi'_r w}.$$

Or, β étant dans tous les cas indépendant de z_1 , z_2 , donc de w , il résulte

$$\beta \delta\xi + \alpha \delta\eta_2 = \varepsilon \delta\eta_1; \quad \beta \xi'_r + \alpha \eta'_{2r} = \varepsilon \eta'_{1r}. \quad (13,2)$$

Mais, d'après (5,1) et (12,5), pour $e = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \delta\xi &= (\xi'_x + b \xi'_{y_1}) + p_2 (\xi'_{y_2} + a \xi'_{y_1}) \\ \delta\eta_\nu &= (\eta'_{\nu x} + b \eta'_{\nu y_1}) + p_2 (\eta'_{\nu y_2} + a \eta'_{\nu y_1}), \quad \nu = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (13,3)$$

En introduisant ces valeurs dans la première des relations (13,2), on obtient:

$$\begin{aligned} & \{ \beta (\xi'_x + b \xi'_{y_1}) + \alpha (\eta'_{2x} + b \eta'_{2y_1}) - \varepsilon (\eta'_{1x} + b \eta'_{1y_1}) \} + \\ & + p_2 \{ \beta (\xi'_{y_2} + a \xi'_{y_1}) + \alpha (\eta'_{2y_2} + a \eta'_{2y_1}) - \varepsilon (\eta'_{1y_2} + a \eta'_{1y_1}) \} = 0. \end{aligned}$$

Or, les expressions entre parenthèses étant indépendantes de p_2 , cette relation se décompose en deux, que nous écrivons avec la deuxième des équations (13,2):

$$\left. \begin{aligned} \beta(\xi'_x + b\xi'_{y_1}) + \alpha(\eta'_{2x} + b\eta'_{2v_1}) &= \varepsilon(\eta'_{1x} + b\eta'_{1v_1}) , \\ \beta(\xi'_{y_2} + a\xi'_{y_1}) + \alpha(\eta'_{2v_2} + a\eta'_{2v_1}) &= \varepsilon(\eta'_{1v_2} + a\eta'_{1v_1}) , \\ \beta\xi'_{r'} + \alpha\eta'_{2r} &= \varepsilon\eta'_{1r} . \end{aligned} \right\} \quad (13,4)$$

Multiplions ces 3 équations respectivement par dx , dy_2 , dr et faisons la somme; on obtient

$$\beta(d\xi - \xi'_{v_1} ds) + \alpha(d\eta_2 - \eta'_{2v_1} ds) - \varepsilon(d\eta_1 - \eta'_{1v_1} ds) = 0 ,$$

$$d\sigma = \mu ds , \quad (13,5)$$

$$\mu = \varepsilon\eta'_{1v_1} - \alpha\eta'_{2v_1} - \beta\xi'_{y_1} . \quad (13,6)$$

La formule (13,6) s'obtient du reste immédiatement de (13,5), en y comparant des deux côtés les coefficients de dy_1 . Pour $e = 0$ on obtient les relations correspondant à (13,3) en permutant les indices 1 et 2 et en posant $a = 0$. Les formules correspondant aux équations (13,4) s'obtiennent de la même façon, et l'on arrive dans ce cas aussi aux formules (13,5) et (13,6).

14. Nous pouvons maintenant formuler le résultat suivant:

Théorème I. Les substitutions σ et s d'une transformation R s'obtiennent à partir d'une transformation ponctuelle de l'espace à 4 dimensions :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(x, y_1, y_2, r) ; & \varrho &= \varrho(x, y_1, y_2, r) ; \\ \eta_1 &= \eta_1(x, y_1, y_2, r) ; & \eta_2 &= \eta_2(x, y_1, y_2, r) , \end{aligned} \right\} \quad (14,1)$$

et de son inverse

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) ; & r &= r(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) ; \\ y_1 &= y_1(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) ; & y_2 &= y_2(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho) ; \end{aligned} \right\} \quad (14,2)$$

satisfaisant à l'équation (13,5), en y remplaçant r et ϱ par les expressions tirées suivant le cas, la première d'une des équations

$$p_1 - rp_2 = f(r, y_1, y_2, x), \quad r = p_1 - c(x, y_1, y_2) p_2, \quad r = p_2, \quad (14,3)$$

et la seconde d'une des équations

$$\pi_1 - \varrho\pi_2 = \varphi(\varrho, \eta_1, \eta_2, \xi), \quad \varrho = \pi_1 - \gamma(\xi, \eta_1, \eta_2)\pi_2, \quad \varrho = \pi_2. \quad (14,4)$$

Chaque couple des substitutions σ, s obtenu de cette façon, appartient à une transformation R . — Nous avons encore à démontrer la dernière assertion de ce théorème.

Supposons en effet que, étant donné un couple de deux fonctions arbitraires:

$$\begin{aligned} f = f(r, y_1, y_2, x) \quad \text{ou} \quad c = c(x, y_1, y_2) \quad \text{ou} \quad c = \infty; \\ \varphi = \varphi(\varrho, \eta_1, \eta_2, \xi) \quad \text{ou} \quad \gamma = \gamma(\xi, \eta_1, \eta_2) \quad \text{ou} \quad \gamma = \infty, \end{aligned}$$

la transformation ponctuelle (14,1), (14,2) satisfasse à la condition (13,5); alors je dis, qu'en remplaçant ϱ et r resp. par des fonctions de $\pi_1, \pi_2, \eta_1, \eta_2, \xi$ ou de p_1, p_2, y_1, y_2, x , tirées de (14,3) et (14,4), on obtient deux transformations σ, s , inverses l'une de l'autre.

En effet, supposons que y_1, y_2 soient deux fonctions indéterminées de x , et p_1, p_2 leurs dérivées premières. Alors la forme différentielle $edy_1 - ady_2 - bdx$ devient $(ep_1 - ap_2 - b)dx$, donc 0. Il en résulte que l'expression de gauche en (13,5) disparaît aussi. Donc on a

$$\pi_1 - \varrho\pi_2 = \varphi(\varrho) \quad \text{ou} \quad \pi_1 - \gamma\pi_2 = \varrho \quad \text{ou bien} \quad \pi_2 = \varrho,$$

et l'on a pour la grandeur ϱ obtenue de (14,1), la relation correspondante (14,4). Donc, d'après (14,2), x, y_1, y_2 s'expriment par $\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2$; et, le même raisonnement étant applicable à partir de la transformation (14,2) et des fonctions η_1, η_2 de ξ , les hypothèses du No. 2 sont en effet satisfaites.

La transformation (14,1), (14,2), ainsi que les expressions r, ϱ , et les formes adjointes $ds, d\sigma$ sont évidemment, d'après notre discussion, univoquement déterminées par la transformation R donnée.

Quant à la question, dans quelle mesure la transformation (14,1), (14,2) et les formes adjointes $ds, d\sigma$ peuvent être choisies arbitrairement, nous nous en occuperons dans les §§ 4 et 5. Dans le § 4 nous montrerons que les deux formes $ds, d\sigma$ peuvent être choisies arbitrairement. Dans le § 5 nous établirons les conditions sous lesquelles une transformation ponctuelle de l'espace de 4 dimensions peut conduire, au sens du théorème I, à une transformation R .

Dans le cas, où dans une forme adjointe ds le coefficient b est linéaire et entier en r , c'est-à-dire correspond à un champ linéaire d'éléments de surface et à une équation différentielle linéaire, nous parlons d'une forme adjointe *axiale*, et les axes du champ correspondant d'éléments de surface sont aussi appelées les *axes de ds*.

Voici les formes $ds, d\sigma$ correspondant aux exemples I, II et III—VI du No. 4:

$$ds = dy_1 + dy_2 - r dx, \quad d\sigma = d\eta_1 - \varrho d\eta_2, \quad (\text{I})$$

$$ds = dy_2 - r dx, \quad d\sigma = d\eta_2 - \varrho d\xi, \quad (\text{II})$$

$$ds = dy_1 - r dy_2, \quad d\sigma = d\eta_1 - \varrho d\eta_2. \quad (\text{III—VI})$$

15. Considérons parallèlement à la transformation $R, \sigma, (1,1)$, satisfaisant à la condition (13,5), une transformation R, S , appliquée aux variables ξ, η_ν, π_ν :

$$\begin{aligned} X &= X(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2) \\ Y_\mu &= Y_\mu(\xi, \eta_1, \eta_2, \pi_1, \pi_2), \quad \mu = 1, 2, \end{aligned} \quad (15,1)$$

et satisfaisant à la condition

$$dS = \mu_1 d\sigma_1 \quad (15,2)$$

analogue à (13,5).

Formons le „produit“ $S\sigma$ en substituant dans (15,1) les valeurs (1,1) et (1,2). Sous quelle condition la transformation résultante sera-t-elle aussi une transformation R ?

Tout d'abord les expressions de gauche en (15,1) devraient posséder la propriété de devenir indépendantes de z_1, z_2 quand on y exprime les arguments ξ, \dots, π_2 par $x, y_1, y_2, p_1, p_2, z_1, z_2$. Mais alors, ces fonctions sont des fonctions du type des fonctions κ , considérées au No. 5, et sont exprimables en fonction de 4 arguments $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$, où ϱ est la fonction définie pour la transformation σ . On a donc

$$d\sigma_1 = d\sigma, \quad (15,3)$$

et la transformation $S\sigma$ satisfait à la relation

$$dS = \mu_1 \mu d\sigma. \quad (15,4)$$

16. Il résulte de (15,3) en particulier, que le produit σ^2 d'une transformation σ par elle-même ne peut être une transformation R que si l'on a

$$\varrho = r(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2). \quad (16,1)$$

Une transformation de ce type, pour laquelle les 2 formes adjointes s'expriment de la même façon au moyen des variables et des différentielles correspondantes, sera appelée *symétrique*.

Il résulte maintenant de (15,3) que toutes les transformations R

formant un groupe donné, sont des transformations symétriques avec la même forme adjointe. Les transformations ponctuelles en 4 variables, correspondant aux transformations R d'un groupe, possèdent alors leur forme adjointe comme un invariant relatif.

S'il s'agit en particulier de la forme adjointe

$$dy_1 = p_1 dx, \quad r = p_1, \quad \varrho = \pi_1, \quad (16,2)$$

les transformations R correspondantes se réduisent évidemment aux transformations de contact au sens de Lie, dans le plan des x, y_1 , en y adjoignant une transformation de la forme

$$\eta_2 = F(x, y_1, y_2, p_1). \quad (16,3)$$

Si deux formes adjointes $d\sigma, ds$ se correspondent par des transformations σ, s , du type (14,1), (14,2), elles sont *équivalentes*.

Soit maintenant S une transformation générale du type (14,1), qui possède $d\sigma$ comme un invariant relatif. Alors on obtient évidemment la transformation générale possédant ds comme un invariant relatif, dans la forme

$$\sigma S \sigma^{-1}.$$

Les groupes de transformations appartenant aux formes adjointes équivalentes sont isomorphes. Or, *toutes les formes adjointes sont équivalentes entre elles*, comme nous le montrerons au § 4. Il en résulte que les groupes de transformations R appartenant à une forme adjointe $d\sigma$, sont isomorphes aux groupes appartenant à la forme adjointe (16,2), qu'on obtient de la théorie des transformations de contact du plan.

§ 4. Equivalence des formes adjointes

17. Nous allons d'abord dire quelques mots sur l'*équivalence de deux formes adjointes par rapport à une transformation ponctuelle en trois variables*. Soit donnée une forme adjointe dans Σ :

$$d\sigma = d\eta_1 - \alpha d\eta_2 - \beta d\xi. \quad (17,1)$$

Considérons une transformation ponctuelle entre S et Σ :

$$\left. \begin{aligned} x &= x(\xi, \eta_\mu), & y_\nu &= y_\nu(\xi, \eta_\mu), \\ \xi &= \xi(x, y_\nu), & \eta_\mu &= \eta_\mu(x, y_\nu), \end{aligned} \right\} \mu, \nu = 1, 2. \quad (17,2)$$

$d\sigma$ devient par cette transformation:

$$d\sigma = \mu ds = \mu(dy_1 - ady_2 - bdx), \quad (17,3)$$

où l'on a, en exprimant les différentielles des variables grecques par celles des variables latines :

$$-a = \frac{\eta'_{1v_2} - \alpha \eta'_{2v_2} - \beta \xi'_{v_2}}{\eta'_{1v_1} - \alpha \eta'_{2v_1} - \beta \xi'_{v_1}}, \quad -b = \frac{\eta'_{1x} - \alpha \eta'_{2x} - \beta \xi'_x}{\eta'_{1v_1} - \alpha \eta'_{2v_1} - \beta \xi'_{v_1}}, \quad (17,4)$$

si

$$\eta'_{1v_1} - \alpha \eta'_{2v_1} - \beta \xi'_{v_1} \neq 0. \quad (17,5)$$

18. On voit facilement dans l'hypothèse (17,5) que l'une au moins des expressions a , b dépend effectivement de ϱ . En effet, s'il en était autrement, on pourrait écrire :

$$\left. \begin{aligned} \eta'_{1x} - \alpha \eta'_{2x} - \beta \xi'_x &= a_0 \varrho_0, \\ \eta'_{1v_1} - \alpha \eta'_{2v_1} - \beta \xi'_{v_1} &= a_1 \varrho_0, \\ \eta'_{1v_2} - \alpha \eta'_{2v_2} - \beta \xi'_{v_2} &= a_2 \varrho_0, \end{aligned} \right\} \quad (18,1)$$

où a_0 , a_1 , a_2 ne dépendent que de x , y_1 , y_2 .

Donc, le Jacobien de ξ , η_1 , η_2 en (17,2) par rapport à x , y_1 , y_2 étant $\neq 0$, les trois expressions $\frac{1}{\varrho_0}$, $\frac{\alpha}{\varrho_0}$, $\frac{\beta}{\varrho_0}$ s'exprimeraient par x , y_1 , y_2 , donc aussi par ξ , η_1 , η_2 . Mais alors il en serait de même pour α et β , tandis que l'une de ces deux grandeurs est toujours égale à ϱ . —

Mais alors, si a dépend effectivement de ϱ , on posera $r = a$, $b = f(r, x, y_1, y_2)$. Et si a ne dépend pas de ϱ , on posera $a = c$, $b = r$, et ds pourra s'écrire dans l'une des deux formes (12,2).

Si, enfin, (17,5) n'est pas valable :

$$\eta'_{1v_1} - \alpha \eta'_{2v_1} - \beta \xi'_{v_1} = 0, \quad (18,2)$$

l'équation

$$\eta'_{1v_2} - \alpha \eta'_{2v_2} - \beta \xi'_{v_2} = 0 \quad (18,3)$$

est assurément impossible. En effet, dans le cas contraire, les deux équations (18,2) et (18,3) seraient compatibles, tandis que α et β ne sont pas assurément toutes les deux, exprimables par x , y_1 , y_2 . Donc, l'une de ces deux équations serait conséquence de l'autre, et le Jacobien de ξ , η_1 , η_2 par rapport à x , y_1 , y_2 serait 0. — On peut donc écrire

$$d\sigma = (\eta'_{1v_2} - \alpha \eta'_{2v_2} - \beta \xi'_{v_2}) (dy_2 - Ddx), \quad (18,4)$$

où

$$-D = \frac{\eta'_{1x} - \alpha \eta'_{2x} - \beta \xi'_x}{\eta'_{1v_2} - \alpha \eta'_{2v_2} - \beta \xi'_{v_2}} \quad (18,5)$$

n'est pas indépendant de ϱ ; en effet, dans le cas contraire, on aurait encore les trois équations (18,1) avec $a_1 = 0$, et le même raisonnement serait applicable. On peut donc poser $r = D$, un cas qui se ramène au cas $a = c$, $b = r$ en interchangeant les variables y_1, y_2 ; ds a alors la troisième des formes (12,2).

On voit donc que, étant donnée une transformation ponctuelle (17,2) et une forme adjointe (17,1), il existe une fonction

$$r = r(\xi, \eta_\mu, \varrho) \quad (18,6)$$

telle qu'en adjoignant (18,6) aux expressions (17,2) de x et y_ν , on obtienne une transformation de l'espace $(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)$ dans l'espace (x, y_1, y_2, r) , satisfaisant à la condition (17,3). a, b et la fonction (18,6) sont alors univoquement déterminées par (17,1) et (17,2).

19. Supposons maintenant qu'on ait en particulier $\alpha = 0$, $\beta = \varrho$, un cas qui se ramène, comme nous l'avons dit plus haut, aux transformations de contact du plan.

On obtient alors pour $-a, -b$ les expressions

$$-a = \frac{\eta'_{1y_2} - \varrho \xi'_{y_2}}{\eta'_{1y_1} - \varrho \xi'_{y_1}}, \quad -b = \frac{\eta'_{1x} - \varrho \xi'_x}{\eta'_{1y_1} - \varrho \xi'_{y_1}}, \quad (19,1)$$

en supposant que η'_{1y_1}, ξ'_{y_1} ne deviennent pas 0 tous les deux.

Supposons que a contienne effectivement ϱ . On a alors un ds du type I:

$$r = a; \quad f(r, x, y_1, y_2) = b = kr + l, \quad (19,2)$$

où k et l s'obtiennent en résolvant les équations

$$\left. \begin{aligned} k \eta'_{1y_2} - l \eta'_{1y_1} - \eta'_{1x} &= 0, \\ k \xi'_{y_2} - l \xi'_{y_1} - \xi'_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19,3)$$

Or, je dis qu'on peut faire k et l égales à deux fonctions arbitraires de x, y_1, y_2 en choisissant convenablement la transformation (17,2). Il suffit en effet de déterminer η_1 et ξ de manière à satisfaire (19,3), c'est-à-dire de prendre pour ξ, η_1 deux intégrales indépendantes de l'équation aux dérivées partielles

$$z'_x + l z'_{y_1} - k z'_{y_2} = 0, \quad (19,4)$$

qu'on obtient à partir de deux équations différentielles

$$\frac{dy_1}{dx} = -l(x, y_1, y_2) \quad , \quad \frac{dy_2}{dx} = -k(x, y_1, y_2) \quad , \quad (19,5)$$

en exprimant les deux constantes c_1, c_2 dont dépend l'intégrale générale de (19,5), en fonctions de x, y_1, y_2 :

$$c_\nu = z_\nu(x, y_1, y_2) \quad , \quad \nu = 1, 2 \quad . \quad (19,6)$$

En posant

$$z_1 = \eta_1 \quad , \quad z_2 = \xi \quad ,$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} \eta'_{1y_1} & \eta'_{1y_2} \\ \xi'_{y_1} & \xi'_{y_2} \end{vmatrix}$$

ne sera pas identiquement 0, y_1, y_2 étant exprimables par x, z_1, z_2 . Donc, a dépend effectivement de ρ , et notre assertion est démontrée.

De l'autre côté, une forme adjointe du type II en (12,2) se réduit, en permutant y_2 et x , à une forme adjointe du type I, dans laquelle b est indépendant de r . Donc chaque forme adjointe du type II est équivalente à $d\eta_1 - \rho d\xi$. Et, quant à la forme adjointe $dy_2 - r dx$, elle se réduit évidemment à $d\eta_1 - \rho d\xi$, en posant

$$\eta_1 = y_2 \quad , \quad \eta_2 = y_1 \quad , \quad \xi = x \quad .$$

Donc :

Théorème II. Pour qu'une forme adjointe ds soit équivalente, par une transformation ponctuelle, à $dy_1 - r dx$, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit axiale.

En particulier, toutes les formes axiales sont équivalentes entre elles par des transformations ponctuelles. — D'ailleurs notre résultat est presque immédiat en termes des équations linéaires correspondantes. Il se réduit à ce que deux équations *linéaires* aux dérivées partielles sont toujours équivalentes par des transformations ponctuelles. En effet, si, dans le cas de trois variables par exemple, $f_1 = c, f_2 = c$ sont deux intégrales indépendantes de la première équation, $F_1 = c, F_2 = c$ deux intégrales indépendantes de la seconde, il suffit de considérer une transformation ponctuelle par laquelle f_1, f_2 deviennent F_1, F_2 .

20. Nous allons maintenant démontrer le théorème annoncé à la fin du No. 16 :

Théorème III : Soient

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= \varepsilon d\eta_1 - \alpha d\eta_2 - \beta d\xi \\ ds &= e dy_1 - a dy_2 - b dx \end{aligned} \right\} \quad (20,1)$$

deux formes adjointes. Il existe toujours une transformation R entre les espaces Σ et S , satisfaisant à la condition (13,5).

Démonstration: Il suffit de considérer le cas où $d\sigma$ se réduit à la forme $d\eta_2 - \rho d\xi$. On a alors à satisfaire à la condition

$$d\eta_2 - \rho d\xi = \mu(edy_1 - ady_2 - bdx). \quad (20,2)$$

On peut évidemment supposer $e = 1$, puisque dans le cas contraire ds se réduit à $dy_2 - rdx$ et il suffirait de prendre la transformation identique. Alors (20,2) se réduit à

$$\begin{aligned} \eta'_{2r} - \rho \xi'_r &= 0 & , & & \eta'_{2y_1} - \rho \xi'_{y_1} &= \mu & , \\ \eta'_{2y_2} - \rho \xi'_{y_2} &= -\mu a & , & & \eta'_{2x} - \rho \xi'_x &= -\mu b & , \end{aligned}$$

ou bien, en éliminant μ :

$$\left. \begin{aligned} \eta'_{2r} - \rho \xi'_r &= 0 & , \\ (\eta'_{2y_2} + a \eta'_{2y_1}) - \rho (\xi'_{y_2} + a \xi'_{y_1}) &= 0 & , \\ (\eta'_{2x} + b \eta'_{2y_1}) - \rho (\xi'_x + b \xi'_{y_1}) &= 0 & . \end{aligned} \right\} \quad (20,3)$$

Mais si η'_{2r} et ξ'_r ne sont pas tous les deux 0, il résulte de (20,3) l'existence de deux fonctions λ , κ , telles que le système des deux équations différentielles

$$\begin{aligned} z'_{y_2} + a z'_{y_1} - \lambda z'_r &= 0 & , \\ z'_x + b z'_{y_1} - \kappa z'_r &= 0 \end{aligned} \quad (20,4)$$

soit satisfait pour $z = \eta_2$ et pour $z = \xi$.

21. De l'autre côté, si le système (20,4) possède deux intégrales indépendantes, on aura, en les désignant par η_2 , ξ , les relations (20,3), où ρ est une fonction de x , y_1 , y_2 , r .

En effet, le système

$$z'_r = 0, \quad z'_{y_2} + a z'_{y_1} = 0, \quad z'_x + b z'_{y_1} = 0 \quad (21,1)$$

n'est pas complet, puisqu'en combinant la première équation (21,1) avec la deuxième et la troisième, on obtient $a'_r z'_{y_1} = 0$, $b'_r z'_{y_1} = 0$, donc, l'une des deux fonctions a , b étant $= r$, la relation

$$z'_{y_1} = 0, \quad (21,2)$$

qui n'est pas une combinaison linéaire de (21,1). Donc, puisque ξ n'est pas constant, l'une au moins des expressions en (21,1) ne s'annule pas pour $z = \xi$, et l'on obtient une expression finie pour ρ .

Il suffit donc de démontrer qu'en choisissant convenablement λ et κ , le système (20,4) possède au moins deux intégrales indépendantes.

22. Posons

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y_2} + a \frac{\partial}{\partial y_1} - \lambda \frac{\partial}{\partial r} ,$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y_1} - \kappa \frac{\partial}{\partial r} .$$

Alors on a

$$\begin{aligned} X_1 X_2 - X_2 X_1 = & (b'_{y_2} - a'_x + a b'_{y_1} - b a'_{y_1} - \lambda b'_r + \kappa a'_r) \frac{\partial}{\partial y_1} + \\ & + (\lambda \kappa'_r - \kappa \lambda'_r + \lambda'_x - \kappa'_{y_2} + b \lambda'_{y_1} - a \kappa'_{y_1}) \frac{\partial}{\partial r} . \end{aligned}$$

Or, supposons que les coefficients de $\frac{\partial}{\partial y_1}$ et $\frac{\partial}{\partial r}$ soient ici identiquement 0. Alors le système (20,4) est *complet* et possède en effet $4 - 2 = 2$ intégrales indépendantes. Il suffit donc de choisir λ et κ de manière à satisfaire aux deux équations différentielles

$$\kappa a'_r - \lambda b'_r + b'_{y_2} - a'_x + a b'_{y_1} - b a'_{y_1} = 0 , \quad (22,2)$$

$$\lambda \kappa'_r - \kappa \lambda'_r + \lambda'_x - \kappa'_{y_2} + b \lambda'_{y_1} - a \kappa'_{y_1} = 0 . \quad (22,3)$$

On considérera ici deux cas, suivant que $a = r$ ou $b = r$. Dans le *premier* cas il résulte de (22,2).

$$\kappa = \lambda f'_r - f'_{y_2} - r f'_{y_1} . \quad (22,4)$$

En introduisant cette valeur dans (22,3), on obtient

$$\begin{aligned} \lambda^2 f''_{rr} - 2 \lambda f''_{r y_2} - 2 \lambda r f''_{r y_1} - \lambda f'_{y_1} + \lambda'_r (f'_{y_2} + r f'_{y_1}) + \lambda'_{y_1} (f - r f'_r) - \lambda'_{y_2} f'_r + \\ + \lambda'_x + f''_{y_2 y_2} + 2 r f''_{y_1 y_2} + r^2 f''_{y_1 y_1} = 0 . \end{aligned} \quad (22,5)$$

Il suffit donc de prendre pour λ une solution de (22,5) et d'en déduire la valeur de κ par (22,4).

23. Dans le second cas où $b = r$, $a = c(x, y_1, y_2)$, on permutera dans les équations (22,2), (22,3) λ et κ , a et b , y_2 et x , c'est-à-dire les deux équations (20,4). On obtient donc dans ce cas un résultat correspondant

au précédent en effectuant les mêmes permutations dans (22,4) et (22,5), et en y remplaçant f par $c(x, y_1, y_2)$.

Donc, on peut toujours choisir λ et κ de façon à satisfaire (22,2) et (22,3).

Nous avons encore à montrer que la fonction ϱ déduite de (20,3) est indépendante de ξ et η_2 . Or, soient u, v deux fonctions de r, x, y_1, y_2 formant avec ξ et η_2 quatre fonctions indépendantes. En introduisant ξ, η_2, u, v comme nouvelles variables indépendantes, les équations (21,1) déviennent

$$X_\nu(z) \equiv \gamma_\nu z'_u + \delta_\nu z'_v + \lambda_\nu z'_\xi + \kappa_\nu z'_{\eta_2} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3 \quad (23,1)$$

et il résulte de (20,3):

$$\varrho = \frac{\kappa_\nu}{\lambda_\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3,$$

où tous les κ_ν, λ_ν ne s'annulent pas, puisque dans le cas contraire les X_ν , donc aussi les équations (21,1) ne seraient pas linéairement indépendantes.

Mais alors les équations $X_\nu = 0$ sont des combinaisons linéaires des équations

$$z'_u = 0, \quad z'_v = 0, \quad z'_\xi + \varrho z'_{\eta_2} = 0, \quad (23,2)$$

les équations (23,2) sont donc équivalentes aux équations (21,1), et le système (23,2) n'est pas complet. Donc ϱ ne peut s'exprimer par ξ et η_2 seuls, puisque, si ϱ était indépendant de u et v , le système (23,2) serait évidemment complet.

Le théorème III est démontré.

Une autre démonstration du théorème III résultera des considérations du § 10.

§ 5. Equations différentielles pour ξ, η_1, η_2

24. Quelles conditions doivent être remplies par les fonctions ξ, η_1, η_2 dans (1,1), pour que cette transformation soit une transformation R ?

Tout d'abord, ces trois fonctions, comme fonctions de p_1, p_2 , doivent être exprimables par l'une d'elles. Donc le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \xi'_{p_1} & \eta'_1{}_{p_1} & \eta'_2{}_{p_1} \\ \xi'_{p_2} & \eta'_1{}_{p_2} & \eta'_2{}_{p_2} \end{pmatrix} \quad (24,1)$$

doit être égal à 1. En plus, les lignes de niveau de chacune de ces fonctions dans le plan des p_1, p_2 doivent être des droites. Donc chacune de ces 3 fonctions satisfait à l'équation (10,1).

De l'autre côté, si ces conditions sont satisfaites, il existe d'après le No. 9, une fonction $r = r(p_1, p_2, y_1, y_2, x)$ définie par (8,3), (8,4) ou (8,5), telle que ξ, η_1, η_2 soient exprimables par r, x, y_1, y_2 .

Nous supposons donc que les fonctions ξ, η_1, η_2 soient données dans la forme

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi(r, x, y_1, y_2), \\ \eta_1 &= \eta_1(r, x, y_1, y_2), \\ \eta_2 &= \eta_2(r, x, y_1, y_2). \end{aligned} \right\} \quad (24,2)$$

Nous allons maintenant déduire les conditions sous lesquelles, en ajoutant aux fonctions (24,2) une quatrième fonction $\varrho = \varrho(r, x, y_1, y_2)$ convenablement choisie, on obtient une transformation satisfaisant à la condition (13,5) avec la forme adjointe ds donnée.

En comparant les coefficients de dr, dy_1, dy_2, dx des deux côtés de (13,5) on obtient

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon \eta'_{1r} - \alpha \eta'_{2r} - \beta \xi'_r &= 0, \\ \varepsilon \eta'_{1y_1} - \alpha \eta'_{2y_1} - \beta \xi'_{y_1} - e\mu &= 0, \\ \varepsilon \eta'_{1y_2} - \alpha \eta'_{2y_2} - \beta \xi'_{y_2} + a\mu &= 0, \\ \varepsilon \eta'_{1x} - \alpha \eta'_{2x} - \beta \xi'_x + b\mu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24,3)$$

Donc, une des quantités α, β étant $= \varrho$ et $\neq 0$, on a comme *première condition nécessaire* pour ξ, η_1, η_2 :

$$\begin{vmatrix} \xi'_r & \eta'_{1r} & \eta'_{2r} & 0 \\ \xi'_{y_1} & \eta'_{1y_1} & \eta'_{2y_1} & -e \\ \xi'_{y_2} & \eta'_{1y_2} & \eta'_{2y_2} & a \\ \xi'_x & \eta'_{1x} & \eta'_{2x} & b \end{vmatrix} = 0. \quad (24,4)$$

Dès que la condition (24,4) est satisfaite pour trois fonctions indépendantes ξ, η_1, η_2 , les rapports de $\varepsilon, \alpha, \beta$ en (24,3) sont univoquement déterminés. Il résulte alors de la comparaison de (12,3) et (12,1) comme *seconde condition nécessaire*, que l'un au moins des trois rapports $\frac{\alpha}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\alpha}$ est indépendant de ξ, η_1, η_2 (donc en particulier est $\neq 0, \neq \infty$).

25. Or il est facile de montrer que, si les trois fonctions ξ, η_1, η_2 de r, x, y_1, y_2 sont indépendantes et satisfont aux conditions déduites au No. précédent, on peut leur adjoindre une quatrième fonction $\varrho =$

$\varrho(r, x, y_1, y_2)$ indépendante de ξ, η_1, η_2 , telle que (13,3) soit satisfait. — On suppose naturellement que a et b soient choisis conformément à (12,2).

En effet, supposons d'abord qu'en résolvant (24,3), on ait $\varepsilon \neq 0$. On pourra alors supposer $\varepsilon = 1$. Or, si alors α est indépendant de ξ, η_1, η_2 comme fonctions de r, x, y_1, y_2 , on posera

$$\varrho = \varrho(r, x, y_1, y_2) = \alpha(r, x, y_1, y_2)$$

et exprimera β par $\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2$:

$$\beta(r, x, y_1, y_2) = \varphi(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2) ;$$

$d\sigma$ aura alors la première des formes (12,1).

De l'autre côté, si α est exprimable par ξ, η_1, η_2 , mais β en est indépendant, on posera

$$\alpha = \gamma(\xi, \eta_1, \eta_2), \quad \beta = \varrho,$$

et $d\sigma$ aura la deuxième des formes (12,1).

Supposons maintenant qu'on ait $\varepsilon = 0$. Alors, d'après nos hypothèses, le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est $\neq 0, \neq \infty$. On pourra donc poser $\alpha = 1, -\beta = \varrho = \varrho(x, y_1, y_2, r)$, où ϱ sera indépendant de ξ, η_1, η_2 . L'équation (13,5) est alors vérifiée en prenant pour $d\sigma$ la troisième des formes différentielles (12,1).

26. Nous arrivons au résultat:

Théorème IV : Une forme adjointe ds en r, x, y_1, y_2 étant donnée ; pour qu'aux trois fonctions indépendantes (24,2) puisse être adjointe une quatrième fonction $\varrho = \varrho(r, x, y_1, y_2)$, indépendante de ξ, η_1, η_2 , de manière à satisfaire à une condition (13,5), il est nécessaire et suffisant que ξ, η_1, η_2 satisfassent à (24,4) et que l'un au moins des rapports des $\varepsilon, \alpha, \beta$, tirés de (24,3), soit indépendant de ξ, η_1, η_2 .

Il est d'ailleurs facile de montrer que la condition (24,4), à elle seule, ne suffit pas pour assurer la validité du théorème III. Posons par exemple

$$ds = dy_1 - r dy_2 + dx, \quad e = 1, \quad a = r, \quad b = -1$$

et

$$\xi = r, \quad \eta_1 = x + y_1, \quad \eta_2 = y_2.$$

La relation (24,4) est vérifiée immédiatement, tandis qu'il est impossible de satisfaire à une condition (13,5). En effet, choisissons r conformément à la règle du théorème I. On obtient

$$r = \frac{1 + p_1}{p_2} = \frac{1 + \frac{dy_1}{dx}}{\frac{dy_2}{dx}} .$$

Mais alors on a

$$\xi = r = \frac{\frac{d(x + y_1)}{dx}}{\frac{dy_2}{dx}} = \frac{\frac{d\eta_1}{dx}}{\frac{d\eta_2}{dx}} = \frac{\frac{d\eta_1}{d\xi}}{\frac{d\eta_2}{d\xi}} ,$$

et les fonctions $\eta_1(\xi)$, $\eta_2(\xi)$ satisfont à l'équation différentielle

$$\xi \frac{d\eta_2}{d\xi} - \frac{d\eta_1}{d\xi} = 0 .$$

La transformation obtenue n'est donc certainement pas réversible.

27. De l'autre côté on peut se poser le problème, dans quelle mesure les fonctions x, y_1, y_2 de $\xi, \eta_1, \eta_2, \rho$ dans la transformation (14,2) peuvent être choisies arbitrairement.

En multipliant les 4 lignes du déterminant (24,4) resp. par

$$\frac{\partial r}{\partial \rho}, \frac{\partial y_1}{\partial \rho}, \frac{\partial y_2}{\partial \rho}, \frac{\partial x}{\partial \rho}$$

et en ajoutant trois lignes à la quatrième, on obtient les relations

$$\left(b \frac{\partial x}{\partial \rho} + a \frac{\partial y_2}{\partial \rho} - e \frac{\partial y_1}{\partial \rho} \right) \Delta_\nu = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, 4,$$

où les facteurs Δ_ν sont les 4 Jacobiens de ξ, η_1, η_2 par rapport aux variables r, y_1, y_2, x . Donc, ξ, η_1, η_2 étant indépendants, on obtient la relation

$$b \frac{\partial x}{\partial \rho} + a \frac{\partial y_2}{\partial \rho} - e \frac{\partial y_1}{\partial \rho} = 0, \quad (27,1)$$

équivalente à l'équation (24,4). Cette relation s'obtient du reste immédiatement de la relation (13,5), en y comparant les coefficients de $d\rho$ des deux côtés.

Supposons maintenant que ds et les trois fonctions x, y_1, y_2 de $\xi, \eta_1, \eta_2, \rho$ soient données. Alors, en remplaçant dans a, b les x, y_1, y_2 par leurs valeurs, la relation (27,1) permet *en général* de déterminer r en fonction de $\xi, \eta_1, \eta_2, \rho$, et cette fonction de $\xi, \eta_1, \eta_2, \rho$ sera *en général*

indépendante de x, y_1, y_2 . Alors, la transformation (14,2), appliquée à la forme ds , la transforme en une forme différentielle

$$E d\eta_1 - A d\eta_2 - B d\xi, \quad (27,2)$$

où E, A, B sont des fonctions de $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$. Mais alors, afin que (26,2) soit un multiple d'une forme adjointe ds , il est nécessaire et suffisant que ou bien 1) $\frac{A}{E}$ soit égal à ϱ , ou bien 2) $\frac{A}{E}$ soit indépendant de ϱ et $\frac{B}{E}$ soit égal à ϱ , ou bien 3) que E s'annule et $\frac{B}{A}$ soit égal à ϱ .

On voit qu'en général, ds étant donné, il ne correspond aux trois fonctions x, y_1, y_2 de $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$ aucune transformation R .

Toutefois, il résulte de cette discussion, qu'en général, x, y_1, y_2 étant donnés en fonctions de $\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho$, on peut trouver r et un ds du type I, de sorte qu'il en résulte une transformation R avec un $d\sigma$ du type I. En effet, en posant $e = 1, a = r$ et en calculant E et A , la condition $\frac{A}{E} = \varrho$ se réduit à

$$(x'_{\eta_1} \varrho - x'_{\eta_2}) b + (y'_{\eta_1} \varrho - y'_{\eta_2}) r = y'_{\eta_1} \varrho - y'_{\eta_2}.$$

De l'autre côté, par (27,1):

$$x'_e b + y'_{2e} r = y'_e.$$

Donc, en résolvant par rapport à r et b :

$$r = \frac{\varrho \frac{\partial(y_1, x)}{\partial(\varrho, \eta_1)} - \frac{\partial(y_1, x)}{\partial(\varrho, \eta_2)}}{\varrho \frac{\partial(y_2, x)}{\partial(\varrho, \eta_1)} - \frac{\partial(y_2, x)}{\partial(\varrho, \eta_2)}}, \quad b = \frac{\varrho \frac{\partial(y_2, y_1)}{\partial(\varrho, \eta_1)} - \frac{\partial(y_2, y_1)}{\partial(\varrho, \eta_2)}}{\varrho \frac{\partial(y_2, x)}{\partial(\varrho, \eta_1)} - \frac{\partial(y_2, x)}{\partial(\varrho, \eta_2)}}, \quad (27,3)$$

et l'on obtient une transformation R , si la valeur trouvée de r ne peut être exprimée en fonction de x, y_1, y_2 .

§ 6. Intégration des équations différentielles pour ξ, η_1, η_2 ; exemples

28. Quant à la détermination des solutions ξ, η_1, η_2 de l'équation différentielle (24,4), elle peut être effectuée de la manière suivante: Il existe évidemment 4 fonctions A, B, C, D de r, x, y_1, y_2 , telles que l'on ait

$$\left. \begin{aligned} A \xi'_r + B \xi'_{v_1} + C \xi'_{v_2} + D \xi'_x &= 0 \\ A \eta'_{1r} + B \eta'_{1v_1} + C \eta'_{1v_2} + D \eta'_{1x} &= 0 \\ A \eta'_{2r} + B \eta'_{2v_1} + C \eta'_{2v_2} + D \eta'_{2x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28,1)$$

$$Be = aC + bD . \quad (28,2)$$

Donc, ξ, η_1, η_2 sont des intégrales de l'équation différentielle

$$Az'_r + Bz'_{v_1} + Cz'_{v_2} + Dz'_x = 0 , \quad (28,3)$$

où A, B, C, D sont assujettis à la condition (28,2).

D'un autre côté, en prenant 4 fonctions A, B, C, D satisfaisant à (28,2), mais autrement arbitraires, l'équation différentielle (28,3) possède des systèmes de trois intégrales indépendantes qu'on peut prendre comme ξ, η_1, η_2 .

Dans les expressions de ξ, η_1, η_2 entrent trois fonctions arbitraires de trois variables, ce qui correspond à une transformation ponctuelle de Σ . Une telle transformation n'affecte pas les grandeurs A, B, C, D .

Enfin, quant à la résolution de l'équation (28,3), elle s'effectue en intégrant le système différentiel ordinaire du troisième ordre

$$dr : dy_1 : dy_2 : dx = A : B : C : D ,$$

et en exprimant les trois constantes arbitraires $c_\nu, \nu = 1, 2, 3$ en fonctions de r, x, y_1, y_2 :

$$c_\nu = z_\nu(r, x, y_1, y_2) .$$

Les trois fonctions z_ν représentent alors un système d'intégrales indépendantes de (28,3).

29. On peut se poser la question, dans quelle mesure, les 3 fonctions indépendantes ξ, η_1, η_2 de r, x, y_1, y_2 étant données, on peut leur adjoindre une forme adjointe ds de manière à satisfaire aux conditions du théorème IV. On obtient évidemment de (24,4) les conditions pour e, a, b . Posons

$$J_1 = \frac{\partial(\xi, \eta_1, \eta_2)}{\partial(r, y_1, y_2)}, \quad J_2 = \frac{\partial(\xi, \eta_1, \eta_2)}{\partial(r, y_1, x)}, \quad J_3 = \frac{\partial(\xi, \eta_1, \eta_2)}{\partial(r, y_2, x)} . \quad (29,1)$$

Alors (24,4) se réduit à

$$J_1 b - J_2 a - J_3 e = 0 . \quad (29,2)$$

Si l'on cherche ds dans la première forme (2,2), on aura la relation

$$J_1 b - J_2 r - J_3 = 0, \quad (29,3)$$

qui peut toujours être résolue par rapport à b , si $J_1 \neq 0$. Dans ce cas il y a donc exactement une forme ds du premier type (12,2), qui peut être adjointe aux fonctions ξ, η_1, η_2 .

Si d'autre part $J_1 = 0$, (29,3) ne peut être satisfait que si

$$J_2 r + J_3 = 0, \quad (29,4)$$

mais alors pour toute valeur de b , de sorte qu'alors, chaque forme ds du premier type de (12,2) peut être adjointe à ξ, η_1, η_2 .

Si l'on cherche ds du deuxième type de (12,2), on obtient la relation

$$J_1 r - J_2 c - J_3 = 0 \quad (29,5)$$

qui devrait être satisfaite pour une fonction c indépendante de r , ce qui n'est possible qu'exceptionnellement.

Enfin, pour une forme ds du troisième type de (12,2), on obtient la relation

$$J_1 r + J_2 = 0. \quad (29,6)$$

D'ailleurs il est très bien possible qu'à un système des trois fonctions ξ, η_1, η_2 puissent être adjointes exactement une forme ds de chaque type, comme nous allons le montrer sur un exemple.

30. Exemple I : Posons

$$\xi = r, \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2 - r x. \quad (30,1)$$

On a

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{vmatrix} = -r, \quad J_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -r \end{vmatrix} = 0.$$

Avec ces valeurs on tire de (29,3) : $b = -r^2$, de (29,5) : $c = -1$, et la condition (29,6) est, elle aussi, satisfaite. On obtient donc les trois formes suivantes de ds :

$$dy_1 - r dy_2 + r^2 dx \quad (30,2)$$

$$dy_1 + dy_2 - r dx \quad (30,3)$$

$$dy_2 - r dx. \quad (30,4)$$

Les équations (24,3) deviennent pour nos valeurs de ξ , η_1 , η_2 :

$$x\alpha - \beta = 0, \quad \varepsilon - e\mu = 0, \quad \alpha - a\mu = 0, \quad r\alpha + b\mu = 0.$$

La quatrième de ces équations est équivalente à la troisième, puisqu'on a dans tous les trois cas $\frac{b}{a} = -r$. On obtient donc pour $\mu = 1$:

$$\varepsilon = e, \quad \alpha = a, \quad \beta = xa. \quad (30,5)$$

Maintenant, si $e = 1$, c'est-à-dire dans les cas (30,2), (30,3), il en résulte, suivant que l'on a affaire à (30,2) ou (30,3),

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1, \quad \alpha = r, \quad \beta = xr, \\ \varepsilon = 1, \quad \alpha = -1, \quad \beta = -x. \end{aligned}$$

Dans le premier cas on a $\alpha = \xi$ et l'on posera $\varrho = xr$. $d\sigma$ sera alors

$$d\eta_1 - \xi d\eta_2 - \varrho d\xi, \quad \varrho = xr. \quad (30,2^0)$$

Dans le deuxième cas on obtient pour $d\sigma$:

$$d\eta_1 + d\eta_2 - \varrho d\xi, \quad \varrho = -x. \quad (30,3^0)$$

Enfin dans le troisième cas on obtient

$$\varepsilon = 0, \quad \alpha = -1, \quad \beta = -x = \varrho,$$

et la forme $d\sigma$ sera (Cf. exemple II au No. 4).

$$d\eta_2 - \varrho d\xi, \quad \varrho = -x. \quad (30,4^0)$$

Dans le cas des formes (30,2), (30,2⁰) on obtient d'après le théorème I pour r et ϱ les expressions suivantes par les dérivées $p_1, p_2; \pi_1, \pi_2$:

$$r = \frac{p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4p_1}}{2}, \quad \varrho = \pi_1 - \xi \pi_2. \quad (30,6)$$

Maintenant, les équations finies de notre transformation R deviennent

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4p_1}}{2}, \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2 - x \frac{p_2 \pm \sqrt{p_2^2 - 4p_1}}{2}, \\ x &= \frac{\pi_1 - \xi \pi_2}{\xi}, \quad y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2 + \pi_1 - \xi \pi_2. \end{aligned} \right\} \quad (30,2^{\circ\circ})$$

Dans le cas des formes (30,3), (30,3^o) on a

$$r = p_1 + p_2, \quad \varrho = \pi_1 + \pi_2$$

et les équations finies de la transformation R correspondante deviennent

$$\left. \begin{aligned} \xi &= p_1 + p_2, \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2 - x(p_1 + p_2), \\ -x &= \pi_1 + \pi_2, \quad y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2 - \xi(\pi_1 + \pi_2). \end{aligned} \right\} (30,3^{oo})$$

Enfin pour les formes (30,4), (30,4^o) on a

$$\left. \begin{aligned} \xi &= p_2, \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2 - xp_2, \\ -x &= \pi_2, \quad y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2 - \xi\pi_2, \end{aligned} \right\} (30,4^{oo})$$

une transformation qui revient évidemment à la transformation de Legendre dans le plan des x, y_2 .

On voit donc que dans ces cas aux fonctions (30,1) correspondent trois transformations R différentes.

31. *Exemple II*: Posons

$$\xi = x, \quad \eta_1 = r, \quad \eta_2 = y_1 - ry_2. \quad (31,1)$$

Ici l'on a

$$J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -y_2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -y_2 \\ 0 & 0 & -r \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -r.$$

Pour ces valeurs de J_1, J_2, J_3 l'équation (29,3) est satisfaite pour chaque b . On obtient donc une forme adjointe

$$dy_1 - rdy_2 - f(r, x, y_1, y_2) dx, \quad (31,2)$$

f étant une fonction arbitraire de ses 4 arguments.

Quant aux conditions (29,5), (29,6), la deuxième n'est pas satisfaite, tandis qu'on tire de la première une valeur de c qui n'est pas indépendante de r .

Les équations (24,3) deviennent avec nos valeurs de $\xi, \eta_1, \eta_2, e, a, b$:

$$\varepsilon + \alpha y_2 = 0, \quad \alpha + \mu = 0, \quad \alpha r + \mu r = 0, \quad \beta - f\mu = 0,$$

dont la deuxième et la troisième sont équivalentes. On en tire les valeurs

$$\varepsilon = 1, \quad \alpha = -\frac{1}{y_2}, \quad \beta = \frac{f}{y_2}.$$

Donc, α étant indépendant de ξ, η_1, η_2 , on posera $\varrho = -\frac{1}{y_2}$ et l'on aura pour $d\sigma$:

$$d\eta_1 - \varrho d\eta_2 + \varrho f\left(\eta_1, \xi, \eta_2 - \frac{\eta_1}{\varrho}, \frac{-1}{\varrho}\right) d\xi . \quad (31,3)$$

On obtient ici les expressions de r et ϱ par p_1, p_2 et π_1, π_2 , en résolvant les équations

$$\left. \begin{aligned} p_1 - r p_2 - f(r, x, y_1, x_2) &= 0 \\ \pi_1 - \varrho \pi_2 + \varrho f\left(\eta_1, \xi, \eta_2 - \frac{\eta_1}{\varrho}, -\frac{1}{\varrho}\right) &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (31,4)$$

Les équations de notre transformation deviennent alors

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x, \eta_1 = r(p_1, p_2, x, y_1, y_2), \eta_2 = y_1 - y_2 r(p_1, p_2, x, y_1, y_2) \\ x &= \xi, y_1 = \eta_2 - \frac{\eta_1}{\varrho(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)}, y_2 = -\frac{1}{\varrho(\pi_1, \pi_2, \xi, \eta_1, \eta_2)} . \end{aligned} \right\} \quad (31,5)$$

En choisissant p. ex. $f \equiv 0$, on a $r = \frac{p_1}{p_2}$, $\varrho = \frac{\pi_1}{\pi_2}$ et l'on obtient la transformation (cf. exemple III au No. 4)

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x, \eta_1 = \frac{p_1}{p_2}, \eta_2 = y_1 - \frac{p_1}{p_2} y_2, \\ x &= \xi, y_1 = \eta_2 - \frac{\pi_2}{\pi_1} \eta_1, y_2 = -\frac{\pi_2}{\pi_1}, \end{aligned} \right\} \quad (31,6)$$

à laquelle correspond le couple des formes adjointes

$$ds = dy_1 - r dy_2, \quad d\sigma = d\eta_1 - \sigma d\eta_2 .$$

Fin du premier chapitre.

(Reçu le 3 octobre 1940.)

Überdeckung ebener Bereiche durch Kreise und Quadrate

H. HADWIGER, Bern

In dieser Arbeit soll eine Anwendung einer allgemeinen Mittelwertsformel¹⁾ für bewegte Figuren im Figurengitter gezeigt werden. Es handelt sich darum, die für die vollständige Überdeckung eines vorgegebenen Bereiches ausreichende Anzahl überdeckender Elementarbereiche abzuschätzen. Speziell verdient wohl noch die Frage Beachtung, wann ein Bereich von einer einzigen Elementarfigur überdeckt werden kann, bzw. eine solche überdeckt. In dieser Hinsicht werden hinreichende Bedingungen aufgestellt. Als überdeckende Bereiche wählen wir:

1. Einheitsquadrate = Quadrate der Seitenlänge 1 ;
2. Einheitskreise = Kreise vom Radius 1.

Über den zu überdeckenden Bereich setzen wir voraus, daß er einfach zusammenhängend und durch eine streckbare Kurve berandet ist.

Wir treten zunächst auf die oben erwähnte Mittelwertsformel ein, die wir in einer unwesentlich allgemeineren Fassung wiedergeben: Wir betrachten eine von zwei unabhängigen Translationen der Ebene erzeugte Gittergruppe. Es sei \mathfrak{G}_0 ein Bereich in fester Anfangslage. Wir legen nun in der Ebene alle zu \mathfrak{G}_0 kongruenten Bereiche auf, die durch eine Translation der Gittergruppe mit \mathfrak{G}_0 zur Deckung gebracht werden können. Die Gesamtheit dieser Bereiche bildet das Bereichgitter $\{\mathfrak{G}_0\}$.

Es sei weiter \mathfrak{G} ein in der Ebene beweglicher Bereich. In einer bestimmten Lage wird der Durchschnitt von \mathfrak{G} mit einem Bereich des Gitters $\{\mathfrak{G}_0\}$ aus einer „fast immer“²⁾ endlichen Anzahl einfach zusammenhängender Stücke bestehen. Die Summe S der Stückzahlen erstreckt über alle Bereiche des Gitters $\{\mathfrak{G}_0\}$, die von \mathfrak{G} in der betrachteten festen Lage getroffen werden, heißt Stückzahl von \mathfrak{G} im Gitter $\{\mathfrak{G}_0\}$. Der über alle Lagen von \mathfrak{G} erstreckte Mittelwert der Stückzahl S ist dann

$$\bar{S} = \frac{LL_0 + 2\pi(F + F_0)}{2\pi T}, \quad (1)$$

¹⁾ H. Hadwiger, Über Mittelwerte im Figurengitter. *Coment. Math. Helv.* 11, 221—233 (1938/1939) Formel (I), 223. Die Mittelwertsformel stellt eine Anwendung der Hauptformel der ebenen Integralgeometrie auf die Berechnung geometrischer Mittelwerte in Gittern dar. Vergleiche W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie*. 1. Heft, zweite erweiterte Auflage. Leipzig und Berlin 1936, S. 20.

²⁾ Bedeutet hier „immer“ mit Ausnahme von Lagen der integralgeometrischen „Anzahl“ Null.

wo L, L_0 , bzw. F, F_0 die Randlängen bzw. die Flächeninhalte der Bereiche $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_0$, und T den Flächeninhalt des Fundamentalparallelogramms der Gittergruppe bedeuten.

Es bezeichne N die Zahl der Bereiche von $\{\mathfrak{G}_0\}$ die von \mathfrak{G} in fester Lage getroffen werden. Da der Durchschnitt von \mathfrak{G} mit irgend einem Bereich von $\{\mathfrak{G}_0\}$ aus verschiedenen Stücken bestehen kann, wird im allgemeinen

$$N \leq S \quad (2)$$

sein. Das Gleichheitszeichen gilt z. B. dann, wenn beide Bereiche konvex sind. Aus (2) folgt für die Mittelwerte

$$\bar{N} \leq \bar{S} \quad (3)$$

Ist M die kleinste in Betracht fallende Treffzahl, so kann sie nicht größer sein, als der Mittelwert, so daß man mit Hilfe des Gauß'schen Klammersymbols schreiben kann

$$M \leq [\bar{N}] \quad (4)$$

Wenn nun \mathfrak{G}_0 so beschaffen ist, daß die Bereiche von $\{\mathfrak{G}_0\}$ die ganze Ebene überdecken, so überdecken offenbar die von \mathfrak{G} getroffenen Bereiche von $\{\mathfrak{G}_0\}$ auch insbesondere \mathfrak{G} . Mit Rücksicht auf (1), (3) und (4) folgt dann die allgemeine Aussage:

Es genügen stets $\left[\frac{LL_0 + 2\pi(F + F_0)}{2\pi T} \right]$ Bereiche \mathfrak{G}_0 um den Bereich \mathfrak{G} zu überdecken.

So gewinnen wir folgende Resultate³⁾:

- (I) *Es genügen stets $\left[F + \frac{2}{\pi} L + 1 \right]$ Einheitsquadrate, um einen Bereich der Fläche F und der Randlänge L zu überdecken.*
- (II) *Es genügen stets $\left[\frac{2}{3\sqrt{3}} F + \frac{2}{\pi\sqrt{3}} L + 1 \right]$ Einheitskreise, um einen Bereich der Fläche F und der Randlänge L zu überdecken.*

³⁾ Betreffend die analoge Fragestellung im Raume sollen noch zwei Ergebnisse⁶ ohne weitere Ausführungen mitgeteilt werden:

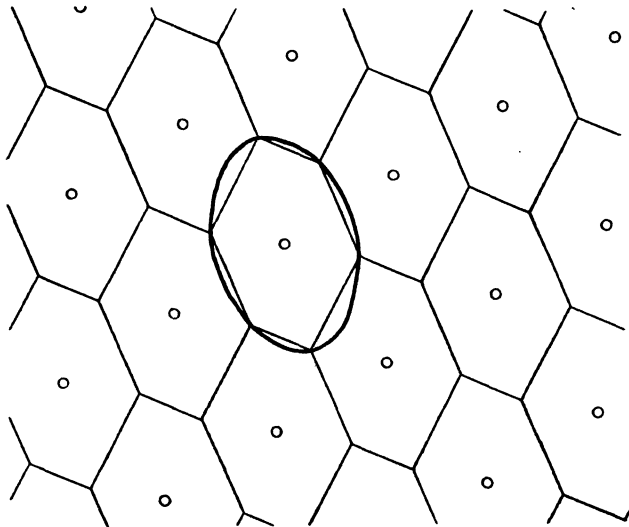
Es genügen stets $\left[V + \frac{3}{4} O + \frac{3}{2\pi} M + 1 \right]$ Einheitswürfel (Kante = 1) und

$\left[\frac{3\sqrt{3}}{8} V + \frac{9}{16} O + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} M + 1 \right]$ Einheitskugeln (Radius = 1) um einen konvexen Bereich vom Volumen V , der Oberfläche O und der Kantenkrümmung (Integral der mittleren Krümmung) M zu überdecken.

Wir werden nun eine allgemeinere Formel herleiten, die die in (I) und (II) angegebenen Abschätzungen als Spezialfälle enthält. Es sei \mathfrak{G}_0 ein konvexer Bereich mit Mittelpunkt, und \mathfrak{G}_\square ein einbeschriebenes Hexagon (Sechseck mit paarweise parallelen und gleichlangen Seiten). F_\square und L_\square seien Flächeninhalt und Umfang von \mathfrak{G}_\square . Wie bekannt kann die Ebene durch kongruente Hexagone so überdeckt werden, daß die Mittelpunkte ein Parallelogrammgitter bilden⁴). Da der Flächeninhalt eines solchen Fundamentalparallelogramms offenbar gleich F_\square ist, kann nach der oben angegebenen Formel der Bereich \mathfrak{G} durch

$$\left[\frac{LL_\square + 2\pi(F + F_\square)}{2\pi F_\square} \right]$$

Hexagone überdeckt werden. Da die Bereiche \mathfrak{G}_0 den \mathfrak{G}_\square umschrieben sind, gilt das gleiche für die Bedeckung durch Bereiche \mathfrak{G}_0 . Wenn wir für \mathfrak{G}_0 nun Einheitsquadrat bzw. Einheitskreis und für \mathfrak{G}_\square das Einheitsquadrat selbst (entartetes Hexagon) bzw. das reguläre Sechseck wählen, so gelangen wir zu den Bedeckungszahlen in den Aussagen (I) und (II). In diesen beiden Fällen wurden die einbeschriebenen Hexagone maximaler Fläche gewählt. Andere Auswahlen ergeben andere Abschätzungsformeln.



Wir betrachten wieder allgemein den beweglichen Bereich \mathfrak{G} im Bereichgitter $\{\mathfrak{G}_0\}$.

⁴) E. S. Fedoroff, Reguläre Plan- und Raumteilungen. Abhandl. k. Bayer. Ak. Wiss. II. Cl. 20 (1899). Vgl. auch nachstehende Figur.

Bezeichnet P die Zahl der Schnittpunkte des Randes von \mathfrak{G} in irgend einer festen Lage mit den Rändern der Bereiche von $\{\mathfrak{G}_0\}$, so ist der über alle Lagen von \mathfrak{G} erstreckte Mittelwert von P^5):

$$\bar{P} = \frac{2LL_0}{\pi T} . \quad (5)$$

In Verbindung mit (1) gewinnen wir so

$$\overline{P - 2S} = \frac{LL_0 - 2\pi(F + F_0)}{\pi T} . \quad (6)$$

Man überlegt sich nun leicht folgendes: Wenn die Bereiche \mathfrak{G} und \mathfrak{G}_0 so beschaffen sind, daß keiner ganz vom andern überdeckt werden kann, so ist die Ränderschnittpunktzahl nicht kleiner als die doppelte Stückzahl, da jedes einzelne Stück des Durchschnittes Anlaß zu mindestens zwei Schnittpunkten der Randkurven bietet.

Also wird wegen $P \geq 2S$

$$LL_0 - 2\pi(F + F_0) \geq 0 \quad (7)$$

ausfallen müssen. Da die Voraussetzung für kongruente oder symmetrische Bereiche erfüllt ist, folgt z. B. aus (7) die bekannte isoperimetrische Ungleichung⁶⁾

$$L^2 - 4\pi F \geq 0 . \quad (8)$$

Nach den oben gemachten Bemerkungen ist somit

$$LL_0 - 2\pi(F + F_0) < 0 \quad (9)$$

hinreichend dafür, daß von den beiden Bereichen \mathfrak{G} und \mathfrak{G}_0 einer den andern bedecken kann.

Wenn wir mit $\mathfrak{G}^{(\lambda)}$ den Bereich bezeichnen, der aus \mathfrak{G} durch ähnliche Abbildung mit der linearen Vergrößerung λ hervorgeht, so wird bei ausreichend großem λ

(Fall a) $\mathfrak{G}^{(\lambda)}$ den Bereich \mathfrak{G}_0 ,

bei genügend kleinem λ dagegen

(Fall b) \mathfrak{G}_0 den Bereich $\mathfrak{G}^{(\lambda)}$ bedecken können.

⁵⁾ Vgl. die in Fußnote ¹⁾ zitierte Note, S. 232, Formel (VI).

⁶⁾ Vgl. auch die analoge geläufige Schlußfolgerung, die man aus den kinematischen Hauptformeln der ebenen Integralgeometrie ziehen kann bei *W. Blaschke* in dem in Fußnote ¹⁾ erwähnten Buch, S. 45.

Hinreichend für das eine oder das andere ist nach (9)

$$\lambda L L_0 - 2\pi(\lambda^2 F + F_0) < 0,$$

oder also

$$\text{(Fall a)} \quad \lambda > \frac{L L_0 + \sqrt{L^2 L_0^2 - 16\pi^2 F F_0}}{4\pi F};$$

$$\text{(Fall b)} \quad \lambda < \frac{L L_0 - \sqrt{L^2 L_0^2 - 16\pi^2 F F_0}}{4\pi F};$$

Wir gelangen so zu hinreichenden Bedingungen⁷⁾ dafür, daß ein Bereich \mathfrak{G} durch eine Elementarfigur von der betrachteten Art bedeckt werden kann, oder umgekehrt einen solchen überdeckt. Es ergeben sich die folgenden Aussagen:

(III) Hinreichend dafür, daß ein Bereich der Fläche F und der Randlänge L durch ein Einheitsquadrat bedeckt werden kann, bzw. ein solches bedeckt ist die Bedingung

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - \pi^2 F}}{\pi F} > 1 \text{ bzw. } \frac{L + \sqrt{L^2 - \pi^2 F}}{\pi F} < 1.$$

(IV) Hinreichend dafür, daß ein Bereich der Fläche F und der Randlänge L durch einen Einheitskreis bedeckt werden kann, bzw. einen solchen überdeckt ist die Bedingung

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi F}}{2F} > 1 \text{ bzw. } \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi F}}{2F} < 1.$$

In den Fällen, in denen keine der oben angegebenen Bedingungen erfüllt ist, bleibt die Frage der Bedeckbarkeit offen. In diesen „unbestimmten“ Fällen sind diejenigen enthalten, in denen tatsächlich keine von den in Frage stehenden Bedeckungen möglich ist. Die Breite dieser

⁷⁾ Es ist nicht möglich, für die gegenseitige Bedeckbarkeit zweier Bereiche notwendige und zugleich hinreichende Bedingungen, in die nur die Flächeninhalte und Randlängen eingehen, anzugeben. Dies zeigt das folgende Beispiel: Es sei \mathfrak{G}_0 der Einheitskreis und \mathfrak{G} ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie $a = \frac{21}{10}$ und der Höhe $h = \frac{63}{80}$. Da der Durchmesser von \mathfrak{G} größer als 2 ist, kann \mathfrak{G} nicht durch \mathfrak{G}_0 bedeckt werden. Es gibt aber ein Rechteck, das gleichen Flächeninhalt und gleichen Umfang besitzt wie \mathfrak{G} mit der Diagonallänge $d = \frac{21}{80}\sqrt{57} \sim 1,981\dots$, das also durch \mathfrak{G}_0 bedeckt werden kann.

„Unbestimmtheitszone“ ist von den „Defiziten“ $L^2 - \pi^2 F$ bzw. $L^2 - 4\pi F$ abhängig. Nur im Falle, wo $L^2 - 4\pi F = 0$ ist, d. h. wenn \mathfrak{G} ein Kreis ist, wird eine eindeutige Entscheidung für die Bedeckbarkeit mit einem Einheitskreis erreicht. Die Bedingungen können im letztgenannten Falle so gelesen werden:

$$\frac{1}{r} > 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{r} < 1$$

($r =$ Radius von \mathfrak{G}), die trivial verifizierbar sind.

(Eingegangen den 6. Dezember 1940.)

Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra

Von EDUARD STIEFEL, Zürich

Es wird im folgenden die früher*) für beliebige geschlossene Mannigfaltigkeiten entwickelte Theorie der Richtungsfelder auf die n -dimensionalen reellen projektiven Räume angewendet. Die vollständige Bestimmung der charakteristischen Homologieklassen (mod 2) dieser Räume (Satz D) ergibt einerseits Beiträge zur Topologie ihrer Richtungsfelder (Sätze A und B), andererseits folgen aus ihr Ergebnisse über reelle Matrizen und Bilinearformen (Nr. 9). In der nachstehenden Arbeit von H. Hopf werden dieselben Anwendungen als Folgerungen einer anderen topologischen Methode erscheinen**).

1. Wenn n gerade ist, so gibt es bekanntlich im n -dimensionalen reellen projektiven Raum P^n — ebenso wie in der n -dimensionalen Sphäre — kein überall stetiges Richtungsfeld. Dieser klassische Satz von Brouwer läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Satz A. Es sei $n + 1 = 2^\lambda \cdot u$, u ungerade. Dann ist es unmöglich, 2^λ stetige Richtungsfelder im P^n so anzubringen, daß in jedem Punkt die dort angebrachten Richtungen linear unabhängig voneinander sind¹⁾.

Hierin ist unter anderem die Aussage enthalten, daß unter allen projektiven Räumen höchstens die der Dimensionszahlen $n = 2^\lambda - 1$ parallelisierbar sein können, d. h. daß es höchstens in diesen projektiven Räumen n stetige und linear unabhängige Felder geben kann. Man weiß, daß P^1, P^3, P^7 parallelisierbar sind; ob es noch weitere parallelisierbare projektive Räume gibt, weiß man nicht²⁾.

*) E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helvet. 8 (1935); diese Arbeit wird im folgenden als „Diss.“ zitiert.

**) Herr Prof. Dr. H. Hopf war so freundlich, mein ursprünglich vorliegendes Manuskript während meiner längeren Abwesenheit im Militärdienst für den Druck auszuarbeiten. Er hat bei dieser Gelegenheit einige Hilfsmittel, die ich als Spezialfälle der allgemeinen Theorie dargestellt hatte, für die projektiven Räume direkt hergeleitet. Ferner hat er einen Beweis, der bei mir noch nicht ganz präzise war, durch Benutzung eines Satzes von Ważewski in Ordnung gebracht. Ich danke ihm herzlich für seine Hilfe, ohne die das Erscheinen der Arbeit zum mindesten stark verzögert worden wäre.

¹⁾ Für $\lambda = 1$ bereits enthalten in Diss. § 6, Satz 26.

²⁾ Zum Problem der Parallelisierbarkeit vergleiche man Diss., besonders Einleitung, Nr. 5, 6.

Der Satz A wird weiter verallgemeinert und verschärft werden. Ein System von m stetigen und linear unabhängigen Richtungsfeldern nennen wir kurz ein „ m -Feld“. Wir werden nicht nur m -Felder betrachten, die in dem ganzen Raum P^n , sondern auch solche, die nur in einer offenen Teilmenge von P^n , dem „Regularitätsbereich“ des Feldes, erklärt sind; die abgeschlossene Komplementärmenge dieses Bereiches heiÙe die „Singularitätenmenge“ des Feldes. (Über das Verhalten des Feldes auf dieser Menge Q wird nichts vorausgesetzt; es kommt oft vor, daß jedes einzelne der m Richtungsfelder im ganzen Raum regulär ist, und daß auf Q lineare Abhängigkeit zwischen den verschiedenen Feldern eintritt.) Es gilt der folgende Satz:

Satz B. Der Regularitätsbereich eines m -Feldes im P^n enthalte eine k -dimensionale Ebene P^k des P^n . Dann sind alle Binomialkoeffizienten

$$\binom{n+1}{\mu} \quad \text{mit} \quad n-k < \mu < m+1$$

gerade.

Wir zeigen, daß A aus B folgt: Ein im ganzen P^n reguläres m -Feld sei gegeben; dann ist die Voraussetzung von B mit $k = n$ erfüllt; alle Zahlen $\binom{n+1}{\mu}$ mit $\mu = 1, 2, \dots, m$ sind daher gerade; für den Beweis der Behauptung $m < 2^\lambda$ — das ist ja die Behauptung von A — hat man mithin nur noch zu zeigen, daß $\binom{n+1}{2^\lambda}$ ungerade ist; dies geschieht, indem man das Polynom $(1+x)^{n+1}$ modulo 2 nach dem binomischen Satz entwickelt:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= \sum_i \binom{n+1}{i} x^i \\ &= ((1+x)^{2^\lambda})^u \equiv (1+x^{2^\lambda})^u = \sum_j \binom{u}{j} x^{2^\lambda j} ; \end{aligned}$$

der Koeffizient von x^{2^λ} ist

$$\binom{n+1}{2^\lambda} \equiv \binom{u}{1} \equiv 1 \pmod{2} .$$

Der Satz B ist einerseits eine Folge des nächsten Satzes:

Satz C. Es sei $\binom{n+1}{m}$ ungerade und im P^n ein m -Feld mit einer Singularitätenmenge Q gegeben. Dann enthält jede Umgebung von Q einen $(m-1)$ -dimensionalen Zyklus mod. 2, der einer Ebene P^{m-1} im P^n homolog ist.

Um zu beweisen, daß B aus C folgt, nehmen wir ein m -Feld \mathfrak{F} und eine Ebene P^k , welche die Voraussetzungen des Satzes B erfüllen, sowie eine Zahl μ , welche die dort genannten Ungleichungen befriedigt; infolge dieser Ungleichungen enthält P^k eine Ebene $P^{n-\mu+1}$ und \mathfrak{F} ein μ -Feld \mathfrak{F}' ; $P^{n-\mu+1}$ hat mit jedem Zyklus, der einer Ebene $P^{\mu-1}$ homolog ist, einen Schnittpunkt, ist aber fremd zu der Singularitätenmenge Q von \mathfrak{F}' und also auch zu einer gewissen Umgebung U von Q ; folglich enthält U keinen Zyklus, der homolog $P^{\mu-1}$ ist; aus Satz C , angewandt auf \mathfrak{F}' , ergibt sich daher, daß $\binom{n+1}{\mu}$ gerade ist.

Oft besteht die Singularitätenmenge eines Feldes aus den Punkten eines Komplexes (aus Zellen einer Zerlegung von P^n), den wir dann den „Singularitätenkomplex“ des Feldes nennen. In diesem Fall gestattet der Satz C eine Präzisierung:

Satz C' . Besteht, unter den Voraussetzungen des Satzes C , die Menge Q aus den Punkten eines Komplexes K , so enthält nicht nur eine Umgebung von Q , sondern der Komplex K selbst einen Teilzyklus von der im Satz C genannten Art.

Es ist klar, daß C aus C' folgt: die Voraussetzungen von C seien erfüllt, und U sei eine vorgegebene Umgebung von Q ; man konstruiere einen in U gelegenen Komplex K , der die Menge Q enthält, und betrachte das m -Feld nur in der Komplementärmenge von K , so daß K also die Rolle des Singularitätenkomplexes spielt; durch Anwendung des Satzes C' auf das so verkleinerte m -Feld ergibt sich die Gültigkeit von C .

Die Sätze A, B, C sind also Konsequenzen des Satzes C' , und der Beweis dieses Satzes ist daher unser Ziel. Außerdem werden wir algebraische Folgerungen aus dem Satz B ziehen (Nr. 9).

2. Der Beweis des Satzes C' beruht auf der allgemeinen Theorie der Systeme von Richtungsfeldern in geschlossenen Mannigfaltigkeiten und der „charakteristischen Homologiekategorie“, die ich früher ausführlich dargestellt habe und über deren Hauptpunkte ich hier nur kurz berichten werde³⁾.

Wir betrachten eine differenzierbare geschlossene n -dimensionale Mannigfaltigkeit M^n ; Orientierbarkeit wird nicht vorausgesetzt; als Koeffizientenbereich für die Homologien benutzen wir den Restklassenring mod. 2 (früher hatte ich, um feinere Resultate zu erhalten, für gewisse Dimensionszahlen den Ring der ganzen Zahlen, für andere den

³⁾ Diss. § 4, besonders Nr. 4, 5.

Ring mod. 2 benutzt; für unsere gegenwärtigen Ziele genügt der letztere Ring; die dadurch entstehenden Änderungen sind lediglich Vereinfachungen). In M^n sei ein m -Feld mit einem Singularitätenkomplex K gegeben („ m -Feld“ und „Singularitätenkomplex“ sind analog wie für den P^n erklärt); K gehöre einer hinreichend feinen Zellenzerlegung von M^n an. Wir setzen vorläufig voraus, daß K höchstens $(m - 1)$ -dimensional ist; jeder $(m - 1)$ -dimensionalen Zelle x_i von K wird durch eine Vorschrift, auf die wir noch zurückkommen werden, ein „Index“ $j(x_i)$ zugeordnet, der eine der beiden Restklassen mod. 2 ist; man bilde den algebraischen Komplex $z = \sum j(x_i) x_i$; es gilt der folgende „Hauptsatz“:

z ist ein Zyklus mod. 2; seine Homologiekategorie F^{m-1} ist unabhängig von dem speziell betrachteten m -Feld.

z heißt der „singuläre Zyklus“ des m -Feldes, F^{m-1} heißt die $(m - 1)$ -dimensionale „charakteristische Homologiekategorie“ von M^n .

Ist \mathfrak{F} ein m -Feld mit einem Singularitätenkomplex K von größerer Dimension als $m - 1$, so kann man immer ein m -Feld \mathfrak{F}' finden, dessen Singularitätenkomplex der aus den $(m - 1)$ -dimensionalen Zellen von K bestehende Komplex K^{m-1} ist. (Andeutung der Konstruktion von \mathfrak{F}' : in der Zellenzerlegung von M^n , die dual ist zu der Zerlegung, welcher K angehört, bilden diejenigen Zellen, deren duale Zellen nicht zu K gehören, einen Komplex Γ , der im Regularitätsbereich von \mathfrak{F} liegt; man behalte das Feld \mathfrak{F} nur auf Γ bei und tilge es in der Komplementärmenge von Γ ; das so reduzierte Feld läßt sich zu einem m -Feld \mathfrak{F}' mit dem Singularitätenkomplex K^{m-1} erweitern.) Der singuläre Zyklus z von \mathfrak{F}' liegt nach seiner Definition in K^{m-1} , also in K . Man sieht also:

Ist der (beliebig-dimensionale) Komplex K Singularitätenkomplex eines m -Feldes, so enthält er einen Zyklus aus der charakteristischen Homologiekategorie F^{m-1} .

Hieraus ist ersichtlich, daß unser Satz C' in dem folgenden enthalten ist:

Satz D. Die charakteristische Homologiekategorie F^{m-1} des projektiven Raumes P^n ist die Nullkategorie oder die Kategorie, welche die Ebene P^{m-1} enthält, je nachdem $\binom{n+1}{m}$ gerade oder ungerade ist.

Man kann den Inhalt dieses Satzes auch folgendermaßen ausdrücken. Da im P^n die Ebenen P^r r -dimensionale Homologiebasen mod. 2 bilden, ist es von vorneherein klar, daß es für $m = 1, 2, \dots, n$ Restklassen $\alpha_{n,m}$ mod. 2 gibt, welche durch die Homologien

$$z \sim \alpha_{n,m} P^{m-1} \quad (1)$$

bestimmt sind, wobei z singulärer Zyklus eines m -Feldes ist; dann besagt der Satz D :

Die durch (1) definierten Größen $\alpha_{n,m}$ erfüllen die Kongruenzen

$$\alpha_{n,m} \equiv \binom{n+1}{m} \pmod{2}. \quad (2)$$

Bevor wir an den Beweis der Behauptung (2) herangehen, müssen wir noch den oben erwähnten Begriff des „Index“ besprechen, der bei der Definition der singulären Zyklen eine wesentliche Rolle spielte.

3. Der Begriff des „Index“ beruht auf dem nahe verwandten Begriff der „Charakteristik“⁴⁾. Auf einer Sphäre S^{n-m} des euklidischen Raumes R^n sei ein m -Feld des R^n gegeben, also ein solches System von m stetigen Feldern von Richtungen des R^n , daß in jedem einzelnen Punkt der S^{n-m} die dort angebrachten Richtungen linear unabhängig von einander sind; (die Richtungen sind im allgemeinen nicht tangential an S^{n-m}). Jedem solchen Feld \mathfrak{F} ist als „Charakteristik“ $\alpha(\mathfrak{F})$ eine der beiden Restklassen mod. 2 zugeordnet; auf die Definition gehen wir hier nicht ein, sondern wir stellen nur fest, daß sich aus der Definition unmittelbar die folgenden drei Eigenschaften (a), (b), (c) ergeben:

(a) Die Charakteristik bleibt ungeändert bei stetiger Abänderung von \mathfrak{F} .

(b) Liegt R^n im R^{n+1} und fügt man zu \mathfrak{F} ein Feld konstanter (d. h. paralleler) Richtungen des R^{n+1} hinzu, die nicht im R^n liegen, so hat das dadurch auf S^{n-m} entstandene $(m+1)$ -Feld des R^{n+1} die gleiche Charakteristik wie das gegebene m -Feld \mathfrak{F} des R^n .

(c) Für $m=1$ ist $\alpha(\mathfrak{F})$ die bekannte Kroneckersche Charakteristik, also der Abbildungsgrad (mod. 2) derjenigen Abbildung der S^{n-1} auf die Richtungskugel des R^n , welche durch die Richtungen des Feldes vermittelt wird.

Von den weiteren Eigenschaften, die sich aus den vorstehenden ergeben, heben wir im Augenblick die folgende Verallgemeinerung von (c) hervor, deren Beweis wir wohl übergehen dürfen:

(d) Besteht jedes der $m-1$ ersten Richtungsfeldern von \mathfrak{F} aus konstanten Richtungen, während die Richtungen des m -ten Feldes einer Ebene R^{n-m+1} des R^n parallel sind, so ist $\alpha(\mathfrak{F})$ gleich dem Grade der Abbildung von S^{n-m} auf die Richtungskugel von R^{n-m+1} , welche durch die Richtungen des m -ten Feldes vermittelt wird.

In meiner früheren Darstellung war übrigens immer $m < n$ voraus-

⁴⁾ Diss. § 1, besonders Nr. 4, ferner § 2, § 3, Nr. 1.

gesetzt; jetzt ist es zweckmäßig, auch $m = n$ zuzulassen; man bestätigt leicht, daß die vorstehenden Eigenschaften dann (und nur dann) gültig bleiben, wenn man festsetzt:

(e) Die Charakteristik eines n -Feldes auf einer S^0 des R^n , also eines Paares von zwei n -Beinen, die in zwei Punkten des R^n angebracht sind, ist $\equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod{2}$, je nachdem die beiden n -Beine die gleiche Orientierung oder verschiedene Orientierungen des R^n bestimmen⁵⁾.

Wir werden später noch einige weitere Eigenschaften der Charakteristik nennen. Jetzt definieren wir den „Index“. Es sei also in der Mannigfaltigkeit M^n ein m -Feld mit einem $(m - 1)$ -dimensionalen Singularitätenkomplex K gegeben, und x sei ein $(m - 1)$ -dimensionales Simplex von K . Wir nehmen eine kleine Sphäre S^{n-m} in M^n , deren Mittelpunkt ein innerer Punkt von x ist, und die x umschlingt; das m -Feld ist auf ihr regulär und hat eine Charakteristik α ; aus (a) folgt leicht, daß α von der speziellen Wahl der Sphäre S^{n-m} nicht abhängt; diese Größe α ist der Index $j(x)$.

4. Im Falle $m = 1$, in welchem x ein Punkt ist, ist demnach $j(x)$ der in der üblichen Weise erklärte Index (mod. 2) einer isolierten Singularität eines Richtungsfeldes. Die charakteristische Homologiekategorie F^0 wird durch einen mit der Indexsumme $\sum j(x_i)$ multiplizierten Punkt repräsentiert; die Indexsumme ist bekanntlich die Eulersche Charakteristik von M^n ; man sieht also: F^0 ist dann und nur dann die Nullklasse, wenn die Eulersche Charakteristik von M^n gerade ist⁶⁾.

Da der projektive Raum P^n die Charakteristik 1 oder 0 hat, je nachdem n gerade oder ungerade ist, bedeutet das Vorstehende die Gültigkeit der Behauptung (2), also des Satzes D , für $m = 1$ bei beliebigem n .

Wir wollen sogleich auch noch die Fälle $m = n$ erledigen. Man kann im P^n — etwa indem man P^n als euklidischen R^n mit einer unendlich fernen Ebene P^{n-1} auffaßt — ein n -Feld konstruieren, dessen Singularitätenkomplex K eine Ebene P^{n-1} ist; ein $(n - 1)$ -dimensionales Simplex x zerlegt die n -dimensionale Umgebung eines seiner inneren Punkte in zwei Gebiete, in deren jedem durch das dort reguläre n -Feld eine Orientierung bestimmt ist; aus der Definition des Index und aus Nr. 3, (e) folgt: sind diese beiden Orientierungen längs x kohärent, so ist $j(x) \equiv 0$, sind sie nicht kohärent, so ist $j(x) \equiv 1$. Daraus ist ersichtlich: der singuläre Zyklus (Nr. 2) des n -Feldes ist gleich 0 oder gleich P^{n-1} , je

⁵⁾ Da das n -Feld auf S^0 aus n Feldern von Richtungspaaren besteht, entspricht einer Reihenfolge der Richtungen in dem einen n -Bein eine bestimmte Reihenfolge in dem anderen n -Bein.

⁶⁾ Diss. § 5, Nr. 2.

nachdem P^n orientierbar ist oder nicht⁷⁾. Da P^n für ungerades n orientierbar, für gerades n nicht orientierbar ist, ist damit (2) für $m = n$ bewiesen.

5. Die somit bewiesene Gültigkeit von (2) für $m = 1$ und $m = n$ ermöglicht eine Umformung der Behauptung (2) für $1 < m < n$. Setzen wir für einen Augenblick $\binom{n+1}{m} = \beta_{n,m}$, so sind die $\beta_{n,m}$ für $1 \leq m \leq n$ durch die Pascalsche Dreiecksregel

$$\beta_{n,m} = \beta_{n-1,m-1} + \beta_{n-1,m}$$

zusammen mit den Randbedingungen

$$\beta_{n,1} = n + 1, \quad \beta_{n,n} = n + 1$$

vollständig charakterisiert. Die Behauptung (2) lautet:

$$\alpha_{n,m} \equiv \beta_{n,m} \pmod{2} \quad \text{für } 1 \leq m \leq n;$$

die Gültigkeit von

$$\alpha_{n,1} \equiv n + 1, \quad \alpha_{n,n} \equiv n + 1$$

haben wir soeben bewiesen; es bleibt also noch die Gültigkeit der Kongruenzen

$$\alpha_{n,m} \equiv \alpha_{n-1,m-1} + \alpha_{n-1,m} \pmod{2} \quad \text{für } 1 < m < n \quad (3)$$

nachzuweisen.

Dieser Nachweis wird durch eine Konstruktion folgender Art erfolgen. Im P^n wird ein m -Feld \mathfrak{F} angegeben werden, dessen Singularitätenkomplex K aus zwei Ebenen P_1^{m-1} und P_2^{m-1} besteht, und dessen singulärer Zyklus $z = \xi_1 P_1^{m-1} + \xi_2 P_2^{m-1}$ ist, wobei ξ_1 und ξ_2 gewisse Restklassen mod. 2 und P_1^{m-1} , P_2^{m-1} als Zyklen mod. 2 aufzufassen sind; ohne daß ξ_1 und ξ_2 explizit bestimmt zu werden brauchen, wird dann in einem Raume P^{n-1} erstens ein $(m-1)$ -Feld \mathfrak{F}' mit einem singulären Zyklus $z_1 = \xi_1 P^{m-2}$ und zweitens ein m -Feld \mathfrak{F}'' mit einem singulären Zyklus $z_2 = \xi_2 P^{m-1}$ konstruiert werden, wobei P^{m-2} und P^{m-1} Ebenen des P^{n-1} , aufgefaßt als Zyklen mod. 2, sind. Damit wird der Beweis beendet sein; denn aus der Definition der $\alpha_{\nu,\mu}$ folgt

$$\alpha_{n,m} = \xi_1 + \xi_2, \quad \alpha_{n-1,m-1} = \xi_1, \quad \alpha_{n-1,m} = \xi_2,$$

also die Gültigkeit von (3).

⁷⁾ Dieses Kriterium für die Orientierbarkeit gilt nicht nur für P^n , sondern für alle geschlossenen Mannigfaltigkeiten M^n .

Hierzu sei noch folgendes bemerkt. Wenn das Feld \mathfrak{F} so konstruiert ist, daß K aus zwei Ebenen P_1^{m-1} und P_2^{m-1} besteht, so ist von vornherein klar, daß der singuläre Zyklus die Gestalt $\xi_1 P_1^{m-1} + \xi_2 P_2^{m-1}$ hat; denn es gibt, wie man sich leicht überlegt, in K keine anderen $(m-1)$ -dimensionalen Zyklen als die von der angegebenen Gestalt; ebenso folgt aus der Tatsache, daß \mathfrak{F}' und \mathfrak{F}'' je eine Ebene als Singularitätenkomplex besitzen, sofort, daß die singulären Zyklen von der Gestalt $z_1 = \xi' P^{m-2}$, $z_2 = \xi'' P^{m-1}$ sind. Zu beweisen wird nur sein, daß für die speziell konstruierten Felder $\xi' = \xi_1$, $\xi'' = \xi_2$ ist; und die Index-Betrachtungen, die zum Beweis dieser Gleichheiten nötig sind, können in der Umgebung beliebiger Punkte der betreffenden Ebenen vorgenommen werden, wobei man im Falle des Feldes \mathfrak{F} nur die Punkte der Schnittebene von P_1^{m-1} und P_2^{m-1} vermeiden muß.

6. Um den Gedankengang später nicht unterbrechen zu müssen, stellen wir hier, in Fortsetzung von Nr. 3, noch einige Eigenschaften der „Charakteristik“ zusammen.

Durch stetige Abänderung des in Nr. 3, (b), genannten Feldes konstanter Richtungen ergibt sich, bei Berücksichtigung von (a), die folgende Verallgemeinerung von (b):

(b') Die Gültigkeit von (b) bleibt erhalten, wenn von den Richtungen des neu hinzugefügten Feldes nicht vorausgesetzt wird, daß sie parallel sind, sondern nur, daß sie überall aus dem R^n herauszeigen.

Dies läßt sich noch weiter verallgemeinern:

(f) Auf der Sphäre S^{n-m} des R^n , der im R^{n+1} liegt, seien $m+1$ Richtungsfelder $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_m$ des R^{n+1} gegeben, die ein $(m+1)$ -Feld \mathfrak{B} bilden; die Richtungen von \mathfrak{B}_0 sollen überall aus R^n herauszeigen, während über die \mathfrak{B}_i mit $i > 0$ nichts Derartiges vorausgesetzt wird; projiziert man \mathfrak{B}_i , $i > 0$, von \mathfrak{B}_0 aus auf R^n , so entsteht ein Richtungsfeld \mathfrak{B}'_i des R^n ; die Felder $\mathfrak{B}'_1, \dots, \mathfrak{B}'_m$ bilden ein m -Feld \mathfrak{B}' des R^n auf S^{n-m} . Behauptung: \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' haben die gleiche Charakteristik.

Dabei ist unter „Projektion einer Richtung v_i von der Richtung v_0 aus auf den R^n “ diejenige Richtung des R^n zu verstehen, die in der 2-dimensionalen Halbebene liegt, welche von der, durch v_0 bestimmten (unorientierten) Geraden und der Richtung v_i aufgespannt wird; sie ist immer definiert, wenn v_0 und v_i unabhängig sind und nicht beide in R^n liegen. Der Beweis von (f) erfolgt, indem man die Felder \mathfrak{B}_i , $i > 0$, stetig in die Felder \mathfrak{B}'_i überführt und dann den Satz (b') anwendet; daß diese Überführung möglich ist, ohne daß jemals eine lineare Abhängigkeit eintritt, ist leicht zu sehen.

Etwas weniger naheliegend ist die nächste und letzte Eigenschaft der Charakteristik, die wir benötigen; sie kann als Verallgemeinerung der folgenden Eigenschaft (g_0) des Abbildungsgrades angesehen werden:

(g_0) Die Sphäre S^r wurde durch ihre Äquatorsphäre S^{r-1} in die Halbkugeln A und B zerlegt; ebenso die Sphäre S_1^r durch S_1^{r-1} in A_1 und B_1 ; wird dann S^r so in S_1^r abgebildet, daß S^{r-1} in S_1^{r-1} , A in A_1 , B in B_1 abgebildet wird, so hat die Abbildung von S^r in S_1^r denselben Grad wie die Abbildung von S^{r-1} in S_1^{r-1} .

Der Beweis ergibt sich aus den Grundeigenschaften des Abbildungsgrades und darf hier wohl übergangen werden. Wir behaupten, daß die Charakteristik eines $(m + 1)$ -Feldes die folgende Eigenschaft (g) besitzt, welche im Falle $m = 0$ offenbar mit (g_0) äquivalent ist:

(g) Die Sphäre S^{n-m} des R^{n+1} werde durch die Äquatorsphäre S^{n-m-1} in die Hälften A und B zerlegt; S^{n-m-1} liege in der Ebene R^n (ob die ganze S^{n-m} in R^n liegt, ist gleichgültig); auf S^{n-m} sei ein Richtungsfeld \mathfrak{B}_m gegeben, dessen Richtungen auf S^{n-m-1} in R^n liegen, auf A nach der einen, auf B nach der anderen Seite von R^n weg weisen; ferner seien in der abgeschlossenen Vollkugel V^{n-m+1} , die von S^{n-m} begrenzt wird, m Felder $\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_{m-1}$ von Richtungen gegeben, die parallel zu R^n und überall linear unabhängig sind; die Felder $\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_{m-1}, \mathfrak{B}_m$ sollen auf S^{n-m} überall linear unabhängig sein; sie bilden also auf S^{n-m} ein $(m + 1)$ -Feld \mathfrak{B} des R^{n+1} und auf S^{n-m-1} ein $(m + 1)$ -Feld \mathfrak{B}'' des R^n . Behauptung: Die Charakteristik von \mathfrak{B} auf S^{n-m} ist gleich der Charakteristik von \mathfrak{B}'' auf S^{n-m-1} .

Der Beweis wird folgendermaßen erbracht werden: durch eine stetige Abänderung, bei welcher sich nach (a) die beiden zu untersuchenden Charakteristiken nicht ändern, werden die gegebenen Felder in eine solche Lage gebracht, daß man die Charakteristiken nach (d) als Abbildungsgrade deuten kann, und diese Grade werden auf Grund von (g_0) einander gleich sein.

Durchführung des Beweises: Wir benutzen den folgenden Satz von *T. Wazewski*: „In der Vollkugel V (beliebiger Dimension) seien stetige Funktionen

$$v_{\mu\nu}, \quad [\mu = 1, \dots, m; \quad \nu = 1, \dots, n; \quad m < n]$$

so gegeben, daß die Matrix $(v_{\mu\nu})$ durchweg den Rang m hat; dann kann man diese Matrix durch Hinzufügung von $n - m$ weiteren Zeilen, deren Elemente ebenfalls stetige Funktionen in V sind, zu einer quadratischen n -reihigen Matrix ergänzen, deren Determinante nirgends verschwindet⁸⁾.

⁸⁾ *T. Wazewski*, Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues. *Compos. Math.* 2 (1935), 63—68.

Auf Grund dieses Satzes lassen sich in unserer Vollkugel V^{n-m+1} Felder $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_{n-m}$ von Richtungen, die parallel zu R^n sind, so anbringen, daß $\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_{m-1}, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_{n-m}$ in jedem Punkt von V^{n-m+1} linear unabhängig sind.

Wir führen nun in V^{n-m+1} „Polarkoordinaten“ (φ, r) ein: mit φ bezeichnen wir den variablen Punkt auf S^{n-m} , mit r den Abstand vom Mittelpunkt q von V^{n-m+1} . Dem Punkt, der auf dem Strahl $\overrightarrow{q\varphi}$ im Abstand r von q liegt, ordnen wir die Koordinaten (φ, r) zu; den Radius von V^{n-m+1} nehmen wir gleich 1 an; der Punkt φ hat also die Koordinaten $(\varphi, 1)$ und der Punkt q die Koordinaten $(\varphi, 0)$ mit unbestimmtem φ . Die Richtungen der Felder \mathfrak{B}_i und \mathfrak{B}_j denken wir uns durch Vektoren $v_i(\varphi, r), w_j(\varphi, r)$, bzw., wenn $r = 1$ ist, durch $v_i(\varphi), w_j(\varphi)$ gegeben. Mit e bezeichnen wir einen festen Vektor, der senkrecht auf R^n steht. Dann lassen sich die Vektoren v_m auf S^{n-m} in der Gestalt

$$v_m(\varphi) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(\varphi) v_i(\varphi) + \sum_{j=1}^{n-m} b_j(\varphi) w_j(\varphi) + c(\varphi) e$$

darstellen. Der Koeffizient $c(\varphi)$ ist auf der einen der Halbkugeln A, B positiv, auf der anderen negativ und auf S^{n-m-1} gleich 0; da v_0, \dots, v_{m-1}, w_m überall linear unabhängig sind, ist für jeden Punkt φ von S^{n-m-1} wenigstens einer der Koeffizienten $b_j(\varphi)$ von 0 verschieden.

Wir definieren nun $v_m(\varphi, r)$ für $0 \leq r \leq 1$ durch

$$v_m(\varphi, r) = r \sum a_i(\varphi) v_i(\varphi) + \sum b_j(\varphi) w_j(\varphi, r) + c(\varphi) e$$

und betrachten die Vektoren

$$v_0(\varphi, r), \dots, v_{m-1}(\varphi, r), v_m(\varphi, r)$$

auf S^{n-m} in Abhängigkeit von dem Parameter r , der von 1 bis 0 läuft. Wir behaupten: diese $m + 1$ Vektoren sind stets linear unabhängig; in der Tat: die v_i mit $i = 0, \dots, m - 1$ sind nach Voraussetzung unabhängig, und daß $v_m(\varphi, r)$ nie von $v_0(\varphi, r), \dots, v_{m-1}(\varphi, r)$ abhängig ist, folgt, wenn φ auf S^{n-m-1} liegt, daraus, daß dann wenigstens ein $b_j \neq 0$ ist, und wenn φ nicht auf S^{n-m-1} liegt, aus $c \neq 0$. Die Vektoren v_0, \dots, v_m bilden also für jeden Wert von r mit $1 \geq r \geq 0$ auf S^{n-m} ein $(m + 1)$ -Feld $\mathfrak{B}(r)$ des R^{n+1} ; sie bilden aber auch für alle diese r auf S^{n-m-1} ein $(m + 1)$ -Feld $\mathfrak{B}''(r)$ des R^n , da v_m , wenn φ auf S^{n-m-1} liegt, infolge $c(\varphi) = 0$ immer ein Vektor des R^n ist. Auf Grund der Eigenschaft (a) aus Nr. 3 ändern sich die Charakteristiken der Felder $\mathfrak{B}(r)$ und $\mathfrak{B}''(r)$ nicht, während r von 1 bis 0 läuft. Für $r = 1$ handelt es sich um die vorgelegten Felder $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}''$; für $r = 0$ haben wir die Vektoren

$$v_i(\varphi, 0) = v_i(q), \quad i = 0, \dots, m-1,$$

$$v_m(\varphi, 0) = \sum b_j(\varphi) w_j(q) + c(\varphi) e,$$

wobei q wieder den Mittelpunkt von V^{n-m+1} bezeichnet. Für jedes $i < m$ bilden die $v_i(\varphi, 0)$ ein konstantes Richtungsfeld; die Vektoren $v_m(\varphi, 0)$ sind der Ebene R^{n-m+1} parallel, welche von $w_1(q), \dots, w_{n-m}(q), e$ aufgespannt wird; liegt φ auf S^{n-m-1} , so sind die $v_m(\varphi, 0)$ der, in R^{n-m+1} gelegenen, Ebene R^{n-m} parallel, die von den $w_j(q)$ aufgespannt wird. Aus Nr. 3, (d), folgt daher: die Charakteristiken α und α'' von $\mathfrak{B}(0)$ und $\mathfrak{B}''(0)$ sind gleich den Graden derjenigen Abbildungen von S^{n-m} bzw. S^{n-m-1} auf die Richtungskugeln S_1^{n-m} bzw. S_1^{n-m-1} der Räume R^{n-m+1} bzw. R^{n-m} , welche durch die Vektoren $v_m(\varphi, 0)$ vermittelt werden. Diese beiden Abbildungen erfüllen aber, infolge des Verhaltens des Vorzeichens von $c(\varphi)$, die Voraussetzungen des Satzes (g_0); folglich ist $\alpha = \alpha''$, was zu beweisen war.

7. Wie in Nr. 5 angedeutet wurde, werden wir im projektiven Raum P^n spezielle Richtungsfelder zu konstruieren haben. Für die Durchführung dieser Konstruktionen ist es bequem, im euklidischen Raum R^{n+1} statt im P^n zu arbeiten. Die Beziehung zwischen R^{n+1} und P^n besteht ja darin, daß man die Geraden durch den Nullpunkt o des R^{n+1} als die Punkte des P^n deuten kann. Daraus ergibt sich: Ist x ein von o verschiedener Punkt des R^{n+1} und sind in ihm m Vektoren v_1, \dots, v_m angebracht, welche zusammen mit dem Ortsvektor $v_0 = \overrightarrow{ox}$ ein linear unabhängiges System von $m+1$ Vektoren bilden, so entsprechen den v_1, \dots, v_m im P^n m linear unabhängige Richtungen r_1, \dots, r_m , die in dem Punkt x' angebracht sind, welcher x entspricht; sind dagegen v_0, v_1, \dots, v_m linear abhängig, so sind auch r_1, \dots, r_m linear abhängig, oder diese Richtungen sind gar nicht definiert; ferner ist klar: dem Vektor v , der im Punkt x mit den Koordinaten x_0, x_1, \dots, x_n angebracht ist, entspricht im P^n dieselbe Richtung wie, bei beliebigem $\lambda \geq 0$, dem Vektor λv , der im Punkt mit den Koordinaten $\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n$ angebracht ist. Solche Überlegungen legen es nahe, den folgenden Begriff einzuführen: Ein „projektives $(m+1)$ -Feld von Vektoren des R^{n+1} “ ist ein System von $m+1$ Feldern von Vektoren v_0, v_1, \dots, v_m des R^{n+1} , wobei v_0 immer den Ortsvektor (x_0, x_1, \dots, x_n) bezeichnet und die übrigen v_i im ganzen R^{n+1} stetige und homogene Funktionen ersten Grades der Koordinaten x_0, x_1, \dots, x_n sind — (also für jedes λ die Gleichungen $v_i(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda v_i(x_0, x_1, \dots, x_n)$ erfüllen). Dann ist aus dem Vorstehenden ersichtlich: Jedem projektiven $(m+1)$ -Feld \mathfrak{B} von Vektoren des R^{n+1}

entspricht ein m -Feld \mathfrak{F} von Richtungen im P^n ; der Singularitätenmenge von \mathfrak{B} , d. h. der Menge der (von o verschiedenen) Punkte des R^{n+1} , in welchen die Vektoren von \mathfrak{B} linear abhängig sind, entspricht die Singularitätenmenge von \mathfrak{F} .

Nehmen wir jetzt an, daß das Feld \mathfrak{F} einen Singularitätenkomplex besitzt, der eine Ebene P^{m-1} enthält, zu welcher ein bestimmter Index ξ gehört — wie es bei der in Nr. 5 geschilderten Situation der Fall ist. P^{m-1} ist das Bild einer Ebene R^m des R^{n+1} , die in dem Singularitätenkomplex von \mathfrak{B} enthalten ist, und zu der der Index α gehören möge. Wir behaupten, daß $\xi = \alpha$ ist.

Um dies zu beweisen, nehmen wir einen vom Nullpunkt verschiedenen Punkt $x = (x_0, \dots, x_n)$ von R^m ; wir dürfen annehmen, daß $x_n \neq 0$ ist; die Ebene $x_n = \text{const.}$, in welcher x liegt, heiße R^n ; die cartesischen Koordinaten x_0, \dots, x_{n-1} in der Ebene R^n können wir gleichzeitig als lokale cartesische Koordinaten in der Umgebung des Punktes x' von P^n auffassen, welcher dem Punkt x entspricht. Dann wird das m -Feld \mathfrak{F} in der Umgebung von x' im R^n dargestellt durch diejenigen Vektoren v'_1, \dots, v'_m , welche entstehen, wenn man die v_1, \dots, v_m „von v_0 aus auf R^n projiziert“ (man vergleiche zu dieser Ausdrucksweise Nr. 6, (f)). Es sei nun S^{n-m} eine kleine Sphäre im R^n mit dem Mittelpunkt x ; dann ist der Index ξ gemäß seiner Definition die Charakteristik des aus den Vektoren v'_1, \dots, v'_m bestehenden m -Feldes des R^n auf S^{n-m} . Andererseits ist der Index α gemäß seiner Definition die Charakteristik des aus v_0, v_1, \dots, v_m bestehenden $(m+1)$ -Feldes des R^{n+1} auf S^{n-m} . Die behauptete Gleichheit $\alpha = \xi$ besteht daher auf Grund von Nr. 6, (f).

Damit ist nicht nur die Konstruktion von m -Feldern, sondern es sind auch die notwendigen Index-Betrachtungen vom P^n in den R^{n+1} verlegt, und das in Nr. 5 formulierte Programm läßt sich jetzt folgendermaßen aussprechen:

Es sei $1 < m < n$ bei beliebigem $n > 2$. Es wird ein spezielles projektives $(m+1)$ -Feld \mathfrak{B} von Vektoren des R^{n+1} angegeben werden, dessen Singularitätenmenge aus zwei Ebenen R_1^m und R_2^m besteht, zu welchen die Indizes ξ_1 bzw. ξ_2 gehören mögen; ferner wird im R^n erstens ein projektives m -Feld \mathfrak{B}' angegeben werden, das auf einer Ebene R^{m-1} singularär wird, und zweitens ein projektives $(m+1)$ -Feld \mathfrak{B}'' , das auf einer Ebene R^m singularär wird; die zu R^{m-1} und R^m gehörigen Indizes seien ξ' bzw. ξ'' ; dann wird gezeigt werden, daß $\xi' = \xi_1$ und $\xi'' = \xi_2$ ist.

8. Dieses Programm führen wir jetzt durch und bedienen uns der soeben benutzten Bezeichnungen; wir bezeichnen auch wie bisher die

$$R^{m-1}: x_0 = x_1 = \dots = x_{n-m} = 0,$$

(also auf dem Schnitt von R^n und R_1^m).

Für jeden Punkt x von R^n verstehen wir unter \bar{v}_m die Projektion des in x angebrachten Vektors v_m auf R^n , also

$$\bar{v}_m = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-m-1} \ 0).$$

\mathfrak{B}'' sei nun das Feld der in den Punkten von R^n angebrachten Vektoren $v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, \bar{v}_m$. Wieder dieselbe Determinanten-Betrachtung wie oben zeigt: \mathfrak{B}'' wird singular nur auf der Ebene

$$R^m: x_0 = x_1 = \dots = x_{n-m-1} = 0.$$

Für die Untersuchung der Indizes ξ_1 und ξ' fassen wir die Umgebung des folgenden Punktes o_1 ins Auge:

$$o_1: x_{n-1} = 1, \quad x_j = 0 \quad \text{für } j \neq n-1;$$

er liegt auf R_1^m , aber nicht auf R_2^m ; die in ihm auf R_1^m senkrecht stehende $(n+1-m)$ -dimensionale Ebene, also die Ebene

$$E_1^{n+1-m}: x_{n-1} = 1, \quad x_j = 0 \quad \text{für } n-m < j < n-1 \quad \text{und für } j = n,$$

ist fremd zu R_2^m und hat mit R_1^m nur den Punkt o_1 gemeinsam; die Charakteristik des Feldes \mathfrak{B} auf einer in E_1^{n+1-m} gelegenen Sphäre mit dem Mittelpunkt o_1 ,

$$S_1^{n-m}: x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-m}^2 = r^2, \quad r > 0,$$

ist daher gleich dem Index ξ_1 .

Die Ebene E_1^{n+1-m} liegt in R^n ; sie steht senkrecht auf R^{m-1} und hat daher mit R^{m-1} nur den Punkt o_1 gemeinsam; daher ist die Charakteristik des Feldes \mathfrak{B}' auf der Sphäre S_1^{n-m} gleich dem Index ξ' .

Den Feldern \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' sind auf S_1^{n-m} die Vektoren v_0, v_1, \dots, v_{m-1} gemeinsam, und diese liegen in dem Raum R^n ; das Feld \mathfrak{B} entsteht aus \mathfrak{B}' durch Hinzufügung des Vektors v_m , der infolge der Bedingung $x_{n-1} = 1$ überall aus dem Raum R^n herauszeigt; aus Nr. 6, (b'), folgt daher die Gleichheit der Charakteristiken von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' auf S_1^{n-m} . Damit ist $\xi_1 = \xi'$ bewiesen.

Um ξ_2 und ξ'' zu untersuchen, betrachten wir die Umgebung des Punktes

$$o_2: x_{n-m} = 1, \quad x_j = 0 \quad \text{für } j \neq n-m;$$

er liegt auf R_2^m , aber nicht auf R_1^m ; die in ihm auf R_2^m senkrecht stehende $(n+1-m)$ -dimensionale Ebene, also die Ebene

$$E_2^{n+1-m} : x_{n-m} = 1, \quad x_j = 0 \text{ für } n-m < j < n-1 \text{ und für } j = n,$$

ist fremd zu R_1^m und hat mit R_2^m nur den Punkt o_2 gemeinsam; die Charakteristik des Feldes \mathfrak{B} auf einer in E_2^{n+1-m} gelegenen Sphäre mit dem Mittelpunkt o_2 ,

$$S_2^{n-m} : x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-m-1}^2 + x_{n-1}^2 = r^2, \quad r > 0,$$

ist daher gleich dem Index ξ_2 .

Fügen wir zu den Gleichungen der Ebene E_2^{n+1-m} noch die Gleichung $x_{n-1} = 0$ hinzu, so erhalten wir die in E_2^{n+1-m} gelegene Ebene

$$E^{n-m} : x_{n-m} = 1, \quad x_j = 0 \text{ für } j > n-m;$$

das ist die im Punkte o_2 auf R^m senkrecht stehende $(n-m)$ -dimensionale Teilebene des R^n . Der Index ξ'' ist daher gleich der Charakteristik des Feldes \mathfrak{B}'' auf einer Sphäre S^{n-m-1} , die in E^{n-m} liegt und o_2 zum Mittelpunkt hat; als diese Sphäre wählen wir die Äquatorsphäre von S_2^{n-m} , die durch $x_{n-1} = 0$ bestimmt ist.

Auf S^{n-m-1} sind \mathfrak{B} und \mathfrak{B}'' miteinander identisch. Wir behaupten, daß sich der Satz (g) aus Nr. 6 anwenden läßt; in der Tat: S^{n-m-1} liegt in R^n (sogar S_2^{n-m} liegt in R^n); da die n ersten Grundvektoren e_0, e_1, \dots, e_{n-1} des R^{n+1} parallel zu R^n sind, da ferner die $(n+1)$ -te Komponente des Vektors v_m gleich x_{n-1} ist, und da die beiden Halbkugeln A und B , in die S_2^{n-m} durch S^{n-m-1} zerlegt wird, durch die Ungleichungen $x_{n-1} \geq 0$ und $x_{n-1} \leq 0$ charakterisiert sind, weisen die Vektoren v_m auf A nach der einen, auf B nach der anderen Seite von R^n weg, während sie auf S^{n-m-1} selbst in R^n liegen; die Vektoren v_0, v_1, \dots, v_{m-1} liegen auf E_2^{n+1-m} immer in R^n ; sie sind linear abhängig nur auf der Ebene R^{m-1} , und da diese fremd zu E_2^{n+1-m} ist, sind sie in der von S_2^{n-m} begrenzten, in E_2^{n+1-m} gelegenen Vollkugel linear unabhängig; somit sind alle Voraussetzungen des Satzes (g) erfüllt, und folglich ist $\xi_2 = \xi''$.

Damit ist alles bewiesen.

9. Wir ziehen jetzt eine algebraische Folgerung aus dem Satz B (Nr. 1). Es seien A_1, \dots, A_s reelle Matrizen mit je n Zeilen und r Kolonnen; sie spannen eine lineare Schar von Matrizen

$$A(y_1, \dots, y_s) = y_1 A_1 + \dots + y_s A_s$$

auf; die Matrix $A(0, \dots, 0)$ ist die Nullmatrix; wir sagen, die Schar habe durchweg den Rang r , wenn alle Matrizen $A(y_1, \dots, y_s)$ mit $(y_1, \dots, y_s) \neq (0, \dots, 0)$ den Rang r haben.

Satz E. Für die Existenz einer linearen Schar, welche von s reellen Matrizen mit n Zeilen und r Kolonnen aufgespannt wird und durchweg den Rang r hat, ist die folgende Bedingung notwendig: alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\mu}$ mit $n - r < \mu < s$ sind gerade.

Beweis. Wir setzen voraus, daß die Matrizen A_1, \dots, A_s eine Schar der genannten Art aufspannen; wir werden zeigen, daß dann im projektiven Raum P^{n-1} ein $(s - 1)$ -Feld existiert, in dessen Regularitätsbereich eine Ebene Pr^{-1} liegt; dann wird auf Grund des Satzes B der Satz E bewiesen sein.

Ist Q irgend eine quadratische n -reihige nicht-singuläre Matrix, so erfüllen auch die Matrizen QA_1, \dots, QA_s die Voraussetzung; da $A_1 = A(1, 0, \dots, 0)$ den Rang r hat, kann man Q offenbar so wählen, daß $QA_1 = (\delta_{v\varrho})$ wird, wobei $\delta_{\varrho\varrho} = 1$ und $\delta_{v\varrho} = 0$ für $v \neq \varrho$ ist; indem wir statt QA_σ wieder A_σ schreiben, dürfen wir von vornherein annehmen, daß $A_1 = (\delta_{v\varrho})$ ist. Es sei

$$A_\sigma = (a_{v\varrho\sigma}) ;$$

dann ist also $a_{v\varrho 1} = \delta_{v\varrho}$ für $v = 1, \dots, n$ und $\varrho = 1, \dots, r$. Daraus, daß unsere Matrizen den Rang r haben, folgt übrigens $r < n$.

Wir setzen

$$\sum_{\varrho=1}^r a_{v\varrho\sigma} x_\varrho = v_{\sigma v} (x_1, \dots, x_r)$$

und betrachten die, von den Parametern x_1, \dots, x_r abhängigen Vektoren

$$v_\sigma = (v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma n}) , \quad \sigma = 1, \dots, s ,$$

im Raume R^n ; dann ist speziell $v_1 = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$. Wir behaupten, daß die Vektoren v_1, v_2, \dots, v_s nur für $(x_1, \dots, x_r) = (0, \dots, 0)$ linear abhängig sind; in der Tat: es sei $(y_1, \dots, y_s) \neq (0, \dots, 0)$ und $\sum y_\sigma v_\sigma = 0$; diese Relation ist gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$\sum_{\varrho, \sigma} a_{v\varrho\sigma} x_\varrho y_\sigma = 0 , \quad v = 1, \dots, n ,$$

$$[\varrho = 1, \dots, r ; \quad \sigma = 1, \dots, s] ,$$

die wir auch so schreiben können:

$$\sum_{\varrho} x_\varrho (\sum_{\sigma} y_\sigma a_{v\varrho\sigma}) = 0 , \quad v = 1, \dots, n ;$$

da aber die Kolonnen der Matrix $A(y_1, \dots, y_s)$ linear unabhängig sind, folgt hieraus $(x_1, \dots, x_r) = (0, \dots, 0)$.

Jetzt seien $x_1, \dots, x_r, \dots, x_n$ Koordinaten im R^n . Der Ortsvektor $v_0 = (x_1, \dots, x_n)$ zusammen mit den Vektoren v_2, \dots, v_s — ohne den Vektor v_1 — bilden ein projektives s -Feld \mathfrak{B} im R^n ; (dabei hängen v_2, \dots, v_s nur von den ersten r Koordinaten ab). Die soeben festgestellte Unabhängigkeitseigenschaft der Vektoren v_1, v_2, \dots, v_s bedeutet: auf der Ebene R^r , die durch $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ gegeben ist, besitzt das Feld \mathfrak{B} keine andere Singularität als den Nullpunkt o . Das $(s-1)$ -Feld \mathfrak{F} im P^{n-1} , das dem Feld \mathfrak{B} entspricht, besitzt daher keine Singularität auf der Ebene P^{r-1} , welche R^r entspricht; P^{r-1} gehört also zum Regularitätsbereich von \mathfrak{F} . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Besonderes Interesse verdient der Fall quadratischer Matrizen, also der Fall $r = n$; dann lautet die Behauptung des Satzes E : alle $\binom{n}{\mu}$ mit $\mu = 1, 2, \dots, s-1$ sind gerade; auf Grund der Überlegung, die in Nr. 1 vom Satz B zum Satz A führte, können wir daher den folgenden Satz aussprechen⁹⁾:

Es sei $n = 2^\lambda \cdot u$, u ungerade, und es existiere eine lineare Schar von reellen quadratischen n -reihigen Matrizen

$$A(y_1, \dots, y_s) = y_1 A_1 + \dots + y_s A_s,$$

welche, abgesehen von $A(0, \dots, 0)$, sämtlich nicht-singulär sind; dann ist $s \leq 2^\lambda$.

Insbesondere kann die Maximalzahl $s = n$ höchstens dann erreicht werden, wenn n eine Potenz von 2 ist; derartige Scharen sind für $n = 1, 2, 4, 8$, aber nicht für größere n bekannt.

Schließlich sei noch eine andere Formulierung des Satzes E angegeben:

Es existiere ein solches System von n reellen Bilinearformen

$$f_\nu(x; y) = \sum_{\varrho, \sigma} a_{\nu \varrho \sigma} x_\varrho y_\sigma, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

in den Variablenreihen

$$x = (x_1, \dots, x_r), \quad y = (y_1, \dots, y_s),$$

daß das Gleichungssystem

$$f_\nu(x; y) = 0, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

⁹⁾ Der Satz ist für $\lambda = 0$ elementar, für $\lambda = 1$ bewiesen in Diss., Satz 27, und für $\lambda < 4$ angekündigt in meiner Note in den Verh. d. Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft 1935, S. 277—278.

keine anderen Lösungen $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)$ besitzt als die trivialen mit $x = (0, \dots, 0)$ oder $y = (0, \dots, 0)$. Dann sind alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{\mu}$ mit $n - r < \mu < s$ gerade.

In der Tat ist, wie wir schon im Beweis des Satzes *E* feststellten, das soeben formulierte Verhalten der Formen $f_\nu(x; y)$ gleichbedeutend damit, daß die Kolonnen jeder Matrix $A(y_1, \dots, y_s)$ mit $(y_1, \dots, y_s) \neq (0, \dots, 0)$ linear unabhängig sind, daß diese Matrizen also sämtlich den Rang r haben ¹⁰).

(Eingegangen den 7. Dezember 1940.)

¹⁰) Die Sätze aus Nr. 9 (sowie die Verallgemeinerungen, die entstehen, wenn man in der zweiten Formulierung des Satzes *E* die Linearformen durch ungerade stetige Funktionen ersetzt) sind auf einem anderen, aber ebenfalls topologischen Wege bewiesen und samt weiteren Anwendungen und Spezialisierungen ausführlich dargestellt in der nachstehenden Arbeit von *H. Hopf*, Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra. Herrn *F. Behrend*, dem Herr Hopf und ich diese Sätze mitgeteilt hatten, ist es gelungen, Beweise zu finden, die in präziserem Sinne „algebraisch“ sind: *F. Behrend*, Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen. *Compos. Math.* 7 (1939), 1—19. — In der Arbeit von *H. Hopf* (Anhang I) findet man übrigens auch neue Beweise unserer Sätze *A* und *B*.

Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra

VON HEINZ HOPF, Zürich

E. Stiefel hat seine allgemeine Theorie der Systeme von Richtungsfeldern in geschlossenen Mannigfaltigkeiten¹⁾ speziell auf die projektiven Räume angewandt und ist dadurch zu Ergebnissen gelangt, die nicht nur vom geometrischen Gesichtspunkt aus interessant sind, sondern die auch neue und merkwürdige Sätze der reellen Algebra enthalten²⁾. Im folgenden leite ich dieselben algebraischen Sätze, sowie etwas allgemeinere, mit einer ebenfalls topologischen, jedoch von der Stiefelschen verschiedenen Methode her, indem ich den Hauptsatz, der die übrigen Sätze umfaßt, durch Anwendung der Theorie des Umkehrungs-Homomorphismus der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten³⁾ beweise.

Dieser Beweis bildet den Inhalt des § 2. Im § 1 wird der Hauptsatz (Satz I) formuliert, und es werden Folgerungen aus ihm gezogen; topologische Betrachtungen kommen im § 1 nicht vor.

Der Satz I handelt von stetigen Funktionen; er wird aber zu einem *algebraischen* Satz, sobald man diese Funktionen zu Polynomen (in mehreren Veränderlichen) spezialisiert; und dann wieder werden die Ergebnisse besonders einfach und besonders interessant, wenn die Polynome Bilinearformen sind. Nachdem diese Sätze, die algebraischen Charakter haben — sie handeln von der Existenz von Nullstellen gewisser Gleichungssysteme —, auf topologischem Wege entdeckt worden waren, entstand die Aufgabe, auch Beweise zu finden, die man mit Recht als „algebraisch“ bezeichnen dürfte. Diese Aufgabe — die nicht nur mir, sondern auch anderen Mathematikern als schwierig erschien — ist von F. Behrend gelöst worden⁴⁾.

Herr Behrend hat mich auf die Frage aufmerksam gemacht, welche

¹⁾ E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comment. Math. Helvet. 8 (1936), 305—353.

²⁾ A. a. O., 349, sowie besonders: E. Stiefel, Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra, Comment. Math. Helvet. 13 (1941), 201—218.

³⁾ H. Hopf, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Crelles Journ. 163 (1930), 71—88. — Neue Begründung und Verallgemeinerung: H. Freudenthal, Zum Hopfschen Umkehrhomomorphismus, Ann. of Math. 38 (1937), 847—853; ferner: A. Komatu, Über die Ringdualität eines Kompaktums, Tôhoku Math Journ. 43 (1937), 414—420; H. Whitney, On Products in a complex, Ann. of Math. 39 (1938), 397—432 (Theorem 6).

⁴⁾ F. Behrend, Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen, Compos. Math. 7 (1939), 1—19.

Verschärfung unser Hauptsatz gestatte, wenn man die in ihm auftretenden Funktionen zu *symmetrischen* Bilinearformen spezialisiert. Dieses Problem scheint sich sowohl der Stiefelschen Methode der Richtungsfelder als auch meiner Methode des Umkehrungs-Homomorphismus zu entziehen. Aber mit einer dritten topologischen Methode habe ich einen — allerdings nur schwachen — Fortschritt in der gewünschten Richtung erzielt. Hierüber berichte ich kurz im „Anhang II“; die ausführliche Darstellung ist an anderer Stelle erschienen.

Im „Anhang I“ wird gezeigt, daß nicht nur die algebraischen, sondern auch gewisse der geometrischen Sätze von Stiefel — nämlich notwendige Bedingungen für die Existenz von linear unabhängigen Systemen stetiger Richtungsfelder in den projektiven Räumen — aus dem Satz I abgeleitet werden können.

§ 1. Formulierung des Hauptsatzes; algebraische Folgerungen

1. *Definite Systeme ungerader Funktionen in zwei Variablenreihen.* Es sei f eine reelle Funktion der $r + s$ reellen Veränderlichen

$$x_1, \dots, x_r; \quad y_1, \dots, y_s; \quad r \geq 1, \quad s \geq 1; \quad (1)$$

und zwar sei sie erklärt und stetig für

$$\sum_{\rho=1}^r x_\rho^2 = 1, \quad \sum_{\sigma=1}^s y_\sigma^2 = 1; \quad (2)$$

sie erfülle die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} f(-x_1, \dots, -x_r; y_1, \dots, y_s) &= f(x_1, \dots, x_r; -y_1, \dots, -y_s) \\ &= -f(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s). \end{aligned} \quad (3)$$

Dann sagen wir kurz: „ f ist eine ungerade Funktion der Variablenreihen (1).“

Beispiele sind diejenigen reellen algebraischen Formen in den Variablen (1), welche homogen in den x_ρ von einer ungeraden Dimension sowie homogen in den y_σ von einer ungeraden Dimension sind; die einfachsten Fälle sind die Bilinearformen in den beiden Variablenreihen.

Ein System

$$f_1, \dots, f_n \quad (4)$$

ungerader Funktionen der Variablen (1) soll „definit“ heißen, wenn das Gleichungssystem

$$f_1 = 0, \dots, f_n = 0 \quad (4_0)$$

in dem durch (2) gegebenen Bereich der Variablen (1) keine Lösung besitzt.

Besteht das System (4) aus Formen der oben besprochenen Art, so sind die Gleichungen (4₀) immer erfüllt, wenn

$$\text{entweder } x_1 = \dots = x_r = 0 \quad \text{oder} \quad y_1 = \dots = y_s = 0 \quad (5)$$

ist; infolge der Homogenität der f_ν ist die Definitheit des Systems (4) *gleichbedeutend* damit, daß diese trivialen Lösungen (5) von (4₀) die einzigen sind (die Beschränkung auf den Bereich (2) ist also nicht notwendig).

Ein Beispiel eines definiten Systems bei beliebigen r und s wird durch die Produkte

$$x_\varrho y_\sigma, \quad \varrho = 1, \dots, r, \quad \sigma = 1, \dots, s$$

geliefert; hier ist $n = rs$. Ein weiteres Beispiel, und zwar mit

$$n = r + s - 1$$

(also mit $n < rs$ für $r > 1, s > 1$), ist das folgende:

$$\begin{aligned} f_\nu &= \sum x_\varrho y_\sigma, \quad \varrho + \sigma = \nu + 1, \\ 1 \leq \varrho \leq r, \quad 1 \leq \sigma \leq s, \quad \nu &= 1, \dots, r + s - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Die Definitheit dieses Systems, also die Tatsache, daß die zugehörigen Gleichungen (4₀) nur die trivialen Lösungen (5) besitzen, bestätigt man leicht durch vollständige Induktion in bezug auf die Anzahl $r + s$ aller Variablen.

Für gewisse r und s gibt es aber auch definite Systeme, die aus weniger als $r + s - 1$ ungeraden Funktionen in den Variablen (1) bestehen; z. B. bilden für $r = s = 2$ bereits die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ f_2 &= x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{aligned} \quad (7)$$

ein definites System.

Daher entsteht die Frage: „Welches ist, bei gegebenen r und s , die *kleinste* Zahl n , für welche es ein definites System von n ungeraden Funktionen in den Variablenreihen (1) gibt?“ Diese Minimalzahl heie $n^*(r, s)$.⁵⁾

⁵⁾ Ohne die Forderung, daß die Funktionen f_ν ungerade seien, ist die Frage uninteressant; denn die eine Funktion $f = \sum x_\varrho^2 \cdot \sum y_\sigma^2$ bildet immer ein definites System.

Hat man für ein Paar r, s die Zahl $n^*(r, s)$, oder auch nur eine untere Schranke für $n^*(r, s)$, bestimmt, so hat man damit einen Existenzsatz für Lösungen von Gleichungen gewonnen: denn aus $n < n^*(r, s)$ folgt, daß das Gleichungssystem (4₀) eine Lösung in dem Bereich (2) besitzt; sind die f_ν Formen, so ist dies, wie schon betont, gleichbedeutend mit der Existenz einer nicht-trivialen, d. h. von (5) verschiedenen, Lösung.

2. *Der Hauptsatz.* Die Zahl $n^*(r, s)$ kann ich zwar im allgemeinen nicht bestimmen; jedoch liefert der nachstehende Satz Beschränkungen nach unten für n^* . ^{5a)}

Satz I. Es gebe ein definites System von n ungeraden Funktionen in den Variablenreihen x_1, \dots, x_r und y_1, \dots, y_s . Dann ist die folgende Bedingung erfüllt:

$$\text{Alle Binomialkoeffizienten } \binom{n}{k} \text{ mit} \\ n - r < k < s \tag{8}$$

sind gerade. ^{5b)}

Diese Bedingung soll kurz mit $\mathfrak{B}(r, s; n)$ bezeichnet werden. Aus der Symmetrie-Eigenschaft

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

der Binomialkoeffizienten folgt, daß, wie zu erwarten, $\mathfrak{B}(r, s; n)$ symmetrisch in r und s ist, daß also unter der Voraussetzung des Satzes I auch alle $\binom{n}{k}$ mit $n - s < k < r$ gerade sind. (8')

Der Beweis des Satzes I wird im § 2 geführt werden.

Eine erste Folgerung aus dem Satz I ergibt sich, wenn man bedenkt, daß $\binom{n}{0} = 1$ ist; unter der Voraussetzung des Satzes I kann nämlich daher (8) nicht durch $k = 0$ befriedigt werden, es kann also nicht $n - r < 0$, sondern es muß $n - r \geq 0$, also $n \geq r$ sein; und ebenso, nach (8'): $n \geq s$. Daher und infolge der Existenz des definiten Systems (6) gilt

$$\max. (r, s) \leq n^*(r, s) \leq r + s - 1. \tag{9}$$

^{5a)} Interessante Beschränkungen von n^* nach oben gibt *Behrend*, a. a. O.⁴), § 4.

^{5b)} Für bilineare Formen f_ν von *Stiefel*, a. a. O.³), für beliebige Formen ungerader Grade von *Behrend*, a. a. O.⁴), bewiesen.

3. Spezialisierungen von r, s, n .

(a) Im Falle $s = 1$ wird, wenn $n \geq r$ ist, (8) durch kein k befriedigt; das heißt:

Satz Ia. Für $s = 1$ ist die Behauptung des Satzes I gleichbedeutend mit: $n \geq r$.

Dieser Satz ist äquivalent mit dem nachstehenden Satz B, der eine bekannte Konsequenz eines Satzes von Borsuk ist; in ihm sind die g_ν Funktionen der einen Variablenreihe x_1, \dots, x_r , welche für $\sum x_\alpha^2 = 1$ stetig und ungerade sind.

Satz B. Wenn die Funktionen g_1, \dots, g_n keine gemeinsame Nullstelle haben, so ist $n \geq r$. ^{a)}

Die Äquivalenz der beiden Sätze ist leicht zu sehen: sind Funktionen f_ν vorgelegt, welche die Voraussetzung von Ia erfüllen, so setze man in ihnen die Variable $y_1 = 1$ und wende auf die dadurch entstehenden Funktionen g_ν den Satz B an; sind Funktionen g_ν gegeben, die die Voraussetzung des Satzes B erfüllen, so wende man Satz Ia auf die Funktionen $f_\nu = y_1 \cdot g_\nu$ an.

Somit ist unser Satz I eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes B. ^{a)}

(b) Wir stellen eine Bedingung auf, die *hinreichend* dafür ist, daß die Zahl n^* mit ihrer durch (9) gegebenen *oberen* Schranke zusammenfällt; ob die Bedingung hierfür auch *notwendig* ist, weiß ich nicht.

Es sei $n^*(r, s) < r + s - 1$; dann gibt es — da man zu einem definiten System immer beliebige Funktionen hinzufügen kann, ohne die Definitheit zu zerstören — gewiß ein definites System mit $n = r + s - 2$; also ist $\mathfrak{B}(r, s; r + s - 2)$ erfüllt, das heißt: $\binom{r + s - 2}{k}$ ist gerade für $s - 2 < k < s$, also für $k = s - 1$. Folglich:

Satz Ib. Ist der Binomialkoeffizient

$$\binom{r + s - 2}{s - 1} = \binom{r + s - 2}{r - 1}$$

ungerade, so ist $n^*(r, s) = r + s - 1$.

^{a)} *Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935), 485, Satz VIII.

^{a)} Da der Satz B bekannt ist, darf man im Beweis des Satzes I auf den Fall $s = 1$ (und ebenso auf den Fall $r = 1$) verzichten. Wir werden dies nicht tun, müssen aber einige Male (Fußnoten b), c), d), e)) auf Modifikationen hinweisen, welche durch die beiden genannten Fälle bedingt sind. Ausschließen wollen wir jedoch den ganz trivialen Fall $r = s = 1$; in ihm lautet die Behauptung des Satzes I nur: $n \geq 1$.

Die Voraussetzung des Satzes Ib ist z. B. erfüllt, wenn r ungerade und $s = 2$ ist.

(c) Wir stellen eine Bedingung auf, die *notwendig* dafür ist, daß die Zahl n^* mit ihrer durch (9) gegebenen *unteren* Schranke zusammenfällt; ob die Bedingung hierfür auch hinreichend ist, ist fraglich.

Es gebe ein definites System mit $n = s$; dann sind nach (8') alle $\binom{n}{k}$ gerade für $0 < k < r$; das ist die Bedingung $\mathfrak{B}(r, n; n)$; um ihre Bedeutung festzustellen, schreiben wir n in der Form

$$n = 2^\lambda \cdot u, \quad u \text{ ungerade}, \quad (10)$$

und betrachten die binomische Entwicklung von $(1+t)^n$, wobei t eine Unbestimmte ist:

$$(1+t)^n = ((1+t)^{2^\lambda})^u,$$

also modulo 2:

$$(1+t)^n \equiv (1+t^{2^\lambda})^u \equiv 1 + t^{2^\lambda} + \dots + t^n;$$

hieraus ist ersichtlich:

$$\binom{n}{2^\lambda} \not\equiv 0 \pmod{2};$$

unter der Bedingung $\mathfrak{B}(r, n; n)$ ist daher *nicht* $0 < 2^\lambda < r$, also ist

$$r \leq 2^\lambda. \quad (11)$$

Folglich:

Satz Ic. Wenn es ein definites System mit $n = s$ gibt — mit anderen Worten: wenn $n^*(r, s) = s$ ist —, so ist r durch (11) beschränkt, wobei 2^λ durch (10) bestimmt ist.

(d) Es sei $r = s$. Die Bedingung $\mathfrak{B}(r, r; n)$ lautet: $\binom{n}{k}$ ist gerade für $n - r < k < r$. Um diese Bedingung zu untersuchen, setzen wir

$$n = 2^\mu + m, \quad 0 \leq m < 2^\mu,$$

und behaupten:

$$\binom{n}{m} \not\equiv 0 \pmod{2}. \quad (12)$$

Für $m = 0$ ist dies trivial; es sei $m > 0$; dann betrachten wir wieder $(1+t)^n$ modulo 2:

$$\begin{aligned} (1+t)^n &= (1+t)^{2^\mu} \cdot (1+t)^m \equiv (1+t^{2^\mu}) \cdot (1 + \dots + t^m) \equiv \\ &\equiv 1 + \dots + t^m + t^{2^\mu} + \dots + t^n, \end{aligned}$$

es gilt also (12).

Unter der Bedingung $\mathfrak{B}(r, r; n)$ ist daher nicht $n - r < m < r$, also nicht gleichzeitig $r > n - m$ und $r > m$, also, da $n - m = 2^\mu > m$ ist, jedenfalls nicht $r > 2^\mu$; es ist also $2^\mu \geq r$. Wenn

$$2^{e-1} < r \leq 2^e \tag{13}$$

ist, so ist also $2^\mu \geq 2^e$, und folglich $n \geq 2^e$. Somit gilt

Satz Id. Ein definites System stetiger ungerader Funktionen in zweimal r Variablen x_1, \dots, x_r und y_1, \dots, y_r besteht aus wenigstens 2^e Funktionen, wobei ϱ durch (13) bestimmt ist.

(e) In jedem der Sätze Ic und Id ist enthalten:

Satz Ie. Ein definites System von n stetigen ungeraden Funktionen der zweimal n Variablen x_1, \dots, x_n und y_1, \dots, y_n ist höchstens dann möglich, wenn n eine Potenz von 2 ist.

Ein Beispiel hierzu mit $n = 2$ ist das System (7); über weitere Beispiele zum Satz Ie sowie zum Satz Ic wird in der nächsten Nummer etwas gesagt werden.

4. Der Satz von Hurwitz-Radon. Ein System (4) von Bilinearformen

$$f_\nu = \sum_{\varrho, \sigma} a_{\varrho\sigma\nu} x_\varrho y_\sigma, \quad \nu = 1, \dots, n, \tag{14}$$

in den Variablen (1) ist gewiß dann definit, wenn die Gleichung

$$\sum f_\nu^2 = \sum x_\varrho^2 \cdot \sum y_\sigma^2 \tag{15}$$

(als Identität in den x_ϱ und y_σ) erfüllt ist. Für diesen Spezialfall und unter der weiteren Voraussetzung

$$s = n$$

ist der maximale Wert $r^*(n)$ von r , der bei gegebenem n möglich ist, durch Hurwitz und durch Radon bestimmt worden⁷⁾:

Man stelle n in der Form

$$n = 16^\alpha \cdot 2^\beta \cdot u, \quad 0 \leq \beta \leq 3, \quad u \text{ ungerade,}$$

dar; dann ist

$$r^*(n) = 2^\beta + 8\alpha. \tag{16}$$

⁷⁾ A. Hurwitz, Über die Komposition der quadratischen Formen, Math. Ann. 88 (1923), 1—25 (Math. Werke, Bd. II, 641—666). — J. Radon, Lineare Scharen orthogonaler Matrizen, Abh. math. Sem. Hamburg 1 (1922), 1—14. — Die obige Formulierung stammt von Radon.

Für diejenigen n , die nicht durch 16 teilbar sind, in denen also $\alpha = 0$ ist, ist derjenige Teil dieses Satzes, welcher besagt, daß der Wert (16) durch kein r übertroffen werden kann, in unserem Satz Ic enthalten. Der andere Teil des Hurwitz-Radonschen Satzes, durch welchen die Existenz von Lösungen (14) der Gleichung (15) mit dem durch (16) gegebenen Wert $r = r^*$ — (und mit $s = n$) — festgestellt wird, zeigt, daß die Schranke (11) in unserem Satz Ic wenigstens für diejenigen n nicht verbessert werden kann, die $\not\equiv 0 \pmod{16}$ sind.

Für $r = s = n$ geht der obige Satz in den berühmten Satz von Hurwitz über⁸⁾:

Identitäten (15) für Bilinearformen (14) mit $r = s = n$ existieren nur für $n = 1, 2, 4, 8$.

Zu unserem Satz Ie gibt es also für $n = 2^\lambda$ mit $\lambda > 3$ kein Beispiel vom Typus (14), (15); es sind für diese n überhaupt keine definiten Systeme von n ungeraden Funktionen in zweimal n Variablen bekannt. ⁹⁾

5. *Matrizen ungerader Funktionen einer Variablenreihe.* Unter einer ungeraden Funktion der Variablen

$$x_1, \dots, x_r \tag{1}$$

soll immer eine solche reelle Funktion g dieser Variablen verstanden werden, welche für

$$\sum_{\varrho=1}^r x_\varrho^2 = 1 \tag{2}$$

erklärt und stetig ist und die Funktionalgleichung

$$g(-x_1, \dots, -x_r) = -g(x_1, \dots, x_r) \tag{3}$$

erfüllt. Wir betrachten eine Matrix, die aus derartigen ungeraden Funktionen $g_{\sigma\nu}$ besteht:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{s1} & \dots & g_{sn} \end{pmatrix}.$$

⁸⁾ A. Hurwitz, Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1898, 309—316 (Math. Werke, Bd. II, 565—571).

⁹⁾ Übrigens besteht ein prinzipieller Unterschied zwischen den Hurwitz-Radonschen und unseren Sätzen: jene gelten, wie aus den beiden Arbeiten von Hurwitz hervorgeht, nicht nur für reelle, sondern auch für komplexe Bilinearformen, allgemeiner sogar für solche, deren Koeffizienten einem beliebigen Körper, dessen Charakteristik $\neq 2$ ist, angehören.

Satz II. Dafür, daß die Matrix G durchweg den Rang s hat, ist die Bedingung $\mathfrak{B}(r, s; n)$ notwendig.

Denn wenn der Rang durchweg s ist, so bilden die linearen Verbindungen

$$f_\nu(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) = \sum_{\sigma=1}^s y_\sigma g_{\sigma\nu}, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

ein definites System ungerader Funktionen im Sinne von Nr. 1.

Besonders naheliegend ist die Betrachtung quadratischer Matrizen G , also solcher, für welche $s = n$ ist; für sie ergibt sich aus Satz I c, analog wie sich Satz II aus Satz I ergab:

Satz II c. Eine n -reihige quadratische Matrix

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

deren Elemente ungerade Funktionen in den r Variablen (1_x) sind, kann höchstens dann durchweg nicht-singulär sein, wenn die Anzahl r der Variablen nicht größer ist als die größte Potenz von 2, die in n aufgeht.

Hierin ist enthalten:

Satz II e. Die im Satz II c genannte Matrix G kann, falls überdies $r = n$ ist, höchstens dann durchweg nicht-singulär sein, wenn n eine Potenz von 2 ist.

Beispiele derartiger nicht-singulärer Matrizen mit $r = n$ erhält man für $n = 1, 2, 4, 8$, indem man

$$g_{\sigma\nu} = \sum_{\varrho} a_{\varrho\sigma\nu} x_{\varrho}$$

setzt, wobei die $a_{\varrho\sigma\nu}$ die Koeffizienten derjenigen Bilinearformen (14) sind, welche die Identitäten (15) — mit $r = s = n$ — erfüllen¹⁰⁾; Beispiele mit größeren n sind nicht bekannt.

6. 11) *Lineare Scharen quadratischer Matrizen aus reellen Zahlen.* Wir machen eine Anwendung des Satzes II c. Mit A_{ϱ} sollen n -reihige quadra-

¹⁰⁾ Auf der vorletzten Seite der Arbeit⁹⁾ von Hurwitz sind diese Matrizen angegeben.

¹¹⁾ Die Sätze der Nummern 6 und 7 folgen aus dem Spezialfall des Satzes I, in dem die f_ν bilineare Formen sind; sie ergeben sich daher auch aus den in der Einleitung genannten Arbeiten von Stiefel und von Behrend; insbesondere liefert die Arbeit von Behrend algebraische Beweise für diese Sätze.

tische Matrizen reeller Zahlen bezeichnet werden; bei gegebenen A_1, \dots, A_r bilden die Matrizen

$$x_1 A_1 + \dots + x_r A_r \quad (17)$$

eine „lineare Schar“ von Matrizen, welche von den Parametern x_1, \dots, x_r abhängt. Die Schar soll „durchweg nicht-singulär“ heißen, wenn nur diejenige Matrix (17) singulär ist, welche zu den Parametern $(0, \dots, 0)$ gehört.

Satz III c. Die Anzahl r der Parameter einer linearen, durchweg nicht-singulären Schar n -reihiger quadratischer reeller Matrizen ist höchstens gleich der größten Potenz von 2, die in n aufgeht.

Denn ist $A_q = (a_{q\sigma\nu})$, so hat die Matrix (17) die Elemente

$$g_{\sigma\nu}(x_1, \dots, x_r) = \sum_q a_{q\sigma\nu} x_q ;$$

sie sind ungerade Funktionen in den x_q ; daher folgt Satz III c aus Satz II c.

Korollar: Ist $n = 2^\lambda \cdot u$, u ungerade, so gibt es in jeder Schar

$$x_1 A_1 + \dots + x_{2^\lambda} A_{2^\lambda}$$

eine Matrix mit $(x_1, \dots, x_{2^\lambda}) \neq (0, \dots, 0)$, die einen reellen Eigenwert besitzt.

Dies erfolgt daraus, daß nach Satz III c die lineare Schar, die von den Matrizen $A_1, \dots, A_{2^\lambda}$ und der Einheitsmatrix E erzeugt wird, nicht durchweg nicht-singulär sein kann.

7. ¹¹⁾ *Nicht-assoziative Divisions-Algebren über dem Körper der reellen Zahlen.* Von den „Algebren“ oder „hyperkomplexen Systemen“, die wir hier betrachten, soll nicht verlangt werden, daß in ihnen das assoziative Gesetz der Multiplikation gelte. Dagegen beschränken wir uns auf „Divisions-Algebren“, d. h. Systeme ohne Nullteiler. Es handle sich immer um Systeme über dem Körper der reellen Zahlen. Die Anzahl der Einheiten sei n . Man weiß, daß es nur drei Divisions-Algebren gibt, in denen das assoziative Gesetz gilt: die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen, die Quaternionen; für sie ist $n = 1, 2$ bzw. 4 . Ferner hat man eine nicht-assoziative Divisions-Algebra mit $n = 8$ studiert: die Cayleyschen Zahlen¹²⁾. Es ist aber nicht bekannt, ob es auch für andere Werte von n als $1, 2, 4, 8$ Divisions-Algebren gibt.

¹²⁾ Man vergleiche z. B.: *L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie* (Zürich 1927), § 133.

Satz IV. Die Anzahl n der Einheiten einer Divisions-Algebra über dem Körper der reellen Zahlen ist notwendigerweise eine Potenz von 2.

Beweis. e_1, \dots, e_n seien die Einheiten einer Divisions-Algebra; ihre Multiplikation sei durch

$$e_\rho e_\sigma = \sum_\nu a_{\rho\sigma\nu} e_\nu$$

erklärt. Für zwei Größen

$$\xi = \sum_\rho x_\rho e_\rho, \quad \eta = \sum_\sigma y_\sigma e_\sigma$$

ist dann das Produkt durch

$$\xi \eta = \sum_\nu \left(\sum_{\rho, \sigma} a_{\rho\sigma\nu} x_\rho y_\sigma \right) e_\nu$$

gegeben. Daß es keine Nullteiler gibt, ist gleichbedeutend damit, daß die Bilinearformen

$$f_\nu = \sum_{\rho, \sigma} a_{\rho\sigma\nu} x_\rho y_\sigma, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

ein definites System bilden. Daher folgt der Satz IV aus dem Satz Ie. ^{12 a)}

§ 2. Beweis des Hauptsatzes

8. Geometrische Deutung der definiten Systeme ungerader Funktionen.

Es sei ein definites System (4) vorgelegt, wie es in Nr. 1 erklärt worden ist. Da auch die Funktionen

$$f'_\nu = \frac{f_\nu}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}$$

stetig und ungerade sind und ein definites System bilden, dürfen wir, indem wir statt f'_ν wieder f_ν schreiben, annehmen, daß

$$\sum_{\nu=1}^n f_\nu^2 = 1 \tag{1}$$

ist.

Durch

$$\sum_{\rho=1}^r x_\rho^2 = 1, \quad \sum_{\sigma=1}^s y_\sigma^2 = 1, \quad \sum_{\nu=1}^n z_\nu^2 = 1$$

sind Sphären $S_{r-1}, S_{s-1}, S_{n-1}$ erklärt, deren Dimensionszahlen durch die Indizes angegeben sind. Infolge (1) wird durch

$$z_\nu = f_\nu(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s)$$

^{12 a)} Im Anhang II kommen wir noch einmal auf Algebren zurück.

jedem Punktepaar (x, y) mit $x \in S_{r-1}$, $y \in S_{s-1}$ ein Punkt $z \in S_{n-1}$ zugeordnet, es wird also eine Abbildung f des topologischen Produktes $S_{r-1} \times S_{s-1}$ in die Sphäre S_{n-1} erklärt; diese Abbildung ist stetig; sie ist ferner „ungerade“, d. h. es ist

$$f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y),$$

wenn wir durch $-x, \dots$ die Antipoden der Punkte x, \dots bezeichnen.

Durch Identifizierung je zweier antipodischer Punkte einer Sphäre S_k entsteht ein k -dimensionaler projektiver Raum P_k . Daher folgt aus der Ungeradheit von f erstens, daß durch f eine stetige Abbildung F des topologischen Produktes $P_{r-1} \times P_{s-1}$ in den Raum P_{n-1} bewirkt wird. Zweitens: hält man einen Punkt x^0 von S_{r-1} fest und läßt y einen halben Großkreis auf S_{s-1} von einem Punkt y^0 in den Antipoden $-y^0$ durchlaufen, so durchläuft der Bildpunkt $f(x^0, y)$ auf S_{n-1} einen Weg, der ebenfalls einen Punkt z^0 mit dem Antipoden $-z^0$ verbindet; da einem Weg auf der Sphäre S_k , der zwei Antipoden verbindet, in P_k ein geschlossener Weg vom Homologietypus der projektiven Geraden entspricht, so bedeutet die eben festgestellte Eigenschaft der ungeraden Abbildung f für die Abbildung F :

$$F(\text{Punkt} \times \text{Gerade}) \sim \text{Gerade}; \quad (2a)$$

analog ergibt sich:

$$F(\text{Gerade} \times \text{Punkt}) \sim \text{Gerade}; \quad (2b)$$

dies sind Homologien, in denen „Punkt“ und „Gerade“ als Zyklen der Dimensionen 0 bzw. 1 aufzufassen sind.

Eine Abbildung F des Produktes zweier projektiver Räume in einen projektiven Raum, welche die Eigenschaften (2a) und (2b) besitzt, möge kurz „ungerade“ heißen. Dann sehen wir: *Ein definites System von n ungeraden Funktionen der Variablen x_1, \dots, x_r und y_1, \dots, y_s bewirkt eine ungerade Abbildung¹³⁾ des Produktes $P_{r-1} \times P_{s-1}$ in den Raum P_{n-1} .*

Damit ist der Satz I auf den folgenden zurückgeführt:

Satz I:* *Voraussetzung:* *Es existiert eine ungerade Abbildung¹³⁾ von $P_{r-1} \times P_{s-1}$ in P_{n-1} .* *Behauptung:* *Die Bedingung $\mathfrak{B}(r, s; n)$ ist erfüllt.* ^{b)}

¹³⁾ Unter einer „Abbildung“ einer Mannigfaltigkeit wird immer eine *stetige* Abbildung verstanden.

b) Ist $s = 1$, so ist P_{s-1} ein Punkt, (2a) inhaltslos und die Ungeradheit von F also allein durch (2b) charakterisiert; die Behauptung lautet: $n \geq r$. Man vergl. Fußnote. ^{a)}

9. Die Ringe des projektiven Raumes und des Produktes zweier projektiver Räume. Für den Beweis des Satzes I* müssen wir uns zunächst näher mit den Homologie-Eigenschaften von P_{n-1} und $P_{r-1} \times P_{s-1}$ befassen. Als Koeffizientenbereich legen wir den Restklassenring modulo 2 zugrunde. Dann ist für jede geschlossene Mannigfaltigkeit L der Homologiering $\mathfrak{R}(L)$ in bekannter Weise erklärt: seine Elemente sind die Homologieklassen, die Addition ist die der Bettischen Gruppen, das Produkt ist der Schnitt.

Wir betrachten zunächst einen projektiven Raum P_k . Man weiß, daß es für jedes κ , $0 \leq \kappa \leq k$, genau eine Homologieklass gibt, die nicht Null ist; sie wird durch eine κ -dimensionale projektive Ebene repräsentiert; sie heiße ζ_κ ; es wird also speziell ζ_0 durch einen Punkt, ζ_1 durch eine Gerade, ζ_{k-1} durch eine $(k-1)$ -dimensionale Ebene, ζ_k durch den ganzen Raum P_k dargestellt. Für jedes $\kappa < k$ ist ζ_κ der Schnitt von $k-\kappa$ Ebenen des Typus ζ_{k-1} , also, wenn wir kurz $\zeta_{k-1} = \zeta$ schreiben: ¹⁴⁾

$$\zeta_\kappa = \zeta^{k-\kappa};$$

dies gilt auch noch für $\kappa = k$, indem wir unter ζ^0 das Eins-Element des Ringes $\mathfrak{R}(P_k)$ verstehen. Dagegen ist $\zeta^\kappa = 0$ für alle $\kappa > k$.

Somit läßt sich die Struktur des Ringes $\mathfrak{R}(P_{n-1})$ folgendermaßen beschreiben:

$\mathfrak{R}(P_{n-1})$ ist der Ring der Polynome in einer Unbestimmten ζ mit Koeffizienten aus dem Restklassenring mod. 2, wobei ζ die Relation

$$\zeta^n = 0 \tag{3}$$

erfüllt; mit anderen Worten: bezeichnet Γ den Ring aller Polynome in der Unbestimmten ζ mit Koeffizienten mod. 2, so ist $\mathfrak{R}(P_{n-1})$ der Restklassenring von Γ nach dem von ζ^n erzeugten Ideal (ζ^n) .

Für die Dimensionszahlen ergibt sich

$$\text{Dim. } \zeta^\nu = (n-1) - \nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Daraus folgt weiter: Für jedes d bildet ζ^{n-1-d} eine d -dimensionale Homologiebasis; und zwar sind die Basen $\{\zeta^{n-1-d}\}$ und $\{\zeta^d\}$ zueinander dual ¹⁵⁾.

¹⁴⁾ Obere Indizes sind im folgenden immer Exponenten (nicht etwa Dimensionszahlen).

¹⁵⁾ In einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit L heißt die $(k-d)$ -dimensionale Homologiebasis $\{z'_1, \dots, z'_d\}$ zu der d -dimensionalen Homologiebasis $\{z_1, \dots, z_d\}$ dual, wenn für die Schnittzahlen gilt: $(z'_i \cdot z_i) = 1$, $(z'_h \cdot z_i) = 0$ für $h \neq i$.

Nach dem Poincaré-Veblenschen Dualitätssatz gibt es in jeder geschlossenen Mannigfaltigkeit, gleichgültig ob orientierbar oder nicht, zu jeder Basis eine (und nur eine) duale, vorausgesetzt, daß der Ring mod. 2 als Koeffizientenbereich dient.

Man vergleiche Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie (Leipzig und Berlin 1934), 253, Satz III.

Die Bestimmung des Ringes $\mathfrak{R}(P_{r-1} \times P_{s-1})$, die jetzt vorgenommen werden soll, beruht auf den folgenden beiden Sätzen (E) und (F), die als bekannt gelten dürfen; U und V sind beliebige geschlossene Mannigfaltigkeiten; unter einer „vollen“ Bettischen Basis (mod. 2) einer Mannigfaltigkeit wird eine Basis der „vollen“ Bettischen Gruppe verstanden, d. h. der direkten Summe der Bettischen Gruppen aller Dimensionen.

(E) Durchlaufen ξ_i und η_j volle Bettische Basen von U bzw. V , so durchläuft $\xi_i \times \eta_j$ eine volle Bettische Basis von $U \times V$.¹⁶⁾

(F) Sind ξ, ξ' bzw. η, η' Elemente von $\mathfrak{R}(U)$ bzw. $\mathfrak{R}(V)$, so gilt für die Produkte (mod. 2) in $U \times V$:

$$(\xi \times \eta) \cdot (\xi' \times \eta') = \xi \cdot \xi' \times \eta \cdot \eta'. \quad 17)$$

Es sei nun $U = P_{r-1}$, $V = P_{s-1}$; wie oben festgestellt wurde, werden volle Basen in P_{r-1} und P_{s-1} von Potenzen

$$\xi^0, \xi, \dots, \xi^{r-1} \quad \text{bzw.} \quad \eta^0, \eta, \dots, \eta^{s-1}$$

gebildet, wobei ξ durch eine $(r-2)$ -dimensionale Ebene in P_{r-1} und η durch eine $(s-2)$ -dimensionale Ebene in P_{s-1} repräsentiert wird. Setzen wir

$$\xi \times \eta^0 = X, \quad \xi^0 \times \eta = Y,$$

so ist nach (F)

$$\xi^e \times \eta^\sigma = X^e \cdot Y^\sigma,$$

und diese Produkte mit

$$0 \leq \varrho \leq r-1, \quad 0 \leq \sigma \leq s-1 \quad (4)$$

bilden nach (E) eine volle Bettische Basis in $P_{r-1} \times P_{s-1}$. Das Ergebnis ist:

$\mathfrak{R}(P_{r-1} \times P_{s-1})$ ist der Ring der Polynome in zwei Unbestimmten X, Y mit Koeffizienten aus dem Restklassenring mod. 2, wobei X und Y die Relationen

$$X^r = 0, \quad Y^s = 0 \quad (5)$$

erfüllen; mit anderen Worten: bezeichnet Δ den Ring aller Polynome in den Unbestimmten X, Y mit Koeffizienten mod. 2, so ist $\mathfrak{R}(P_{r-1} \times P_{s-1})$ der Restklassenring von Δ nach dem von X^r und Y^s erzeugten Ideal (X^r, Y^s) .

¹⁶⁾ Einen Beweis erhält man z. B., indem man den § 3 des Kap. VII in dem Buche⁶⁾ von Alexandroff-Hopf dadurch abändert (und wesentlich vereinfacht), daß man den dort zugrunde gelegten ganzzahligen Koeffizientenbereich durch den Ring mod. 2 ersetzt.

¹⁷⁾ S. Lefschetz, Topology (New York 1930), 238, Formel (21) — aber, da wir mod. 2 arbeiten, ohne Berücksichtigung von Vorzeichen.

Für die Dimensionszahlen ergibt sich durch eine leichte Abzählung

$$\text{Dim. } X^\varrho \cdot Y^\sigma = (r + s - 2) - (\varrho + \sigma) . \quad (6)$$

Daraus folgt weiter: Für jedes d bilden die Produkte $X^\varrho \cdot Y^\sigma$ mit $\varrho + \sigma = r + s - 2 - d$, wobei ϱ und σ außerdem durch (4) eingeschränkt sind, eine d -dimensionale Basis; setzen wir $r + s - 2 - d = n$ und $\varrho = n - \sigma$, so ist (4) gleichbedeutend mit

$$0 \leq n - \sigma < r, \quad 0 \leq \sigma < s,$$

also mit

$$0 \leq \sigma \leq n, \quad n - r < \sigma < s . \quad (7)$$

Daher können wir eine d -dimensionale Basis auch folgendermaßen charakterisieren, wobei $d + n = r + s - 2$ ist: sie besteht aus denjenigen Produkten $X^{r-\sigma} \cdot Y^\sigma$, für welche σ alle Werte durchläuft, die (7) genügen.

Insbesondere bilden

$$X^{r-1} \cdot Y^{s-2}, \quad X^{r-2} \cdot Y^{s-1}$$

bzw.

$$Y, \quad X$$

Basen der Dimensionen 1 bzw. $r + s - 2$, und zwar ergibt sich aus den Multiplikationsregeln, daß diese Basen zueinander dual sind. °)

10. Topologische Deutung der Bedingung $\mathfrak{B}(r, s; n)$. Wir behaupten: Die Bedingung $\mathfrak{B}(r, s; n)$ ist gleichbedeutend mit dem Bestehen der Relation

$$(X + Y)^n = 0 \quad (8)$$

im Ringe $\mathfrak{R}(P_{r-1} \times P_{s-1})$. d)

Beweis. Nach dem binomischen Satz und nach (5) ist

$$(X + Y)^n = \sum_k \binom{n}{k} X^{n-k} \cdot Y^k, \quad (9)$$

wobei die Summe über alle k zu erstrecken ist, die die Bedingungen

$$0 \leq k \leq n \quad \text{und} \quad n - r < k < s \quad (10)$$

erfüllen.

°) Ist $s=1$, so besteht die erste dieser Basen nur aus $X^{r-2} \cdot Y^{s-1}$, die zweite nur aus X ; analog für $r=1$; man vergleiche Fußnote b).

d) Ist $s=1$ oder $r=1$, so lautet (8) einfach: $X^n = 0$ bzw. $Y^n = 0$.

Gilt nun $\mathfrak{B}(r, s; n)$, so ist daher jeder Koeffizient auf der rechten Seite von (9) das Null-Element des Koeffizientenringes — des Restklassenringes mod. 2 —, und folglich gilt auch (8).

Es gelte andererseits (8); dann verschwindet die rechte Seite von (9); die dort auftretenden $X^{n-k} \cdot Y^k$ bilden aber nach Nr. 9 eine Basis der Dimension $r + s - 2 - n$ und sind daher gewiß linear unabhängig, und daher ist jeder Koeffizient das Null-Element des Koeffizientenringes; es sind also alle diejenigen $\binom{n}{k}$ gerade, für welche (10) gilt; da aber die $\binom{n}{k}$ für welche die erste Bedingung (10) *nicht* gilt, ohnehin Null sind, ist bereits die Gültigkeit der zweiten Bedingung (10) für die Geradheit von $\binom{n}{k}$ hinreichend. Folglich ist $\mathfrak{B}(r, s; n)$ erfüllt.

Aus der damit bewiesenen Äquivalenz der Bedingungen $\mathfrak{B}(r, s; n)$ und (8) ergibt sich, daß der Satz I* gleichbedeutend mit dem folgenden ist:

Satz I.** *Voraussetzung: Es existiert eine ungerade Abbildung von $P_{r-1} \times P_{s-1}$ in P_{n-1} . Behauptung: Im Ringe $\mathfrak{R}(P_{r-1} \times P_{s-1})$ gilt (8).*

11. Der Umkehrungs-Homomorphismus. Ich berichte hier über die Methode, die zum Beweis des Satzes I** führen wird. L und A seien geschlossene Mannigfaltigkeiten. Ihre Dimensionszahlen seien l bzw. λ . Der Koeffizientenbereich sei weiterhin der Restklassenring mod. 2. Die Homologieringe werden mit $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(A)$ bezeichnet. ¹⁸⁾

Jede Abbildung f von L in A bewirkt bekanntlich eine Abbildung von $\mathfrak{R}(L)$ in $\mathfrak{R}(A)$; diese Ringabbildung nennen wir ebenfalls f ; sie ist dimensionstreu; sie ist ein additiver, aber im allgemeinen kein multiplikativer Homomorphismus.

Die Elemente von $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(A)$, die einfach gezählten Punkten entsprechen, seien mit p bzw. π bezeichnet; dann ist immer

$$f(p) = \pi. \quad (11)$$

Es gilt nun der folgende Satz: ¹⁸⁾

Zu jeder Abbildung f von L in A gibt es eine Abbildung φ von $\mathfrak{R}(A)$ in $\mathfrak{R}(L)$ mit folgenden Eigenschaften:

¹⁸⁾ Man vergleiche die unter ³⁾ zitierten Arbeiten; die von mir a. a. O. gemachte Voraussetzung, daß die beiden Mannigfaltigkeiten gleiche Dimension haben, ist unnötig. Da wir den Koeffizientenbereich mod. 2 zugrunde legen, brauchen wir nichts über die Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeiten vorauszusetzen.

(A) φ ist ein additiver und multiplikativer Homomorphismus;

(B) φ ist mit f durch die Funktionalgleichung

$$f(\varphi(\zeta) \cdot z) = \zeta \cdot f(z) \tag{12}$$

verknüpft; hierin sind z und ζ beliebige Elemente von $\mathfrak{R}(L)$ bzw. $\mathfrak{R}(A)$.

φ heißt der „Umkehrungs-Homomorphismus“ von f ; daß er durch f in eindeutiger Weise bestimmt ist, ergibt sich aus dem späteren Satz (D).

Jetzt zeigen wir zunächst:

(C) Ist ζ homogen-dimensional¹⁹⁾ von der Dimension σ , so ist auch $\varphi(\zeta)$ homogen-dimensional; und zwar ist

$$\text{Dim. } \varphi(\zeta) = \sigma + l - \lambda .$$

Beweis. ²⁰⁾ Ist $\varphi(\zeta) = 0$, so ist nichts zu beweisen²¹⁾; es sei $\varphi(\zeta) \neq 0$; dann läßt sich $\varphi(\zeta)$ in der Form

$$\varphi(\zeta) = Z_{\varrho_1} + Z_{\varrho_2} + \dots + Z_{\varrho_k} \tag{13}$$

schreiben, wobei Z_{ϱ_i} einen homogen ϱ_i -dimensionales, von 0 verschiedenes Element von $\mathfrak{R}(L)$ bezeichnet und die ϱ_i paarweise voneinander verschieden sind. Aus dem Dualitätssatz¹⁵⁾ folgt, daß es ein homogen $(l - \varrho_1)$ -dimensionales Element $z_{l-\varrho_1}$ gibt, für welches $Z_{\varrho_1} \cdot z_{l-\varrho_1} = p$ ist; dann ist

$$\varphi(\zeta) \cdot z_{l-\varrho_1} = p + \sum_{i=2}^k Z_{\varrho_i} \cdot z_{l-\varrho_1} ;$$

übt man hierauf f aus, so folgt nach (12) und (11)

$$\zeta \cdot f(z_{l-\varrho_1}) = \pi + \sum_{i=2}^k f(Z_{\varrho_i} \cdot z_{l-\varrho_1}) . \tag{14}$$

Hierin ist die linke Seite homogen $(\sigma + l - \varrho_1 - \lambda)$ -dimensional; dasselbe gilt daher für die rechte Seite; hier aber ist π homogen 0-dimensional und $\neq 0$, das Glied $f(Z_{\varrho_i} \cdot z_{l-\varrho_1})$ dagegen homogen-dimensional von der Dimension $\varrho_i - \varrho_1 \neq 0$ ²²⁾; das ist nur möglich, wenn (14) einfach

$$\zeta \cdot f(z_{l-\varrho_1}) = \pi$$

¹⁹⁾ Alexandroff-Hopf, wie ⁶⁾, 169.

²⁰⁾ Der Satz C ergibt sich auch unmittelbar aus jeder einzelnen der verschiedenen Definitionen von φ ; ²⁾ ich will hier aber auf diese Definitionen nicht eingehen, sondern zeigen, daß alle Eigenschaften von φ aus den Eigenschaften (A) und (B) folgen.

²¹⁾ Der Null-Zyklus ist homogen-dimensional von jeder Dimension.

²²⁾ Zyklen negativer Dimension sind immer gleich 0 zu setzen.

lautet und $\sigma + l - \varrho_1 - \lambda = 0$, also $\varrho_1 = \sigma + l - \lambda$ ist. Da ϱ_1 aber nicht vor den anderen ϱ_i ausgezeichnet ist, folgt hieraus weiter, daß die rechte Seite von (13) nur aus einem Glied besteht. Damit ist (C) bewiesen.

Es seien jetzt $\{z_i\}$ und $\{\zeta_k\}$ Basen in L bzw. Λ von derselben Dimension d ; ihre dualen Basen ¹⁵⁾ $\{z'_h\}, \{\zeta'_j\}$ sind von den Dimensionen $l - d$ bzw. $l - d$; die Dualität bedeutet das Bestehen der Relationen

$$z'_h \cdot z_i = \begin{cases} p & \text{für } h = i \\ 0 & \text{für } h \neq i \end{cases}, \quad \zeta'_j \cdot \zeta_k = \begin{cases} \pi & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}. \quad (15)$$

f bewirkt eine Substitution

$$f(z_i) = \sum a_{ik} \zeta_k; \quad (16)$$

da $\varphi(\zeta'_j)$ nach (C) die Dimension $l - d$ hat, bewirkt φ eine Substitution

$$\varphi(\zeta'_j) = \sum \alpha_{jn} z'_n. \quad (17)$$

Es gilt nun:

(D) Die φ -Substitution (17) ist die Transponierte der f -Substitution (16), das heißt

$$\alpha_{ji} = a_{ij}. \quad (18)$$

Beweis. Aus (17), (15), (11) folgt

$$f(\varphi(\zeta'_j) \cdot z_i) = \sum \alpha_{jn} f(z'_n \cdot z_i) = \alpha_{ji} f(p) = \alpha_{ji} \pi;$$

aus (16), (15) folgt

$$\zeta'_j \cdot f(z_i) = \sum a_{ik} \zeta'_j \cdot \zeta_k = a_{ij} \pi;$$

aus (12), mit $\zeta = \zeta'_j$ und $z = z_i$, folgt daher (18).

12. Beweis des Satzes I.** F sei eine ungerade Abbildung von $P_{r-1} \times P_{s-1}$ in P_{n-1} . Die Bedingungen (2a) und (2b) aus Nr. 8 lauten in den Bezeichnungen aus Nr. 9: ¹⁴⁾

$$F(\xi^{r-1} \times \eta^{s-2}) = \zeta^{n-2}$$

$$F(\xi^{r-2} \times \eta^{s-1}) = \zeta^{n-2}$$

oder

$$F(X^{r-1} \cdot Y^{s-2}) = \zeta^{n-2}$$

$$F(X^{r-2} \cdot Y^{s-1}) = \zeta^{n-2}. \quad (19)$$

Da, wie in Nr. 9 festgestellt wurde, die Basis $\{Y, X\}$ dual zur Basis $\{X^{r-1} \cdot Y^{s-2}, X^{r-2} \cdot Y^{s-1}\}$ und die Basis $\{\zeta\}$ dual zur Basis $\{\zeta^{n-2}\}$ ist, folgt nach Nr. 11 (D) aus (19) für den Umkehrungs-Homomorphismus Φ von F :

$$\Phi(\zeta) = X + Y. \quad (20)$$

Da Φ ein multiplikativer Homomorphismus ist, folgt hieraus

$$(X + Y)^n = \Phi(\zeta^n),$$

und damit folgt aus

$$\zeta^n = 0 \tag{3}$$

die Gültigkeit der Behauptung

$$(X + Y)^n = 0. \text{ e)} \tag{8}$$

A N H A N G I

Systeme von Richtungsfeldern in den projektiven Räumen ²³⁾

Mit P_k wird der k -dimensionale reelle projektive Raum bezeichnet.

Satz V. Auf einer $(r - 1)$ -dimensionalen Ebene P_{r-1} des Raumes P_{n-1} seien $s - 1$ stetige Felder von Richtungen des P_{n-1} angebracht, welche in jedem Punkte von P_{r-1} linear unabhängig voneinander sind. Dann ist die Bedingung $\mathfrak{B}(r, s; n)$ erfüllt.

Beweis. Im euklidischen Raum R_n mit den Koordinaten (x_1, \dots, x_n) sei S_{n-1} die Sphäre mit dem Mittelpunkt $o = (0, \dots, 0)$ und dem Radius 1; wir fassen sie als zweiblättrige Überlagerung von P_{n-1} auf, derart, daß je zwei antipodische Punkte von S_{n-1} einem Punkte von P_{n-1} entsprechen; der Ebene P_{r-1} entspricht eine Großkugel S_{r-1} von S_{n-1} ; wir dürfen annehmen, daß S_{r-1} der Schnitt von S_{n-1} mit der (x_1, \dots, x_r) -Koordinatenebene des R_n ist.

Jeder Richtung des P_{n-1} entsprechen zwei Tangentialrichtungen der S_{n-1} , die durch Spiegelung am Mittelpunkt o ineinander übergehen; einem Richtungsfeld auf P_{r-1} entspricht daher ein Feld von Tangenten der S_{n-1} , das auf S_{r-1} erklärt und symmetrisch in bezug auf o ist; repräsentieren wir diese Tangentialrichtungen etwa durch Vektoren der Länge 1, so sind deren Komponenten ungerade Funktionen von x_1, \dots, x_r .

Die Vektoren g_1, \dots, g_{s-1} , welche auf diese Weise den auf P_{r-1} gegebenen Richtungen entsprechen, sind an jeder Stelle linear unabhängig; da sie tangential an S_{n-1} sind, so ist auch das System $g_1, \dots, g_{s-1}, \mathfrak{x}$, welches durch Hinzufügung des Normalvektors $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$

e) Für $s = 1$ hat man den Beweis folgendermaßen zu modifizieren: Nur die zweite Gleichung (19) ist sinnvoll, (20) lautet: $\varphi(\zeta) = X$, und daraus folgt $X^n = 0$; analog für $r = 1$. Man vergleiche die Fußnoten a), b), c), d).

²³⁾ Die Sätze dieses Anhangs stammen von Stiefel, a. a. O.²⁾.

der S_{r-1} entsteht, linear unabhängig; folglich hat, wenn wir die ν -te Komponente von g_σ mit $g_{\sigma\nu}$ bezeichnen, die Matrix

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{s-1,1} & \dots & g_{s-1,n} \\ x_1 & \dots & x_r & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

durchweg, d. h. für alle (x_1, \dots, x_r) mit $\sum x_\rho^2 = 1$, den Rang s . Daher ist nach Satz II (Nr. 5) die Bedingung $\mathfrak{B}(r, s; n)$ erfüllt.

Ist $r = n$, d. h. sind die Richtungsfelder im ganzen Raum P_{n-1} erklärt und stetig, so ist demnach $\mathfrak{B}(n, s; n)$ erfüllt; diese Bedingung ist (Nr. 2) gleichbedeutend mit $\mathfrak{B}(s, n; n)$; diese letztere Bedingung ist in Nr. 3 (c) untersucht worden; auf Grund des dortigen Ergebnisses gilt, wenn wir $s - 1 = m$, $n - 1 = k$ setzen:

Satz Vc. Die maximale Anzahl m von Richtungsfeldern, welche im ganzen Raume P_k stetig und in jedem Punkt voneinander linear unabhängig sind, ist $\leq 2^\lambda - 1$, wobei 2^λ die größte Potenz von 2 ist, welche in $k + 1$ aufgeht.

Eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit ist „parallelisierbar“, wenn in ihr k stetige Richtungsfelder existieren, welche in jedem Punkt voneinander linear unabhängig sind²⁴⁾. Daher ist im Satz Vc enthalten:

Satz Ve. Der k -dimensionale projektive Raum P_k ist höchstens dann parallelisierbar, wenn $k + 1$ eine Potenz von 2 ist.

Die einzigen projektiven Räume, deren Parallelisierbarkeit feststeht, sind diejenigen der Dimensionen 1, 3, 7 .²⁵⁾

A N H A N G I I

Definite Systeme symmetrischer Bilinearformen

Die in Nr. 1 betrachteten Funktionen f_ν seien jetzt symmetrische Bilinearformen, es sei also

$$f_\nu = \sum_{\rho, \sigma} a_{\nu\rho\sigma} x_\rho y_\sigma, \quad a_{\nu\rho\sigma} = a_{\nu\sigma\rho};$$

$$\rho = 1, \dots, r; \quad \sigma = 1, \dots, r.$$

²⁴⁾ Stiefel, a. a. O.¹⁾.

²⁵⁾ Für diese Dimensionszahlen k erhält man k stetige, durchweg linear unabhängige Richtungsfelder im P_k mit Hilfe der Matrizen $(g_{\sigma\nu})$, die am Schluß von Nr. 5 angegeben sind.

Die kleinste Zahl n , für welche es ein definites System von n solchen Formen gibt, heiÙe $N(r)$. Offenbar ist $N(r) \geq n^*(r, r)$, wobei $n^*(r, s)$ die in Nr. 1 definierte Zahl ist; nach Satz Id ist daher

$$N(r) \geq 2^e, \quad (1)$$

wobei ρ durch $2^{e-1} < r \leq 2^e$ bestimmt ist. Es handelt sich jetzt um die Frage, ob sich diese untere Schranke von $N(r)$ vergrößern läÙt. Das einzige mir bekannte Resultat in dieser Richtung lautet:

$$N(r) \geq r + 2 \quad \text{für} \quad r > 2; \quad (2)$$

(das System (7) in Nr. 1 zeigt, daÙ $N(2) = 2$ ist).

Die Abschätzung (2) ist für die meisten r schlechter als (1); nur für $r = 2^e - 1$ und $r = 2^e$ ist die durch (2) gegebene Schranke um 1 bzw. um 2 besser als die durch (1) gegebene. Immerhin enthält (2) folgendes Korollar, das man nicht aus (1) entnehmen kann: In der (trivialen) Ungleichung $N(r) \geq r$ gilt das Gleichheitszeichen nur für $r = 2$ (und $r = 1$). In der Terminologie aus Nr. 7 bedeutet dies: Eine kommutative Divisions-Algebra über dem Körper der reellen Zahlen hat nur zwei Einheiten — woraus leicht folgt, daÙ sie der Körper der komplexen Zahlen ist; für die Divisions-Algebren über dem Körper der reellen Zahlen ist also das assoziative Gesetz eine Folge des kommutativen.

Den Beweis von (2) habe ich an anderer Stelle dargestellt²⁶); in ihm wird die Behauptung (2) auf den folgenden topologischen Satz zurückgeführt: Für $k > 1$ besitzt der projektive Raum P_k kein topologisches Modell im euklidischen Raum R_{k+1} .

(Eingegangen den 7. Dezember 1940.)

²⁶) H. Hopf, Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume, Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft Zürich LXXXV (1940) (Festschrift Rudolf Fueter), 165—177.

Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen

Von H. HOPF und H. SAMELSON, Zürich

1. Ein „Wirkungsraum“ W ist eine Mannigfaltigkeit, welche durch eine Liesche Gruppe G transitiv in sich transformiert wird¹⁾. Genauer: die Mannigfaltigkeit W , deren Punkte mit ξ, η, \dots bezeichnet werden, steht zu einer abstrakten Lieschen Gruppe G , deren Elemente wir a, b, \dots nennen, in folgender Beziehung: jedem a ist eine topologische analytische²⁾ Abbildung f_a von W auf sich zugeordnet; es ist $f_a(f_b(\xi)) = f_{ab}(\xi)$; der Punkt $f_a(\xi)$ hängt stetig von dem Paar (a, ξ) ab; zu jedem Paar (ξ, η) gibt es wenigstens ein a mit $f_a(\xi) = \eta$.³⁾

Wir werden hier nur geschlossene Gruppen G betrachten; dann sind auch die Räume W geschlossen.

Man weiß zwar, daß nur Mannigfaltigkeiten von spezieller topologischer Struktur als Wirkungsräume auftreten können — z. B. gibt es unter den geschlossenen Flächen keine anderen Wirkungsräume als Kugel, projektive Ebene und Torus⁴⁾; jedoch existiert noch keine allgemeine Theorie der topologischen Eigenschaften der Wirkungsräume; soviel wir feststellen konnten, sind bisher nur die folgenden Sätze bekannt:

- a) Die Fundamentalgruppe enthält eine Abelsche Untergruppe von endlichem Index⁵⁾.
- b) Die Bettischen Zahlen p_r , $r = 1, 2, \dots$, erfüllen die Ungleichungen

$$p_r \geq \binom{p_1}{r} \quad \text{6a)} \quad \text{sowie} \quad p_r \leq \binom{n}{r} \quad \text{6b)} .$$

¹⁾ „Wirkungsraum“ = „espace homogène“ bei Cartan. — Literatur: *E. Cartan*, La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs (Paris 1930, Mémorial Sc. Math. XLII); ferner: *C. Ehresmann*, Sur la topologie de certains espaces homogènes, Ann. of Math. 35 (1934), 396—443.

²⁾ Man kommt auch mit schwächeren Regularitätsbedingungen aus.

³⁾ Für unsere Zwecke ist es nicht nötig, noch zu fordern: aus $a \neq b$ folgt $f_a \neq f_b$.

⁴⁾ *Cartan*, l. c., p. 29.

⁵⁾ Dieser Satz scheint zwar nirgends formuliert worden zu sein, er ist aber eine direkte Folge aus der bekannten Tatsache, daß die Fundamentalgruppe von G Abelsch ist, einerseits und den bekannten Beziehungen zwischen den Fundamentalgruppen von G und von W andererseits; diese Beziehungen sind z. B. dargestellt bei *Ehresmann*, l. c., p. 399, sowie enthalten in dem Satz XII von *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen I, Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935), 112—119.

^{6a)} *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen IV, Proc. Akad. Amsterdam 39 (1936), 215—224; insbesondere p. 224.

^{6b)} *G. de Rham*, Über mehrfache Integrale, Abh. Math. Seminar Hamburg 12 (1938), 313—339; insbesondere p. 335. — Herr de Rham hat uns darauf hingewiesen, daß an dieser Stelle die a. a. O. gemachte Voraussetzung der „Symmetrie“ des Wirkungsraumes unnötig ist.

Es ist aber nicht daran zu zweifeln, daß die Homologie-Eigenschaften der Wirkungsräume viel schärferen Bedingungen unterliegen, als nur den Bedingungen b), ähnlich wie es bei den Gruppenräumen — also denjenigen Wirkungsräumen, in denen eine Gruppe G *einfach* transitiv wirkt — der Fall ist. Im folgenden wird ein einzelner hierhergehöriger Satz bewiesen, der von der einfachsten Homologie-Invariante, nämlich der Euler-Poincaréschen Charakteristik, handelt. Er lautet:

Die Charakteristik eines Wirkungsraumes einer geschlossenen Lieschen Gruppe ist positiv oder Null.

Mannigfaltigkeiten mit negativer Charakteristik sind also niemals Wirkungsräume. Es wird sich ferner zeigen, daß zwischen den Wirkungsräumen mit positiver und denen mit verschwindender Charakteristik ein Unterschied besteht, der sich in Eigenschaften der betreffenden Transformationsgruppen äußert.

2. Die Charakteristik $\chi(P)$ eines Polyeders P ist durch die Euler-Poincarésche Formel

$$\chi(P) = \sum (-1)^r a_r = \sum (-1)^r p_r$$

gegeben, wobei a_r die Anzahl der r -dimensionalen Zellen einer beliebigen Zellenzerlegung von P und p_r die r -te Bettische Zahl von P bezeichnet. Die Beziehung der Charakteristik zu stetigen Transformationen wird durch den folgenden Fixpunktsatz vermittelt⁷⁾: „ f sei eine stetige Abbildung des n -dimensionalen Polyeders P in sich, welche 1. durch eine stetige Deformation von P in sich aus der Identität entstanden ist, und welche 2. höchstens endlich viele Fixpunkte besitzt; dann ist die Summe der Indizes der Fixpunkte gleich $(-1)^n \cdot \chi(P)$.“ (Wenn P eine geschlossene Mannigfaltigkeit ist — nur dieser Fall interessiert uns hier —, so ist bei ungeradem n bekanntlich $\chi(P) = 0$, und daher kann der Faktor $(-1)^n$ in der Behauptung des Satzes weggelassen werden.) Wir wollen unseren Satz aus Nr. 1 auf den Fixpunktsatz zurückführen; hierfür brauchen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 1. Der Wirkungsraum W sei n -dimensional; dann hat jeder isolierte Fixpunkt einer Abbildung $f_a, a \in G$, den Index $(-1)^n$.⁸⁾

Beweis. Die Transformationen $f_a, a \in G$, können als Isometrien einer Riemannschen Metrik in W aufgefaßt werden⁹⁾. Wir betrachten die Funktionalmatrix F von f_a in einem Fixpunkt ξ von f_a . Wenn F einen

⁷⁾ Alexandroff-Hopf, Topologie I (Berlin 1935), p. 542 sowie p. 534 ff.

⁸⁾ Am Schluß von Nr. 6 wird dieser Hilfssatz noch präzisiert werden.

⁹⁾ Cartan, l. c., p. 43.

reellen positiven Eigenwert besitzt, so bleibt bei der Abbildung f_a eine Richtung durch den Punkt ξ fest, und folglich bleibt, da f_a eine Isometrie ist, auch die in dieser Richtung von ξ ausgehende geodätische Linie Punkt für Punkt fest (woraus man übrigens sieht, daß der Eigenwert gleich 1 ist); dann ist ξ also nicht isolierter Fixpunkt. Nun sei aber ξ isolierter Fixpunkt; dann besitzt nach dem Vorstehenden F keinen positiven Eigenwert, d. h., für alle positiven Zahlen λ sind die Determinanten $|F - \lambda E| \neq 0$; für die spezielle Determinante $|F - E|$ bedeutet dies erstens, daß sie nicht verschwindet, und zweitens, daß sie das gleiche Vorzeichen hat wie $|F - \lambda E|$ für große λ , also das Vorzeichen $(-1)^n$. Daher ist bekanntlich¹⁰⁾ auch der Index des Fixpunktes ξ gleich $(-1)^n$, w. z. b. w.

Es sei jetzt $f_a, a \in G$, eine Transformation von W mit höchstens endlich vielen Fixpunkten, und zwar sei deren Anzahl gleich $A, A \geq 0$. Nach dem soeben bewiesenen Hilfssatz ist die Indexsumme der Fixpunkte gleich $(-1)^n \cdot A$; andererseits erfüllt f_a die Voraussetzungen des oben zitierten Fixpunktsatzes, denn indem man das Eins-Element der Gruppe G stetig in das Element a überführt, erzeugt man f_a durch eine stetige Deformation aus der Identität; daher ist die Indexsumme auch gleich $(-1)^n \cdot \chi(W)$; es ist also $A = \chi(W)$; damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz I. Besitzt eine Transformation $f_a, a \in G$, des Wirkungsraumes W einer geschlossenen Gruppe G höchstens endlich viele Fixpunkte, so ist deren Anzahl gleich der Charakteristik von W .

Falls die Existenz einer Transformation f_a feststeht, welche die Voraussetzung des Satzes I erfüllt, so folgt aus diesem Satz die in Nr. 1 behauptete Tatsache $\chi(W) \geq 0$; dieses Ziel ist also erreicht, sobald noch folgender Satz bewiesen ist:

Satz II. Ist W ein beliebiger Wirkungsraum einer geschlossenen Gruppe G , so gibt es ein solches Element a in G , daß die Transformation f_a von W höchstens endlich viele Fixpunkte hat.¹¹⁾

3. Bei dem Beweis des Satzes II werden wir nicht in dem Wirkungsraum W , sondern in dem Gruppenraum G — also in der Mannigfaltigkeit, deren Punkte die Elemente von G sind — arbeiten; dies ist möglich auf Grund der bekannten Deutung der Punkte von W als Nebengruppen in G ; wir erinnern hier kurz an diese Deutung¹²⁾:

¹⁰⁾ Alexandroff-Hopf, l. c., p. 537.

¹¹⁾ Man beachte die Verschärfung dieses Satzes in Fußnote 20.

¹²⁾ Man vergleiche: Cartan, l. c., p. 25 ff.; Ehresmann, l. c., p. 397 ff.

In W zeichne man einen Punkt α aus; dann bilden diejenigen Elemente a von G , für welche $f_a(\alpha) = \alpha$ ist, eine abgeschlossene Untergruppe U von G , die „Isotropiegruppe“ von W ; für einen beliebigen Punkt ξ von W bilden die Elemente a , für welche $f_a(\alpha) = \xi$ ist, eine Nebengruppe xU von U ; hierdurch ist eine eindeutige Beziehung zwischen den Nebengruppen xU einerseits und den Punkten von W andererseits hergestellt. Geometrisch bilden die Nebengruppen xU eine stetige Zerlegung oder „Faserung“ von G ; jeder Punkt von G liegt auf einer und nur einer „Faser“ xU ; die einzelnen Fasern sind miteinander, also insbesondere mit der Gruppe U , homöomorph; W ist der Raum, der entsteht, wenn man die einzelne Nebengruppe als Punkt auffaßt; daher nennt man W auch einen „Nebengruppenraum“. Die Transformation f_a von W ist gleichbedeutend mit der durch die Abbildung $x \rightarrow ax$ des Gruppenraumes G auf sich bewirkten Zuordnung

$$xU \rightarrow axU \quad (1)$$

im Nebengruppenraum.

Alles dies ist im wesentlichen — d. h. bis auf einen inneren Automorphismus von G — unabhängig von dem Punkt α ; denn zeichnet man statt α einen Punkt β aus, so hat man nur U durch die Gruppe $U' = sUs^{-1}$ zu ersetzen, wobei s ein Element von G mit $f_s(\alpha) = \beta$ ist.

Die hiermit beschriebene Beziehung zwischen einem Wirkungsraum und einer Nebengruppen-Zerlegung von G kann man auch umgekehrt zur Definition von Wirkungsräumen benutzen. Man nehme eine beliebige abgeschlossene Untergruppe U von G und deute ihre Nebengruppen xU als Punkte eines Raumes W , in welchem in naheliegender Weise eine Topologie auf Grund der Topologie von G erklärt ist; W ist eine Mannigfaltigkeit, deren Dimension gleich der Differenz der Dimensionen von G und von U ist; für jedes Element a von G verstehe man unter f_a die durch die Zuordnung (1) erklärte Transformation von W ; dann ist W ein Wirkungsraum; seine Isotropiegruppe ist U ; man schreibt mitunter $W = G/U$.¹³⁾

Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß jede Eigenschaft von Wirkungsräumen als Eigenschaft von Gruppenräumen gedeutet werden kann. Uns interessiert im Hinblick auf den Satz II die Frage, wie die Fixpunkte einer Transformation f_a von W im Gruppenraum G in Erscheinung treten. Aus der Deutung (1) von f_a sieht man, daß der Nebengruppe xU dann und nur dann ein Fixpunkt in W entspricht, wenn $axU = xU$, also $ax = xu$ mit $u \in U$ ist; man hat somit folgendes Krite-

¹³⁾ Entsprechend der Bemerkung in Fußnote 3 haben wir hier nicht gefordert, daß U keine invariante Untergruppe von G (außer der Einheitsgruppe) enthalte.

rium: Die Nebengruppe xU stellt dann und nur dann einen Fixpunkt der Transformation f_a von W dar, wenn

$$x^{-1}ax \in U \quad (2)$$

ist.

Der Beweis des Satzes II muß demnach darin bestehen, daß man zu jeder Untergruppe¹⁴⁾ U von G die Existenz eines solchen Elementes a von G nachweist, daß höchstens für endlich viele Nebengruppen xU die Relation (2) gilt.

4. Für den Beweis des Satzes II sind Eigenschaften Abelscher Untergruppen von G wichtig¹⁵⁾. Bekanntlich gibt es in G einparametrische Untergruppen; die abgeschlossene Hülle einer solchen ist eine Gruppe T , welche abgeschlossen, zusammenhängend und Abelsch ist; als abgeschlossene Untergruppe von G ist T eine Liesche Gruppe¹⁶⁾; die einzigen kompakten, zusammenhängenden, Abelschen, Lieschen Gruppen sind die „Toroide“, d. h. die direkten Produkte von endlich vielen geschlossenen einparametrischen Gruppen¹⁷⁾; es gibt also in G gewiß ein Toroid T .

Die Multiplikation in einem r -dimensionalen Toroid ist isomorph der Vektor-Addition im r -dimensionalen Raum, wenn man alle Vektor-Komponenten modulo 1 reduziert. Hieraus ergeben sich auf Grund bekannter Tatsachen die folgenden beiden Eigenschaften der Toroide:

(I) Die Gruppe der (stetigen) Automorphismen eines Toroids ist eine diskrete Gruppe; denn die Automorphismen werden durch ganzzahlige Matrizen beschrieben.

(II) In jedem Toroid T gibt es „erzeugende“ Elemente, d. h. solche, deren Potenzen auf T überall dicht liegen; dies ist der Hauptinhalt des klassischen Approximationssatzes von Kronecker¹⁸⁾.

¹⁴⁾ Unter Untergruppen von G sollen, wenn nichts anderes gesagt wird, immer abgeschlossene Untergruppen verstanden werden.

¹⁵⁾ Nachdem der eine von uns (H. Hopf) über den Inhalt der vorliegenden Arbeit in der Sitzung der Schweizerischen Math. Gesellschaft, September 1940 in Locarno, berichtet hatte, machte uns Herr G. de Rham auf die Note von A. Weil, *Démonstration topologique d'un théorème fondamental de Cartan*, C. R. 200 (1935), 518—520, aufmerksam; der im Titel dieser Note erwähnte Satz von Cartan ist unser Hilfssatz 4. Unser Beweis dieses Cartanschen Satzes ist mit dem Beweis von Weil identisch, und überhaupt enthält die obige Nr. 4 nichts, was über den Inhalt der Note von Weil hinausginge; trotzdem wiederholen wir diese Dinge ausführlich, da wir den Gedankengang des Beweises für unseren Satz in Nr. 1 lückenlos darstellen wollen.

¹⁶⁾ Cartan, l. c., p. 22; sowie: L. Pontrjagin, *Topological groups* (Princeton 1939), p. 196 ff.

¹⁷⁾ Cartan, l. c., p. 36; sowie, ohne Differenzierbarkeits-Voraussetzungen: Pontrjagin, l. c., p. 169.

¹⁸⁾ Man vergleiche z. B. J. F. Koksma, *Diophantische Approximationen* (Berlin 1936), p. 83.

Eine besondere Rolle spielen für unseren Beweis — und bekanntlich nicht nur für diesen — die „maximalen“ Toroide in G , d. h. diejenigen Toroide, welche nicht in höherdimensionalen Toroiden enthalten sind; die für uns wichtigsten Eigenschaften sind in den nachstehenden drei Hilfssätzen 2, 3 und 4 enthalten. Für den Hilfssatz 2 erinnern wir an den Begriff des „Normalisators“ N_V einer Untergruppe V von G : der Normalisator N_V ist die Menge derjenigen Elemente x von G , für welche $x^{-1}Vx = V$ ist; er ist eine Gruppe, und er enthält V .

Hilfssatz 2. Ein maximales Toroid T hat in seinem Normalisator N_T endlichen Index, d. h. es gibt eine endliche Nebengruppen-Zerlegung

$$N_T = c_1T + c_2T + \cdots + c_\sigma T, \quad (c_1 \varepsilon T). \quad (3)$$

Beweis. Da N_T eine abgeschlossene Untergruppe von G ist, gibt es jedenfalls eine endliche Nebengruppen-Zerlegung

$$N_T = c_1A + c_2A + \cdots + c_\sigma A, \quad (c_1 \varepsilon A), \quad (3')$$

wobei die Untergruppe A diejenige Komponente von N_T ist, welche das Eins-Element e enthält. Da T zusammenhängend und $T \subset N_T$ ist, ist $T \subset A$; wir behaupten: $T=A$; diese Behauptung ist gleichbedeutend mit der folgenden: T hat dieselbe Dimension wie A ; und dies ist bewiesen, sobald gezeigt ist: jede Richtung \mathfrak{x} , die im Einheitspunkt e der Gruppe G angebracht ist und in A liegt, liegt auch in T . Es sei also \mathfrak{x} eine derartige Richtung; in dieser Richtung geht von e eine einparametrische Untergruppe L der Gruppe A aus; da $L \subset N_T$ ist, bewirkt jedes Element x von L durch die Zuordnung $t \rightarrow x^{-1}tx$, $t \varepsilon T$, einen Automorphismus von T ; da sich x auf L in den Punkt e überführen läßt, bilden diese Automorphismen eine stetige Schar, welche die Identität enthält; infolge der — oben als Eigenschaft (I) formulierten — Diskretheit der Automorphismengruppe ist daher jeder der betrachteten Automorphismen die Identität; es ist also $x^{-1}tx = t$ für beliebige $x \varepsilon L$, $t \varepsilon T$; da L und T selbst Abelsch sind, ist mithin auch die von T und L erzeugte Gruppe Abelsch; sie ist überdies zusammenhängend, und ihre abgeschlossene Hülle ist daher ein Toroid T' ; da $T \subset T'$ und T maximal ist, ist $T' = T$; also ist L und daher auch die Richtung \mathfrak{x} in T enthalten; somit ist in der Tat $T = A$. Hieraus und aus (3') folgt (3).

Hilfssatz 3. T sei ein maximales Toroid und b ein beliebiges Element von G ; dann ist b in einem mit T konjugierten Toroid xTx^{-1} enthalten.

Beweis. Zu T gehört, wie in Nr. 3 festgestellt wurde, ein Wirkungsraum $W = G/T$. Es sei a ein erzeugendes Element von T , wie es auf

Grund der oben formulierten Eigenschaft (II) existiert. Wir betrachten die Transformation f_a von W und fragen nach ihren Fixpunkten, also — entsprechend dem Kriterium in Nr. 3 — nach denjenigen Neben-
gruppen xT , für welche

$$x^{-1}ax \varepsilon T \quad (2')$$

ist. Die Relation (2') ist, da $a \varepsilon T$ ist, gewiß für alle Elemente x des Normalisators N_T erfüllt; daher stellt jede der σ Neben-
gruppen $c_i T$ aus (3) einen Fixpunkt dar. Wir behaupten, daß dies die einzigen Fixpunkte von f_a sind; in der Tat: wenn xT einen Fixpunkt repräsentiert, wenn also (2') gilt, so ist, da das Element a das Toroid T erzeugt, auch $x^{-1}Tx \subset T$, also $x^{-1}Tx = T$, also $x \varepsilon N_T$, also $xT = c_i T$, wobei $c_i T$ eine der Neben-
gruppen aus (3) ist. Somit hat f_a genau σ Fixpunkte; nach Satz I (Nr. 2) ist daher $\chi(W) = \sigma$, also jedenfalls $\chi(W) \neq 0$. Jetzt sei b ein beliebiges Element von G ; hätte die Transformation f_b keinen Fix-
punkt, so wäre nach Satz I $\chi(W) = 0$, entgegen dem soeben Bewiesenen; f_b besitzt also wenigstens einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein solches Ele-
ment x , daß $x^{-1}bx \varepsilon T$, also $b \varepsilon xTx^{-1}$ ist.

Hilfssatz 4. Je zwei maximale Toroide T und T' sind miteinander konjugiert, d. h. es gibt ein Element x , so daß $T' = xTx^{-1}$ ist.

Beweis. Es sei b ein erzeugendes Element von T' ; nach Hilfssatz 3 gibt es ein x , so daß $b \varepsilon xTx^{-1}$ ist; dann ist auch $T' \subset xTx^{-1}$, also, da T' maximal ist, $T' = xTx^{-1}$.

Aus dem hiermit bewiesenen Hilfssatz 4 folgt insbesondere, daß alle maximalen Toroide die gleiche Dimension haben; diese Dimensions-
zahl l nennen wir den „Rang“ der Gruppe G .¹⁹⁾

5. Wir kommen jetzt zum Beweise des Satzes II; und zwar werden wir sogleich noch folgenden *Zusatz* beweisen:

Es sei a ein Element, das ein maximales Toroid T erzeugt; dann erfüllt a die Behauptung des Satzes II.

Wir knüpfen an Nr. 3 an; U sei also eine beliebige Untergruppe¹⁴⁾ von G ; zu zeigen ist, daß höchstens für endlich viele Neben-
gruppen xU die Relation (2) gilt; diese Relation ist, da a erzeugendes Element von T ist, gleichbedeutend mit

$$x^{-1}Tx \subset U. \quad (4)$$

Der Rang von U ist gewiß nicht größer als der Rang l von G ; wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem er kleiner als l oder gleich l ist.

¹⁹⁾ Diese Definition weicht zwar von der sonst üblichen, „infinitesimalen“ Definition des „Ranges“ einer Lieschen Gruppe etwas ab, sie ist aber für manche Zwecke praktisch.

Wenn der Rang von U kleiner als l ist, so enthält U kein l -dimensionales Toroid; (4) ist also für kein x erfüllt. Die Abbildung f_a hat daher keinen Fixpunkt.

Der Rang von U sei l ; dann enthält U ein l -dimensionales Toroid T' . Nach Hilfssatz 4 sind T und T' konjugiert, es gibt also ein Element x_0 , so daß $T' = x_0^{-1}T x_0$ ist; dann ist $a' = x_0^{-1}a x_0$ erzeugendes Element von T' ; da die ähnlichen Abbildungen f_a und $f_{a'} = f_{x_0}^{-1} f_a f_{x_0}$ offenbar die gleiche Anzahl von Fixpunkten haben, dürfen wir T' und a' durch T und a ersetzen, und also annehmen, daß $T \subset U$ ist.

Es sei nun x ein Element, das (4) erfüllt. Da T und $x^{-1}T x$ l -dimensionale, also maximale Toroide in U sind, gibt es nach dem Hilfssatz 4, angewandt auf die Gruppe U statt auf G , ein Element $u \in U$, so daß $uT u^{-1} = x^{-1}T x$ ist; dann ist $xuT u^{-1}x^{-1} = T$, also ist xu Element des Normalisators N_T von T ; die Nebengruppe xU enthält somit ein Element von N_T . Es sei umgekehrt xU eine Nebengruppe, die ein Element y von N_T enthält; dann ist $x = yu$, $u \in U$, also $x^{-1}T x = u^{-1}y^{-1}T y u = u^{-1}T u \subset U$; es gilt also (4). Damit ist gezeigt: die Nebengruppe xU repräsentiert dann und nur dann einen Fixpunkt von f_a , wenn sie ein Element von N_T enthält.

Wenn aber in xU ein Element y enthalten ist, so ist, da $T \subset U$ ist, auch die ganze Nebengruppe $yT \subset xU$. Nach Hilfssatz 2 gibt es nur endlich viele Nebengruppen yT mit $y \in N_T$; folglich gibt es auch nur endlich viele Nebengruppen xU , welche Fixpunkte von f_a repräsentieren. Mithin ist die Anzahl dieser Fixpunkte endlich; sie ist übrigens positiv, da jedenfalls U selbst einen Fixpunkt repräsentiert.

Damit ist der Satz II samt dem oben formulierten Zusatz bewiesen.²⁰⁾

6. Durch den Beweis des Satzes II ist auch der Beweis der Behauptung $\chi(W) \geq 0$, der unser Hauptziel war, beendet. Wir können jetzt zu dieser Behauptung noch ein gruppentheoretisches Kriterium für die Unterscheidung zwischen $\chi > 0$ und $\chi = 0$ hinzufügen. Nach Satz I ist χ ja gleich der Anzahl der Fixpunkte einer Abbildung f_a , von welcher nur vorausgesetzt werden muß, daß sie höchstens endlich viele Fixpunkte hat; die in Nr. 5 betrachteten Abbildungen f_a haben, falls der Rang von U kleiner als l ist, keine Fixpunkte, und falls der Rang von U gleich l ist, eine positive Anzahl von Fixpunkten, wie am Schluß des Beweises be-

²⁰⁾ Aus dem Zusatz zu Satz II folgt, daß die Menge M der Elemente a , für welche die f_a höchstens endlich viele Fixpunkte haben, in G überall dicht ist; denn die maximalen Toroide überdecken G vollständig (Hilfssatz 3), und auf jedem Toroid liegen die erzeugenden Elemente überall dicht (Kroneckerscher Approximationssatz¹⁸⁾). Da M überdies, wie man leicht zeigt, eine in G offene Menge ist, ist man berechtigt zu sagen, daß „fast alle“ Elemente von G die im Satz II ausgesprochene Eigenschaft haben.

merkt wurde. Man kann daher die Aussage $\chi(W) \geq 0$ folgendermaßen präzisieren:

Die Charakteristik $\chi(W)$ des Wirkungsraumes W ist positiv oder Null, je nachdem die Isotropiegruppe U den gleichen Rang hat wie die ganze Gruppe G oder kleineren Rang als diese.

Wir wollen den Unterschied zwischen den Wirkungsräumen mit positiver und denen mit verschwindender Charakteristik noch etwas weiter verfolgen; er äußert sich besonders in Fixpunkt-Eigenschaften.

Ein Punkt ξ von W soll „permanenter“ Fixpunkt einer Untergruppe A von G heißen, wenn er Fixpunkt jeder Transformation f_a mit $a \in A$ ist. Wir behaupten zunächst:

Es sei $\chi(W) > 0$; dann gehört zu jeder zusammenhängenden Abelschen Untergruppe A von G ein permanenter Fixpunkt; dabei braucht A übrigens nicht abgeschlossen zu sein.

Denn die abgeschlossene Hülle von A ist ein Toroid T ; dieses wird von einem Element b erzeugt; die Abbildung f_b besitzt, da $\chi(W) > 0$ ist, einen Fixpunkt ξ , und dieser ist dann auch Fixpunkt aller Transformationen f_t mit $t \in T$, also insbesondere mit $t \in A$.

Unter den hier betrachteten Gruppen A sind die einparametrischen, geschlossenen oder offenen, Untergruppen von G enthalten; diese einparametrischen Gruppen A^1 untersuchen wir noch näher, ohne vorläufig etwas über $\chi(W)$ vorauszusetzen. Die Transformationen f_a von W , welche zu den Elementen a einer Untergruppe A^1 von G gehören, bilden eine stationäre Strömung von W , von der wir sagen, daß sie durch A^1 bewirkt wird. Wir nennen A^1 von der 1. Art oder von der 2. Art, je nachdem A^1 Untergruppe einer mit der Isotropiegruppe U konjugierten Gruppe xUx^{-1} ist oder nicht ist. Ist A^1 von der 1. Art, also $A^1 \subset xUx^{-1}$, so ist $x^{-1}ax \in U$ für alle $a \in A^1$; dann ist der Punkt ξ , der durch die Nebengruppe xU repräsentiert wird, permanenter Fixpunkt von A^1 . Ist A^1 von der 2. Art, so ist der Tangentialvektor von A^1 im Einheitspunkt e von G an keine Gruppe xUx^{-1} tangential; aus der Kompaktheit von G und von U folgt dann leicht, daß die von e verschiedenen Elemente a einer Umgebung von e auf A^1 ebenfalls keiner Gruppe xUx^{-1} angehören; das bedeutet, daß die zugehörigen Transformationen f_a fixpunktfrei sind; wir sagen dann: die durch A^1 bewirkte Strömung ist „im kleinen fixpunktfrei“.

Wenn $\chi(W) > 0$ ist, so gehört, wie schon gezeigt wurde, zu jeder Gruppe A^1 ein permanenter Fixpunkt; es gibt also dann nur Gruppen A^1

von der 1. Art. Wenn dagegen $\chi(W) = 0$ ist, so gibt es (nach den Sätzen II und I) eine Transformation f_a ohne Fixpunkt; da jedes Element von G auf einem Toroid liegt (Hilfssatz 3), liegt, wie aus einfachen Eigenschaften der Toroide ersichtlich ist, jedes Element auch auf einer einparametrischen Gruppe A^1 ; es sei A^1 eine solche Gruppe, die ein Element a enthält, für welches f_a fixpunktfrei ist; dann besitzt A^1 keinen permanenten Fixpunkt; folglich ist A^1 von der 2. Art. Man sieht also:

Ist $\chi(W) > 0$, so besitzt jede Strömung von W , die durch eine Untergruppe A^1 von G bewirkt wird, einen permanenten Fixpunkt; ist $\chi(W) = 0$, so gibt es solche Untergruppen A^1 von G , daß die durch sie bewirkten Strömungen von W im Kleinen fixpunktfrei sind, und daß daher die zugehörigen Systeme von Stromlinien keine Singularität besitzen²¹⁾.

Im Falle $\chi(W) = 0$ kann man noch etwas mehr behaupten. Diejenigen Richtungen im Punkte e von G , die tangential an Gruppen A^1 der 1. Art sind, bilden eine Menge \mathfrak{A}_1 , welche, wie aus der Kompaktheit von G und von U leicht folgt, abgeschlossen im Bündel aller Richtungen ist; ihre Komplementärmenge \mathfrak{A}_2 ist daher offen; \mathfrak{A}_2 ist ferner, wenn $\chi(W) = 0$ ist, nicht leer, da es in diesem Falle ja Gruppen A^1 von der 2. Art gibt, wie oben gezeigt wurde. Nun bilden aber diejenigen Richtungen, zu welchen *geschlossene* Gruppen A^1 gehören, eine in dem Bündel aller Richtungen überall dichte Menge (dies folgt leicht daraus, daß auf jedem Toroid die Punkte endlicher Ordnung überall dicht liegen); folglich enthält auch die offene und nicht leere Menge \mathfrak{A}_2 derartige Richtungen. Daraus ist ersichtlich:

Ist $\chi(W) = 0$, so gibt es sogar geschlossene Untergruppen A^1 von G , welche Strömungen von W bewirken, die im Kleinen fixpunktfrei sind; bei einer solchen Strömung sind alle Stromlinien einfach geschlossen.

Ein weiterer Unterschied zwischen den Fällen $\chi(W) > 0$ und $\chi(W) = 0$ zeigt sich, wenn man die Frage nach dem Auftreten *isolierter* Fixpunkte untersucht. Wenn $\chi(W) > 0$ ist, so folgt aus den Sätzen I und II, daß es Abbildungen f_a mit einer endlichen positiven Anzahl von Fixpunkten gibt; diese Fixpunkte sind sämtlich isoliert. Wenn $\chi(W) = 0$ ist, so gibt es gewiß keine Abbildung f_a , welche *nur* isolierte Fixpunkte besäße;

²¹⁾ Auf jeder geschlossenen Mannigfaltigkeit, deren Charakteristik 0 ist, gibt es stetige Vektorfelder ohne Nullstellen (*Alexandroff-Hopf*, l. c., p. 552), also auch stationäre Strömungen ohne Singularitäten; in dem obigen Satz liegt der Ton auf der Tatsache, daß die genannten Strömungen durch Untergruppen der gegebenen transitiven Gruppe G bewirkt werden; daraus folgt z. B., daß diese Strömungen Isometrien im Sinne der gegenüber G invarianten Riemannschen Metrik von W sind (*Cartan*, l. c., p. 43).

denn deren Anzahl müßte endlich und positiv sein, was sich nicht mit dem Satz I verträgt; eine Abbildung f_a hat also entweder keinen Fixpunkt oder unendlich viele Fixpunkte; dadurch ist aber das Auftreten eines isolierten Fixpunktes in einer unendlichen Menge von Fixpunkten noch nicht ausgeschlossen²²⁾. Es gilt jedoch folgender Satz:

Ist $\chi(W) = 0$, so tritt bei keiner Transformation f_a ein isolierter Fixpunkt auf.

Beweis. ξ sei isolierter Fixpunkt von f_a ; wir haben zu zeigen, daß dann $\chi(W) > 0$ ist. Ist xU die ξ repräsentierende Nebengruppe, so ist $x^{-1}ax \in U$; nach Hilfssatz 3 liegt a auf einem l -dimensionalen Toroid T , wobei l wieder den Rang von G bezeichnet; dann ist $(tx)^{-1}a(tx) = x^{-1}ax \in U$ für alle $t \in T$; dies bedeutet: ist $x' \in Tx$, so repräsentiert $x'U$ einen Fixpunkt von f_a . Da ξ isolierter Fixpunkt und Tx zusammenhängend ist, muß daher $Tx \subset xU$, also $x^{-1}Tx \subset U$ sein; dann hat U den Rang l . Nach dem ersten Satz dieser Nummer ist daher $\chi(W) > 0$.

Bemerkung. Eine naheliegende Verfeinerung dieses Beweises liefert den folgenden Satz: Wenn U den Rang l' hat, so liegt jeder Fixpunkt einer Transformation f_a auf einer $(l - l')$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit, die ganz aus Fixpunkten von f_a besteht.

Wenn die Dimension von W ungerade ist, so ist $\chi(W) = 0$, also tritt dann niemals ein isolierter Fixpunkt auf; der Hilfssatz 1 (Nr. 2) ist daher folgendermaßen zu präzisieren:

Ein isolierter Fixpunkt einer Transformation f_a eines Wirkungsraumes W hat immer den Index $+1$; ist die Dimension von W ungerade, so gibt es keinen isolierten Fixpunkt.

7. Zum Schluß soll noch die Frage behandelt werden, welche positiven Zahlen als Charakteristiken von Wirkungsräumen einer gegebenen Gruppe G auftreten. Hierfür knüpfen wir an den Hilfssatz 2, also an die endliche Nebengruppen-Zerlegung

$$N_T = T_1 + T_2 \cdots + T_\sigma \quad (3)$$

des Normalisators N_T eines maximalen Toroids T nach T an, worin $T_i = c_i T$, $T_1 = T$ ist; da T Normalteiler von N_T ist, gibt es eine Faktorgruppe $N_T/T = \mathfrak{S}$; nach (3) ist sie endlich, und zwar von der Ordnung σ . Aus dem Hilfssatz 4 folgt, daß die Struktur der Gruppe \mathfrak{S} nicht von dem

²²⁾ Zum Beispiel gibt es in der Gruppe G der elliptischen Bewegungen der reellen projektiven Ebene W Transformationen, bei denen die Menge der Fixpunkte aus den Punkten einer Geraden und einem isolierten Punkt besteht; hierbei ist aber $\chi(W) = 1$.

speziell gewählten maximalen Toroid T , sondern nur von der Gruppe G abhängt (bekanntlich spielt diese endliche Gruppe \mathfrak{S} eine wichtige Rolle bei der Untersuchung der Struktur von G). ²³⁾

Es sei nun $W = G/U$ und $\chi(W) > 0$; dann hat U den Rang l (Nr. 6), und U enthält daher ein maximales Toroid T von G . Aus dem Beweis des Satzes II (Nr. 5) ist zu ersehen, wie man die Charakteristik $\chi(W)$, die dort als Anzahl von Fixpunkten einer Transformation f_a auftritt, bestimmt: eine Nebengruppe xU repräsentiert dann und nur dann einen Fixpunkt, wenn sie ein Element von N_T enthält, oder was dasselbe ist, wenn sie eine Nebengruppe cT , $c \in N_T$, enthält; andererseits ist jede Nebengruppe cT in einer Nebengruppe xU enthalten; jedem der σ Elemente T_i von \mathfrak{S} ist also ein Fixpunkt durch die Vorschrift zugeordnet, daß $T_i = c_i T$ in der Nebengruppe xU , welche den Fixpunkt darstellt, enthalten sei, und durch diese Zuordnung werden alle Fixpunkte erfaßt. Zwei Elementen $T_i = c_i T$ und $T_j = c_j T$ ist dann und nur dann derselbe Fixpunkt zugeordnet, wenn $c_j \varepsilon c_i U$ ist; diese Bedingung läßt sich auch anders ausdrücken: die Durchschnittsgruppe $U \cap N_T = U'$ enthält T und besteht daher aus Nebengruppen $c_i T$; die Faktorgruppe $U'/T = \mathfrak{S}'$ ist eine Untergruppe von \mathfrak{S} ; die soeben formulierte Bedingung dafür, daß den Elementen T_i und T_j von \mathfrak{S} derselbe Fixpunkt zugeordnet sei, ist dann offenbar gleichbedeutend mit der folgenden: es ist $T_j \varepsilon T_i \mathfrak{S}'$, d. h., T_i und T_j gehören derselben Nebengruppe in der Nebengruppen-Zerlegung von \mathfrak{S} nach \mathfrak{S}' an. Hieraus ist ersichtlich: die Anzahl $\chi(W)$ der Fixpunkte ist gleich dem Index der Untergruppe \mathfrak{S}' in der Gruppe \mathfrak{S} .

Umgekehrt kann man zu jeder Zahl χ , welche als Index einer Untergruppe \mathfrak{S}' von \mathfrak{S} auftritt, einen Wirkungsraum W mit der Charakteristik χ finden: man hat nur unter $U = U'$ diejenige Untergruppe von N_T zu verstehen, deren Elemente in den zu \mathfrak{S}' gehörigen Nebengruppen $c_i T$ enthalten sind; dann hat, wie aus der soeben durchgeführten Überlegung hervorgeht, der Wirkungsraum $W = G/U$ die Charakteristik χ .

Damit ist gezeigt:

Als positive Charakteristiken von Wirkungsräumen der Gruppe G treten die und nur die Zahlen auf, welche Indizes von Untergruppen der Gruppe \mathfrak{S} sind; alle diese Zahlen sind Teiler von σ ; die Zahl σ selbst ist die Charakteristik des Wirkungsraumes G/T .

(Eingegangen den 7. Dezember 1940.)

²³⁾ Cartan, l. c., pp. 40—41. — Die Gruppe \mathfrak{S} ist isomorph der Gruppe derjenigen Automorphismen von T , welche durch innere Automorphismen von G bewirkt werden.

Über Parallelinvarianten bei Eibereichen

Von H. HADWIGER, Bern

Es seien \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 zwei Eibereiche der Ebene mit den Flächeninhalten F_1 und F_2 und den Umfängen U_1 und U_2 . Eine mit stetigen partiellen Ableitungen versehene Funktion Φ von vier Veränderlichen nennen wir eine Parallelinvariante für zwei Eibereiche, wenn der Funktionswert

$$\Phi[F_1, F_2, U_1, U_2] \quad (1)$$

beim Übergang von den Eibereichen \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 zu den äußeren Parallelbereichen $\mathfrak{G}_1(\xi)$ und $\mathfrak{G}_2(\xi)$ im Abstand ξ unverändert bleibt. Nach den Formeln von *J. Steiner* für Parallelbereiche gilt dann die Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} \Phi[F_1 + U_1\xi + \pi\xi^2, F_2 + U_2\xi + \pi\xi^2, U_1 + 2\pi\xi, U_2 + 2\pi\xi] = \\ = \Phi[F_1, F_2, U_1, U_2] . \end{aligned} \quad (2)$$

Jede solche Invariante ist Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$U_1 \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} + U_2 \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} + 2\pi \frac{\partial \Phi}{\partial U_1} + 2\pi \frac{\partial \Phi}{\partial U_2} = 0 . \quad (3)$$

Das Fundamentalsystem, das aus drei funktional unabhängigen Integralen besteht, wählen wir so, daß eine einheitliche geometrische Interpretation möglich ist. Es besteht aus den drei Invarianten

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= 2F_1 - \frac{U_1^2}{2\pi} , \\ \Phi_{12} &= F_1 + F_2 - \frac{U_1 U_2}{2\pi} , \\ \Phi_{22} &= 2F_2 - \frac{U_2^2}{2\pi} . \end{aligned} \quad (4)$$

Der Rang der Funktionalmatrix

$$\frac{\partial [\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}]}{\partial [F_1, F_2, U_1, U_2]} = \frac{1}{2\pi} \begin{vmatrix} 4\pi & 0 & -2U_1 & 0 \\ 2\pi & 2\pi & -U_2 & -U_1 \\ 0 & 4\pi & 0 & -2U_2 \end{vmatrix} \quad (5)$$

ist 3, wie man leicht verifiziert. Dann ist jede Parallelinvariante der betrachteten Art von der Form

$$\Phi = \varphi \{ \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22} \} , \quad (6)$$

wo φ eine mit stetigen partiellen Ableitungen versehene Funktion von drei Veränderlichen ist.

$$\text{Die „Defizite“} \quad \Phi_{ik} = F_i + F_k - \frac{U_i U_k}{2\pi} \quad (7)$$

lassen nun eine geometrische Deutung zu, die ihre Parallelinvarianz unmittelbar plausibel erscheinen läßt.

Wenn $p_i(\alpha)$ die stetig differenzierbare Stützfunktion von \mathfrak{G}_i bezeichnet, so läßt sich die Invariante Φ_{ik} durch das Doppelintegral

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ([p_i(\alpha) - p_k(\beta)]^2 - [p'_i(\alpha) - p'_k(\beta)]^2) d\alpha d\beta \quad (8)$$

darstellen, was im Hinblick auf die Formeln

$$F_i = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p_i^2(\alpha) - p_i'^2(\alpha)) d\alpha, \quad U_i = \int_0^{2\pi} p_i(\alpha) d\alpha$$

sofort zu erkennen ist.

Das Integral (8) kann auch anders gelesen werden, nämlich

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad (9)$$

wobei

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ([p_i(\alpha) - p_k(\alpha + \theta)]^2 - [p'_i(\alpha) - p'_k(\alpha + \theta)]^2) d\alpha \quad (10)$$

gesetzt wird. Wenn $\mathfrak{G}_k^{[\theta]}$ den Bereich bezeichnet, der aus \mathfrak{G}_k durch Drehung um den Winkel θ (im negativen Sinn) entsteht, so kann das Integral (10) als Flächeninhalt des Differenzbereiches $\mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k^{[\theta]}$ gedeutet werden. Die Differenz $\mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k^{[\theta]}$ ist im Sinne der *Minkowskischen* linearen Kombination konvexer Bereiche rein formal, das heißt ohne Rücksicht auf die geometrische Realisierbarkeit aufzufassen.

Die Beziehung (9) läßt also die folgende Deutung zu:

Die Parallelinvariante Φ_{ik} ist gleich dem über alle Drehlagen $0 \leq \theta < 2\pi$ erstreckte Mittelwert des Flächeninhaltes des formal gebildeten Differenzbereiches $\mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k^{[\theta]}$.

Ist \mathfrak{R} ein Kreis, so findet die Parallelinvarianz von Φ_{ik} durch die formale Relation

$$(\mathfrak{G}_i + \mathfrak{R}) - (\mathfrak{G}_k^{[\theta]} + \mathfrak{R}^{[\theta]}) = \mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k^{[\theta]} \quad (\mathfrak{R}^{[\theta]} = \mathfrak{R})$$

ihren sinnfälligen Ausdruck.

Wir wollen nun noch auf eine andere Möglichkeit eintreten, die Invarianten Φ_{ik} als geometrische Mittelwerte zu interpretieren. Wenn wir in der Ebene alle zu \mathfrak{G}_i kongruenten Bereiche auflegen, die aus \mathfrak{G}_i in fester Ausgangslage durch eine Decktranslation des quadratischen Einheitsgitters hervorgehen, so entsteht ein sog. Eibereichgitter $\{\mathfrak{G}_i\}$. In diesem Gitter wird nun \mathfrak{G}_k als frei beweglich angenommen. Jeder Lage von \mathfrak{G}_k entspricht eine *Treffzahl* N und eine *Schnittpunktzahl* S . Die Treffzahl N bezeichne die Zahl der Bereiche \mathfrak{G}_i von $\{\mathfrak{G}_i\}$, die mit \mathfrak{G}_k nicht leeren Durchschnitt haben (getroffen werden), und die Schnittpunktzahl S die Zahl der Schnittpunkte des Randes von \mathfrak{G}_k mit den Rändern der getroffenen \mathfrak{G}_i .

Die Endlage von \mathfrak{G}_k kann relativ zu einer festen Ausgangslage durch zwei Translationskomponenten x und y und einen Drehwinkel θ festgelegt werden, so daß die Zahlen N und S als Funktionen

$$N = N(x, y; \theta), \quad S = S(x, y; \theta) \quad (11)$$

der bezeichneten Veränderlichen erscheinen.

Durch Zurückführung auf die Hauptformeln der ebenen Integralgeometrie ergeben sich die Mittelwertformeln¹⁾

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} N(x, y; \theta) dx dy d\theta = F_i + F_k + \frac{U_i U_k}{2\pi}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} S(x, y; \theta) dx dy d\theta = \frac{2 U_i U_k}{\pi}. \quad (13)$$

Mit ihrer Hilfe gewinnt man die Darstellung

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \{N(x, y; \theta) - \frac{1}{2} S(x, y; \theta)\} dx dy d\theta. \quad (14)$$

Indem wir dieses Integral wieder als geometrischen Mittelwert lesen, gelangen wir zu der weiteren Deutung:

¹⁾ H. Hadwiger, Über Mittelwerte im Figurengitter. Coment. Math. Helv. 11, 1939, S. 221—233; bes. S. 225 und S. 232.

Über die Berechnung derartiger Mittelwerte in Gittern vgl. auch L. A. Santaló, Geometria Integral 31 (Sobre valores medios y probabilidades geométricas). Math. Abh. Hamburg 13, 1940, S. 284—294.

Die Parallelinvariante Φ_{ik} ist gleich dem über alle Lagen von \mathfrak{G}_k im Gitter $\{\mathfrak{G}_i\}$ erstreckten Mittelwert des „Überschusses“ $N - S/2$.

Es ist nun aufschlußreich, die Parallelinvarianz von Φ_{ik} nach der oben gegebenen geometrischen Deutung weiter zu verfolgen.

Es stellt sich nämlich heraus, daß nicht nur der Mittelwert, sondern für jede Lage von \mathfrak{G}_k die Differenz (15) $N - S/2$ selbst parallelinvariant ist. Dieser Sachverhalt kann durch den folgenden einfachen Hilfssatz über die Schnittpunktzahl zweier Eiliniien klargestellt werden:

Haben zwei Eibereiche \mathfrak{G}_i und \mathfrak{G}_k einen inneren Punkt gemeinsam, bzw. keinen inneren Punkt gemeinsam, so erfährt die Ränderschnittpunktzahl beim Übergang zu den äußeren Parallelbereichen $\mathfrak{G}_i(\xi)$ und $\mathfrak{G}_k(\xi)$ keine Veränderung, bzw. höchstens einen Zuwachs 2.

Diese Aussage läßt sich leicht aus einer Feststellung von *H. Gericke*²⁾ folgern, wonach die Ränderschnittpunktzahl zweier Eibereiche mit gemeinsamem innerem Punkt gleich der Anzahl Zeichenwechsel der Differenz der auf den gemeinsamen Punkt bezogenen Stückfunktionen ist.

Nun kann leicht eingesehen werden, daß die Differenz (15) ihren Wert nicht ändern kann, wenn man von den Bereichen \mathfrak{G}_i und \mathfrak{G}_k zu den äußeren Parallelbereichen übergeht, denn für Bereiche \mathfrak{G}_i von $\{\mathfrak{G}_i\}$ die von \mathfrak{G}_k getroffen werden, ändern sich beim Übergang zu den äußeren Parallelbereichen die Schnittpunktzahlen nicht. Werden bei diesem Übergang neue \mathfrak{G}_i durch \mathfrak{G}_k getroffen, so erfährt die Zahl N für jeden Treffer den Zuwachs 1, die Zahl S jedoch den Zuwachs 2, so daß die Differenz unverändert bleibt.

Noch nach einer anderen Seite hin erweist sich die Diskussion von (14) als nützlich: Wenn von den beiden Bereichen \mathfrak{G}_i und \mathfrak{G}_k keiner den andern bedecken kann, so gilt offenbar stets

$$N - \frac{S}{2} \leq 0,$$

da die Schnittpunktzahl der Ränder mindestens 2 ist, wenn sich die Bereiche treffen. Hieraus schließen wir:

Notwendig dafür, daß von den beiden Bereichen \mathfrak{G}_i und \mathfrak{G}_k keiner den andern bedecken kann, ist die Bedingung $\Phi_{ik} \leq 0$.

²⁾ *H. Gericke*, Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises. *Math. Z.* 40, 1935, S. 417—420, bes. S. 418.

Dieses Kriterium findet sich bei *W. Blaschke*³⁾ noch unter etwas allgemeineren Voraussetzungen. Es enthält die isoperimetrische Ungleichung

$$\Phi_{ii} \leq 0$$

als Spezialisierung auf den Fall kongruenter Bereiche, wo offenbar keiner den anderen bedecken kann. Der Satz, daß das Gleichheitszeichen in der isoperimetrischen Ungleichung nur für den Kreis Geltung hat, erweist sich in diesem Zusammenhang als äquivalent mit einem Satz von *T. Kubota*⁴⁾, wonach jede vom Kreis verschiedene Eilinie eine kongruente Eilinie in mehr als 2 Punkten schneiden kann.

(Eingegangen den 24. Februar 1941.)

³⁾ *W. Blaschke*, Vorlesungen über Integralgeometrie. Erstes Heft, 2. erw. Aufl., Leipzig und Berlin 1936, S. 45.

⁴⁾ *T. Kubota*, Notes on closed convex curves. Tôhoku Math. J. Bd. 21, 1922, S. 21—23.

Fondements d'une théorie générale de la courbure linéaire

Par EUGÈNE EGERVÁRY et GEORGES ALEXITS, Budapest

L'évolution de l'analyse mathématique a suggéré de bonne heure l'idée de traduire les propriétés locales d'une figure géométrique en termes du calcul infinitésimal. Bien que cette méthode d'arithmétisation ait établi de nouveaux aspects à l'époque où il ne s'agissait que de définir plus ou moins exactement les notions intuitives de géométrie, on ne peut pas contester que l'arithmétisation illimitée a conduit, en quelque sorte, à une certaine décadence de l'idée géométrique. En effet, l'identification de la figure intuitive avec l'ensemble des valeurs de certaines fonctions dérivables est un procédé arbitraire et, en tout cas, contraire à l'esprit géométrique. Mais, abstraction faite de la tendance analyste qui veut transformer une partie considérable de la géométrie en une simple application du calcul infinitésimal, les conditions de dérivabilité créent, même du point de vue analyste, une atmosphère vague; car on ne connaît guère le sens géométrique exact de l'hypothèse que les fonctions par lesquelles on a réalisé la représentation paramétrique d'une figure arbitraire possèdent, dans un certain intervalle, une n -ième dérivée. La géométrie infinitésimale a donc un caractère heuristique; ses méthodes ont été imposées pour remédier à l'incapacité des méthodes de la géométrie classique; mais elles ne portent point les traits d'une nécessité mathématique.

Dans l'état actuel du développement de la science, il faut absolument reprendre le problème des fondements de la géométrie infinitésimale, en étudiant systématiquement les propriétés locales intrinsèques des continus sans faire appel à l'introduction de coordonnées. Alors, les propriétés locales des continus seront caractérisées par l'intermédiaire de la notion de distance, celle-ci étant l'élément déterminant de l'espace. Il s'agit donc d'une recherche systématique de certains invariants des isomorphies; invariants caractérisant les propriétés métriques des continus de même que certains invariants des homéomorphies caractérisent leurs propriétés topologiques.

L'idée de fonder l'étude des propriétés locales des continus uniquement sur la recherche des relations entre les distances mutuelles de leurs points est due à M. Menger¹). Il a commencé ses recherches par une étude

¹) *Menger*, 10. (Le nombre après le nom de l'auteur indique le numéro sous lequel le titre de l'ouvrage respectif figure dans la bibliographie que nous avons réunie à la fin de ce mémoire.

approfondie de la notion de première courbure d'un arc. La notion de deuxième courbure (torsion) d'un arc a été recherchée de ce point de vue par l'un des auteurs²⁾, tandis que l'autre³⁾ a réussi à introduire une définition générale des courbures supérieures d'un arc euclidien; définition qui se prête à une généralisation immédiate aux espaces distanciés.

Le plan du présent travail est le suivant: Nous définirons d'abord, au § 1, la notion de courbure linéaire d'ordre n . (Nous parlons d'une courbure *linéaire* pour mettre en évidence le caractère linéaire de notre notion de courbure, en opposition aux notions de courbure superficielle, courbure de Riemann, etc.) Nous passerons, au § 2, à la recherche des propriétés de continuité de la n -ième courbure linéaire. Il suit, au § 3, une recherche de la structure des continus euclidiens ayant une courbure linéaire d'ordre n ; puis nous allons étudier, au § 4, l'existence des courbures linéaires d'un arc situé dans un espace euclidien et assujetti aux conditions de dérivabilité, habituelles dans la géométrie infinitésimale. Nous nous occuperons enfin, au § 5, des arcs dont la n -ième courbure linéaire s'évanouit partout.

§ 1. La définition de la n -ième courbure linéaire

1.1. Nous appellerons *espace semi-distancié* un ensemble E tel que à tout couple p, q de ses éléments soit attaché un nombre pq assujetti aux conditions suivantes:

$$1. \quad pq = qp \geq 0;$$

$$2. \quad pq = 0 \text{ et } p = q \text{ s'entraînent réciproquement.}$$

Les éléments de E s'appellent *points* de l'espace E et le nombre pq l'*écart* des points p et q . L'espace semi-distancié E est un espace *distancié*, si l'écart pq satisfait, outre les conditions 1 et 2, à l'inégalité triangulaire

$$3. \quad pq + qr \geq pr.$$

Dans ce cas, on appelle l'écart pq la *distance* des points p et q . Considérons n points p_1, p_2, \dots, p_n d'un espace semi-distancié quelconque et posons

$$D(p_1, p_2, \dots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (p_i p_j)^2 \end{vmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Ce déterminant jouera un rôle éminent dans nos recherches suivantes.

²⁾ *Alexits, 1, 2.*

³⁾ *Egerváry, 6.*

1.2. Etant donné dans l'espace semi-distancié E un système de $(n + 2)$ points différents p_0, p_1, \dots, p_{n+1} tels que⁴⁾ $D(p_0, p_1, \dots, p_n) \neq 0$, $D(p_1, p_2, \dots, p_{n+1}) \neq 0$, nous appellerons *courbure linéaire des points* p_0, p_1, \dots, p_{n+1} correspondant au sens de parcours $p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_{n+1}$ le nombre positif

$$\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = \frac{n + 1}{p_0 p_{n+1}} \sqrt{\frac{|D(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) \cdot D(p_1, p_2, \dots, p_n)|}{|D(p_0, p_1, \dots, p_n) \cdot D(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})|}}. \quad (1)$$

La valeur de $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ dépend évidemment du sens de parcours du système de $n + 2$ points considéré, excepté au cas où $n = 1$; puisque, en prenant $n = 1$, on obtient:

$$- D(p_0, p_1, p_2) =$$

$$= (p_0 p_1 + p_0 p_2 + p_1 p_2) (p_0 p_1 + p_0 p_2 - p_1 p_2) (p_0 p_1 + p_1 p_2 - p_0 p_2) (p_0 p_2 + p_1 p_2 - p_0 p_1),$$

$$D(p_0 p_1) = 2(p_0 p_1)^2, \quad D(p_1, p_2) = 2(p_1 p_2)^2, \quad - D(p_1) = 1;$$

par conséquent:

$$\kappa(p_0, p_1, p_2) =$$

$$= \frac{\sqrt{|(p_0 p_1 + p_0 p_2 + p_1 p_2) (p_0 p_1 + p_0 p_2 - p_1 p_2) (p_0 p_1 + p_1 p_2 - p_0 p_2) (p_0 p_2 + p_1 p_2 - p_0 p_1)|}}{p_0 p_1 \cdot p_0 p_2 \cdot p_1 p_2}.$$

Cette expression est symétrique et elle coïncide avec la formule élémentaire dont M. Menger⁵⁾ s'est servi pour définir la courbure de trois points d'un espace distancié.

1.3. Soit maintenant p_0 un point d'accumulation de l'espace E . Envisageons l'expression $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ pour tout système de $n + 2$ points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} de E et pour tout sens de parcours de ces points pour lesquels $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ existe. Admettons encore l'existence de la limite⁶⁾

$$\kappa_n(p_0) = \lim_{p_i \rightarrow p_0} \kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1). \quad (2)$$

⁴⁾ Cette condition équivaut, dans un espace euclidien, à la condition que, ni les points p_0, p_1, \dots, p_n , ni p_1, p_2, \dots, p_{n+1} , ne soient pas situés dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel.

⁵⁾ Menger, 10.

⁶⁾ La restriction engendrée par la condition que la limite de $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ existe pour *tout* sens de parcours du système de $n + 2$ points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} disparaît, s'il s'agit d'une courbe de la géométrie infinitésimale classique; car, dans ce cas, tout sens de parcours équivaut, comme nous le verrons, au sens de parcours naturel de la courbe considérée.

Nous appellerons $\kappa_n(p_0)$ la n -ième courbure linéaire de l'espace E au point p_0 . Le point p_0 joue dans cette définition de la n -ième courbure linéaire un rôle particulier. Pour le faire disparaître, on peut introduire une n -ième courbure linéaire de seconde espèce, en posant

$$\kappa_n^*(p_0) = \lim_{p_i \rightarrow p_0} \kappa(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) \quad (i = 1, 2, \dots, n+2) \quad (2^*)$$

où l'expression $\kappa(p_1, p_2, \dots, p_{n+2})$ est à former pour tout système de $n+2$ points de E et pour tout sens de parcours de ces points pour lesquels $\kappa(p_1, p_2, \dots, p_{n+2})$ existe.

1.4. La première courbure linéaire $\kappa_1(p_0)$ est identique avec la courbure d'arc de M. Alt⁷⁾, tandis que la première courbure linéaire de seconde espèce $\kappa_1^*(p_0)$ se réduit à la définition de la courbure d'arc de M. Menger⁸⁾. Pour $n = 2$, on a $D(p_1, p_2) = 2(p_1 p_2)^2$, par suite

$$\kappa(p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{p_2 p_3}{p_1 p_4} \sqrt{\frac{18 |D(p_0, p_1, p_2, p_3)|}{|D(p_0, p_1, p_2) \cdot D(p_1, p_2, p_3)|}}$$

Les secondes courbures linéaires $\kappa_2(p_0)$ et $\kappa_2^*(p_0)$ se réduisent donc aux expressions par lesquelles l'un des auteurs⁹⁾ a réussi à définir la torsion des espaces distanciés.

1.5. Dans l'espace euclidien k -dimensionnel E_k , le sens géométrique des courbures linéaires est bien plausible. En effet, n étant ≥ 1 , tout système de $n+1$ points q_1, q_2, \dots, q_{n+1} de l'espace E_k détermine un simplexe n -dimensionnel ayant pour sommets les points q_1, q_2, \dots, q_{n+1} . Désignons par $V(q_1, q_2, \dots, q_{n+1})$ le volume de ce simplexe et posons, pour $n = 0$, $V(q_1) = 1$. Alors, les déterminants figurant dans la définition de la n -ième courbure linéaire se laissent représenter par l'intermédiaire des nombres $V(q_1, q_2, \dots, q_{n+1})$, puisqu'il est connu que

$$D(q_1, q_2, \dots, q_{n+1}) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} [V(q_1, q_2, \dots, q_{n+1})]^2.$$

Dans l'espace E_k , l'expression $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ peut donc s'écrire sous la forme suivante:

$$\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = \frac{(n+1)^2}{n \cdot p_0 p_{n+1}} \cdot \frac{V(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) \cdot V(p_1, p_2, \dots, p_n)}{V(p_0, p_1, \dots, p_n) \cdot V(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})}. \quad (3)$$

⁷⁾ Alt, 4.

⁸⁾ Menger, 10.

⁹⁾ Alexits, 1, 2.

Par conséquent, les courbures linéaires $\kappa_n(p_0)$ et $\kappa_n^*(p_0)$ se réduisent, dans les espaces euclidiens, aux expressions par l'intermédiaire desquelles l'un des auteurs¹⁰⁾ a défini la n -ième courbure d'un arc euclidien.

1.6. Soit $P_{i, n+i}$ l'hyperplan n -dimensionnel passant par les points $p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+n}$ et désignons par $\widehat{P_{i, n+i} P_{j, n+j}}$ l'angle¹¹⁾ des hyperplans $P_{i, n+i}$ et $P_{j, n+j}$. Il est connu¹²⁾ que

$$\sin \widehat{P_{0, n} P_{1, n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{V(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) \cdot V(p_1, p_2, \dots, p_n)}{V(p_0, p_1, \dots, p_n) \cdot V(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})},$$

pourvu que $V(p_0, p_1, \dots, p_n) \neq 0 \neq V(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$. On obtient par suite, en vertu de la relation (3):

$$\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = (n+1) \frac{\sin \widehat{P_{0, n} P_{1, n+1}}}{p_0 p_{n+1}}. \quad (4)$$

1.7. Le sens géométrique de la n -ième courbure linéaire s'approche encore des notions habituelles de la géométrie infinitésimale, si l'on suppose que E est un arc situé dans l'espace E_k et représenté par k fonctions de la longueur s de l'arc E . Désignons, en effet, par η l'angle de deux hyperplans osculateurs n -dimensionnels de E , l'un appartenant au point p_0 , l'autre à un point voisin de p_0 . Il est aisé de démontrer¹³⁾ que, E étant un arc $(n+1)$ -fois dérivable, on a

$$(n+1) \lim_{p_i \rightarrow p_0} \frac{\sin \widehat{P_{0, n} P_{1, n+1}}}{p_0 p_{n+1}} = \frac{d\eta}{ds} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

quel que soit l'ordre des points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} ; par conséquent,

$$\kappa_n(p_0) = \frac{d\eta}{ds}.$$

¹⁰⁾ *Egerváry*, 6.

¹¹⁾ Désignons dans l'espace E_k par $x_{\mu\nu}$ ($\mu = 0, 1, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, k$) les coordonnées de $n+1$ points déterminant un hyperplan n -dimensionnel P et par $y_{\mu\nu}$ les coordonnées d'un autre système de $n+1$ points déterminant un hyperplan n -dimensionnel Q . Nous définissons l'angle η des hyperplans P et Q par la relation

$$\cos \eta = \frac{\|x_{\mu\nu} - x_{0\nu}\| \cdot \|y_{\mu\nu} - y_{0\nu}\|}{\sqrt{\|x_{\mu\nu} - x_{0\nu}\|^2 \cdot \|y_{\mu\nu} - y_{0\nu}\|^2}}.$$

Dans l'espace $(n+1)$ -dimensionnel, l'angle η se réduit à l'angle élémentaire des normales de P et Q . Cette définition de l'angle η remonte à Kronecker. Voir à ce sujet *H. Kühne*, 7.

¹²⁾ *Meyer*, 12.

¹³⁾ *Egerváry*, 6.

La notion de n -ième courbure linéaire généralise donc les notions infinitésimales de courbure et de torsion d'un arc euclidien.

§ 2. Propriétés générales des courbures linéaires

2.1. Un espace semi-distancié est *compact*, si toute suite infinie de ses points possède un point d'accumulation. Un espace distancié, connexe et compact, comprenant plus d'un point, s'appelle un *continu*. Si tout voisinage d'un point arbitraire du continu E contient un voisinage connexe, on dit que E est *localement connexe*. Introduisons pour un moment l'expression de *continu n fois courbé* pour un continu ayant la propriété que tout système de $n + 2$ de ses points, p_0, p_1, \dots, p_{n+1} , situés dans un voisinage suffisamment petit, ait une courbure linéaire $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ pour au moins un sens de parcours¹⁴). Après ces définitions, nous pouvons énoncer le théorème suivant¹⁵):

Si E est un continu localement connexe, n fois courbé et ayant à tout point p une n -ième courbure linéaire $\kappa_n(p)$, alors $\kappa_n(p)$ est une fonction de Baire de première classe au plus.

E étant un continu localement connexe, il existe, grâce à un théorème de Hahn et M. Mazurkiewicz¹⁶), une correspondance univoque et continue $f(x)$ transformant le segment $0 \leq x \leq 1$ dans le continu E . A un point arbitraire p_0 de E , il correspond donc au moins une valeur $0 \leq x_0 \leq 1$ telle que $p_0 = f(x_0)$. Choisissons les points p_1, p_2, \dots, p_{n+1} de sorte que $p_i = f\left(x_0 + \frac{i}{\nu}\right)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, où ν désigne un entier positif arbitraire. Le diamètre du système de $n + 2$ points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} devient très petit, si ν devient assez grand. En prenant donc ν suffisamment grand, la courbure linéaire $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ existe pour un sens de parcours au moins, puisque E est, d'après l'hypothèse, un continu n fois courbé. Posons

$$\varphi_\nu(p_0) = \kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) \quad (5)$$

Comme $p_j = f\left(x_0 + \frac{j}{\nu}\right)$, la fonction $\varphi_\nu(p_0)$ ne dépend que du point $p_0 = f(x_0)$. On voit tout de suite que $\varphi_\nu(p)$ est une fonction continue en tout point p de E . En effet, il résulte de la relation (1) que, $p'_0, p'_1, \dots, p'_{n+1}$ et $p''_0, p''_1, \dots, p''_{n+1}$ étant deux systèmes de $n + 2$ points de E , la diffé-

¹⁴) Cette condition équivaut dans l'espace euclidien à la condition que $n + 1$ points ayant un diamètre suffisamment petit ne soient pas situés dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel.

¹⁵) Pour $n = 2$ voir *Alexits*, 2.

¹⁶) Voir p. ex. *Menger*, 11.

rence $|\kappa(p'_0, p'_1, \dots, p'_{n+1}) - \kappa(p''_1, p''_2, \dots, p''_{n+1})|$ devient arbitrairement petite, pourvu que les points p'_i et p''_i soient assez voisins. Mais, il s'ensuit, en vertu des relations (2) et (5), que

$$\kappa_n(p) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu(p) ;$$

par suite, $\kappa_n(p)$ étant dans l'espace distancié E la limite d'une suite de fonctions continues, elle est une fonction de Baire au plus de première classe; c. q. f. d.

2.2. Si E est un espace distancié ayant partout une n -ième courbure linéaire de seconde espèce $\kappa_n^*(p)$, alors $\kappa_n^*(p)$ est une fonction continue dans l'espace E^{17} .

Toute fonction étant continue en un point isolé de l'espace, nous n'avons qu'à envisager les points d'accumulation de E . Soit donc p un point-limite d'une suite de points $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(i)}, \dots$ de E . Il existe, en vertu de la relation (2*), pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que

$$|\kappa_n^*(p^{(i)}) - \kappa(p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_{n+2}^{(i)})| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

pourvu que les distances des points $p_j^{(i)}$ au point $p^{(i)}$ restent inférieures au nombre $\delta/2$. Mais, pour un i suffisamment grand, on a $pp^{(i)} < \delta/2$. Il s'ensuit donc, d'après l'inégalité triangulaire, $pp^{(i)} < \delta$. Par conséquent, si $\delta > 0$ est un nombre suffisamment petit, on obtient

$$|\kappa_n^*(p) - \kappa(p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_{n+2}^{(i)})| < \frac{\varepsilon}{2} ;$$

par suite:

$$|\kappa_n^*(p) - \kappa_n^*(p^{(i)})| < \varepsilon ,$$

c. q. f. d.

2.3. Quant aux deux définitions différentes (2) et (2*) de la n -ième courbure linéaire, nous allons voir que leur différence n'est pas essentielle; car $\kappa_n^*(p)$ est, pour ainsi dire, la forme continue de $\kappa_n(p)$. Nous démontrerons à cet égard le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace distancié et compact E ait partout une n -ième courbure linéaire de seconde espèce $\kappa_n^(p)$ est que $\kappa_n(p)$ existe et soit continue en tout point de E .*

La nécessité de notre condition est évidente, puisque l'existence de $\kappa_n^*(p)$ entraîne celle de $\kappa_n(p)$ et, $\kappa_n^*(p)$ étant continue d'après 2.2,

¹⁷ Ce théorème a été démontré, pour $n = 1$, par *Alt*, 3, et, pour $n = 2$, par *Alexits*, 2.

$\kappa_n(p) = \kappa_n^*(p)$ l'est aussi. Pour démontrer la suffisance, nous avons besoin du lemme suivant :

Si $\kappa_n(p)$ est une fonction continue dans E , il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que

$$|\kappa_n(p_0) - \kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})| < \varepsilon$$

indépendamment du choix du point p_0 de E , pourvu que $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ existe et que les distances $p_0 p_j$, ($j = 1, 2, \dots, n+1$), restent inférieures à δ .

Admettons que notre lemme soit faux et nous en déduirons une contradiction. Envisageons, à cet effet, deux systèmes de $n+2$ points: p_0, p_1, \dots, p_{n+1} et q_0, q_1, \dots, q_{n+1} . On peut indiquer pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$, dont la valeur dépend éventuellement du choix des points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} , de sorte que

$$|\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) - \kappa(q_1, q_2, \dots, q_{n+1})| < \varepsilon, \quad (6)$$

pourvu que $p_j q_j < \delta(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$. Si, comme nous l'avons supposé, notre lemme était faux, il existerait une suite $\{p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, \dots, p_{n+1}^{(i)}\}$ de systèmes de points tels que $p_0^{(i)} p_j^{(i)} < 1/i$ et

$$|\kappa_n(p^{(i)}) - \kappa(p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, \dots, p_{n+1}^{(i)})| \geq 3\varepsilon, \quad (7)$$

quelque petit que soit le nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance. L'espace E étant compact, on peut supposer sans restreindre la généralité que¹⁸⁾ la suite des points $p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, \dots, p_0^{(i)}, \dots$ converge vers un point-limite p_0 . On peut donc prendre $p_0 p_0^{(i)} < \delta_1$; il en résulte, si $\delta_1 > 0$ est un nombre assez petit :

$$|\kappa_n(p_0) - \kappa_n(p_0^{(i)})| < \varepsilon. \quad (8)$$

La définition (2) de $\kappa_n(p_0)$ entraîne l'existence d'un nombre $\delta_2 > 0$ tel que, pour $p_0 p_j < \delta_2$, on ait

$$|\kappa_n(p_0) - \kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})| < \varepsilon. \quad (9)$$

Choisissons maintenant l'entier i de sorte que $1/i$ reste inférieur au plus petit des trois nombres positifs $\delta_1, \delta_2, \delta(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$, et que $p_0 p_j < 1/i, p_j p_j^{(i)} < 1/i, p_0^{(i)} p_j^{(i)} < 1/i$. Il en résulte

$$p_j p_j^{(i)} < \delta(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}).$$

¹⁸⁾ Si la suite $p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, \dots, p_0^{(i)}, \dots$ n'est pas convergente, on en peut extraire une suite partielle convergente.

On voit donc que, même en choisissant les points figurant aux inégalités (7), (8) et (9) de sorte que leurs distances satisfassent aux susdites conditions, les relations (7), (8) et (9) entraînent nécessairement l'inégalité

$$| \kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) - \kappa(p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, \dots, p_{n+1}^{(i)}) | > \varepsilon ;$$

ce qui est en contradiction avec la relation (6), et la démonstration de notre lemme est achevée.

Passons maintenant à la démonstration de la suffisance de notre condition. Envisageons, à ce but, un système de $n + 2$ points p_1, p_2, \dots, p_{n+2} dont chacun a une distance inférieure à $\delta > 0$ du point p_0 arbitrairement choisi. Si $\delta > 0$ est suffisamment petit, il résulte de notre lemme que

$$| \kappa_n(p_1) - \kappa(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) | < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

quelque petit que soit $\varepsilon > 0$ et indépendamment du choix des points p_1, p_2, \dots, p_{n+2} . Comme $\kappa_n(p)$ est une fonction continue de p , on obtient

$$| \kappa_n(p_0) - \kappa_n(p_1) | < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

pourvu que $\delta > 0$ soit suffisamment petit; par conséquent

$$| \kappa_n(p_0) - \kappa(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) | < \varepsilon .$$

Nous avons donc démontré que, les points p_1, p_2, \dots, p_{n+2} étant situés dans un voisinage suffisamment petit du point p_0 , leur courbure linéaire diffère très peu de $\kappa_n(p_0)$. Cette proposition équivaut, d'après (2*), à l'existence de $\kappa_n^*(p_0) = \kappa_n(p_0)$; c. q. f. d.

§ 3. Propriétés des continus euclidiens doués d'une n-ième courbure linéaire

3.1. Soit dans ce paragraphe E un sous-ensemble de l'espace euclidien k -dimensionnel E_k . On appelle généralement voisinage du point p_0 de E un sous-ensemble ouvert U de E_k auquel p_0 est intérieur. Mais, pour simplifier les notations, nous appellerons *voisinage de p* , et nous désignerons par $U(p_0)$, l'ensemble des points communs de E et U .

Si l'ensemble E de E_k possède au point p_0 une n-ième courbure linéaire, aucun voisinage de p_0 n'est contenu dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel de E_k .

En effet, si $U(p_0)$ était un voisinage de p_0 situé dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel, le volume $V(p_0, p_1, \dots, p_n)$ du simplexe n -dimen-

sionnel déterminé par les points p_0, p_1, \dots, p_n s'évanouirait. On ne pourrait donc attribuer une courbure linéaire $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ à aucun système de $n + 2$ points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} situés dans $U(p_0)$, parce que le dénominateur de la fraction figurant dans la définition (3) de cette expression s'évanouirait. Par suite, la n -ième courbure linéaire $\kappa_n(p_0)$ n'existerait pas non plus, contrairement à notre hypothèse.

3.2. Un sous-ensemble E de E_k possède en son point d'accumulation p_0 un hyperplan osculateur n -dimensionnel, si tout hyperplan n -dimensionnel passant par $n + 1$ points p_1, p_2, \dots, p_{n+1} arbitraires de E tend vers un seul hyperplan n -dimensionnel, lorsque p_1, p_2, \dots, p_{n+1} tendent sur E indépendamment vers p_0 .

Si le continu E de E_k possède en son point p_0 une n -ième courbure linéaire finie $\kappa_n(p_0)$, il y possède aussi un hyperplan osculateur n -dimensionnel.

Il existe, d'après 3.1, dans tout voisinage $U(p_0)$ de p_0 $n + 1$ points p_1, p_2, \dots, p_{n+1} de E qui déterminent exactement un hyperplan n -dimensionnel $P_{1, n+1}$. Nous avons à démontrer que $P_{1, n+1}$ tend vers une position-limite. Aucun voisinage de p_0 n'étant situé dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel, on peut parvenir — s'il le faut par un petit déplacement des points p_1, p_2, \dots, p_n — à ce que les $n + 1$ points p_0, p_1, \dots, p_n déterminent aussi exactement un hyperplan n -dimensionnel $P_{0, n}$.

L'angle $\overset{\frown}{P_{0, n} P_{1, n+1}}$ est donc défini; on en obtient d'après (2), (3) et (4):

$$(n + 1) \lim_{p_i \rightarrow p_0} \frac{\sin \overset{\frown}{P_{0, n} P_{1, n+1}}}{p_0 p_{n+1}} = \kappa_n(p_0) .$$

Or $\kappa_n(p_0)$ étant un nombre fini, il en résulte $\overset{\frown}{P_{0, n} P_{1, n+1}} \rightarrow 0$; ce qui équivaut à notre proposition.

3.3. *Si le continu E de E_k possède à son point p_0 une n -ième courbure linéaire de second espèce $\kappa_n^*(p_0) \neq 0$, il existe un voisinage $U(p_0)$ de p_0 tel que tout hyperplan n -dimensionnel ait au plus $n + 1$ points communs avec $U(p_0)$.*

Admettons, en effet, que notre proposition soit fautive et nous en déduirons une contradiction. Soit donc $U_i(p_0)$ un voisinage de p_0 dont le diamètre est $< 1/i$. Il existe, d'après l'hypothèse, $n + 2$ points p_1, p_2, \dots, p_{n+2} de $U_i(p_0)$ situés dans un hyperplan n -dimensionnel. Par un petit déplacement éventuel des points p_1, p_2, \dots, p_{n+2} , on peut parvenir à ce que les hyperplans n -dimensionnels $P_{1, n+1}$ et $P_{2, n+2}$ aient un angle aussi

peu différent de zéro que l'on veut. Plus précisément, on peut choisir p_1, p_2, \dots, p_{n+2} , tout en restant dans le voisinage $U(p_0)$, de sorte que

$$\sin \widehat{P_{1,n+1} P_{2,n+2}} < \frac{p_1 p_{n+2}}{i} .$$

On en tire donc, d'après (2), (3) et (4):

$$\kappa_n^*(p_0) = (n+1) \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sin \widehat{P_{1,n+1} P_{2,n+2}}}{p_1 p_{n+2}} = 0 ,$$

contrairement à notre hypothèse. C'est la contradiction annoncée.

3.4. *Si le continu E situé dans l'espace E_{n+1} possède en tout point p une n -ième courbure linéaire continue $\kappa_n(p) \neq 0$, alors E est un continu localement connexe décomposable en une infinité dénombrable d'arcs¹⁹⁾ rectifiables deux quelconques d'entre eux ayant un nombre fini de points communs.*

La fonction $\kappa_n(p)$ étant continue, $\kappa_n^*(p)$ existe, grâce au théorème 2.3, en tout point p de E ; on a donc partout $\kappa_n^*(p) = \kappa_n(p) \neq 0$. Par conséquent, il correspond, d'après 3.3, à chaque point p un voisinage $U(p)$ tel que tout hyperplan n -dimensionnel ait au plus $n+1$ points communs avec $U(p)$. La somme de tous les voisinages $U(p)$ est le continu E ; mais d'après un théorème connu de MM. Borel et Lebesgue²⁰⁾, on peut extraire de cette infinité de voisinages un nombre fini, par exemple les voisinages $U(p_1), U(p_2), \dots, U(p_k)$, de sorte que E soit contenu dans la somme $U(p_1) + U(p_2) + \dots + U(p_k)$. Alors, chaque hyperplan n -dimensionnel ayant au plus $n+1$ points communs avec $U(p_i)$, le continu E n'a donc pas plus de $k(n+1)$ points communs avec un hyperplan n -dimensionnel quelconque. Notre théorème est par suite une conséquence immédiate d'un théorème²¹⁾ concernant les sous-continus de E_{n+1} ayant au plus un nombre fini de points communs avec un hyperplan n -dimensionnel arbitraire de E_{n+1} .

3.5. *Si le continu E situé dans l'espace E_3 possède en tout point p une deuxième courbure linéaire continue $\kappa_2(p) \neq 0$, alors E est un arc rectifiable ou une image homéomorphe de la circonférence.*

On voit d'abord que $\kappa_2^*(p) = \kappa_2(p) \neq 0$; il correspond donc, d'après 3.3, à tout point p de E un voisinage $U(p)$ n'ayant pas plus de 3 points communs avec un plan quelconque. Mais E est, d'après 3.4, un continu

¹⁹⁾ Nous appelons tout image homéomorphe du segment un arc.

²⁰⁾ Voir p. ex. *Menger*, 11.

²¹⁾ *Marchaud*, 9.

localement connexe; $U(p)$ contient par suite un voisinage connexe $U^*(p)$ dont la fermeture²²⁾ $\overline{U^*(p)}$ est aussi contenue dans $U(p)$. Un plan quelconque a donc au plus 3 points communs avec le continu $\overline{U^*(p)}$. Il en résulte, en vertu d'un théorème de M. Marchaud²³⁾, que $\overline{U^*(p)}$ est un arc rectifiable. Tout point de E est donc contenu dans un voisinage qui est un arc, E est donc lui-même un arc ou une image homéomorphe de la circonférence²⁴⁾. De plus, E étant contenu, d'après le théorème de MM. Borel et Lebesgue, dans un nombre fini de $\overline{U^*(p)}$, E est rectifiable et notre proposition est entièrement démontrée.

3.6. Il est remarquable que, si $n = 1$, on n'a pas besoin de se restreindre au cas $\kappa_1(p) \neq 0$, puisqu'il est connu que, si E est un continu euclidien ayant partout une première courbure linéaire $\kappa_1(p)$, E est un arc²⁵⁾. Mais, si $n \geq 2$, la restriction $\kappa_n(p) \neq 0$ est essentielle; car un continu ayant partout une courbure linéaire $\kappa_n(p) = 0$ n'est pas toujours la somme d'une infinité dénombrable d'arcs; au contraire, il peut arriver qu'un tel continu contienne même un simplexe n -dimensionnel. La raison en est claire après avoir considéré le théorème suivant:

E étant un continu euclidien quelconque et p_0 un point de E tel que p_0 ait un voisinage $U(p_0)$ situé dans l'espace E_n , mais qu'aucun voisinage de p_0 ne soit contenu dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel de E_n , la n -ième courbure linéaire $\kappa_n(p_0)$ existe et est égale à zéro.

Aucun voisinage de p_0 n'étant situé dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel, il existe dans tout voisinage de p_0 un système de $n + 2$ points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} de sorte que, ni p_0, p_1, \dots, p_n , ni p_1, p_2, \dots, p_{n+1} , ne soient situés dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel. Les simplexes n -dimensionnels déterminés par ces deux systèmes de $n + 2$ points ont donc des volumes positifs $V(p_0, p_1, \dots, p_n)$ et $V(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$. Le dénominateur de la fraction figurant dans la définition (3) de $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ est donc différent de zéro. Quant au numérateur, il est évidemment zéro, si l'on prend p_0, p_1, \dots, p_{n+1} dans le voisinage $U(p_0)$ de p_0 , parce que $U(p_0)$ est situé dans l'espace E_{n+1} . On a donc $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = 0$ pour tout système de $n + 2$ points suffisamment voisins de p_0 pour lesquels $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ existe. Il en résulte, d'après (2), $\kappa_n(p_0) = 0$; c. q. f. d.

²²⁾ On appelle fermeture d'un ensemble A la somme de A et de l'ensemble de ses points d'accumulation.

²³⁾ *Marchaud*, 9.

²⁴⁾ *Menger*, 11.

²⁵⁾ *Pauc*, 14.

§ 4. Les courbures linéaires des arcs euclidiens dérivables

4.1. Soit dans ce paragraphe E un arc rectifiable, situé dans l'espace E_k et représentons les coordonnées des points de E par les fonctions continues

$$x_1 = x_1(s), \quad x_2 = x_2(s), \quad \dots, \quad x_k = x_k(s)$$

où le paramètre s désigne la longueur de l'arc E . Admettons encore que les fonctions $x_\nu(s)$ sont n -fois dérivables au point $s = s_0$ et posons pour abrégé

$$x_\nu^{(i)} = \left(\frac{d^i x_\nu}{ds^i} \right)_{s=s_0}, \quad X_{ij} = \sum_{\nu=1}^k x_\nu^{(i)} x_\nu^{(j)},$$

$$G_n = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{vmatrix}.$$

Désignons par p_i le point de E dont les coordonnées sont

$$x_1 = x_1(s_i), \quad x_2 = x_2(s_i), \quad \dots, \quad x_k = x_k(s_i)$$

et supposons que p_0 soit un point régulier de E . Nous entendons par là que $G_n \neq 0$ pour $s = s_0$. Il est connu que le carré du volume $V(p_0, p_1, \dots, p_n)$ du simplexe n -dimensionnel ayant p_0, p_1, \dots, p_n pour sommets est égal, dans l'espace E_k , à la somme des carrés des volumes de ses projections orthogonales sur les $\binom{k}{n}$ hyperplans n -dimensionnels déterminés par les axes des coordonnées. Par conséquent

$$\left\{ \frac{V(p_0, p_1, \dots, p_n)}{\prod_{(i,j)} p_i p_j} \right\}^2 = \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{\sum_{(\nu)} \left| \begin{array}{cccc} x_{\nu_1}(s_0) & x_{\nu_2}(s_0) & \dots & x_{\nu_n}(s_0) & 1 \\ x_{\nu_1}(s_1) & x_{\nu_2}(s_1) & \dots & x_{\nu_n}(s_1) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\nu_1}(s_n) & x_{\nu_2}(s_n) & \dots & x_{\nu_n}(s_n) & 1 \end{array} \right|^2}{\left| \begin{array}{cccc} s_0^n & s_0^{n-1} & \dots & s_0 & 1 \\ s_1^n & s_1^{n-1} & \dots & s_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n^n & s_n^{n-1} & \dots & s_n & 1 \end{array} \right|^2} \cdot \prod_{(i,j)} \frac{(s_i - s_j)^2}{p_i p_j^2} \quad (10)$$

où nous avons désigné par $\overline{p_i p_j}$ la distance euclidienne des sommets p_i, p_j de ce simplexe.

4.2. Si les $(n+1)$ -ièmes dérivées des fonctions $x_i(s)$ existent au point $s = s_0$ et p_0 est un point régulier de E , alors E possède en p_0 une n -ième courbure linéaire.

L'existence de la n -ième dérivée des fonctions $x_i(s)$ au point $s = s_0$ entraîne, grâce à un théorème de Schwarz-Stieltjes²⁶), la relation suivante :

$$1! 2! \dots n! \lim_{s_i \rightarrow s_0} \frac{\begin{vmatrix} x_{\nu_1}(s_0) & x_{\nu_2}(s_0) & \dots & x_{\nu_n}(s_0) & 1 \\ x_{\nu_1}(s_1) & x_{\nu_2}(s_1) & \dots & x_{\nu_n}(s_1) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\nu_1}(s_n) & x_{\nu_2}(s_n) & \dots & x_{\nu_n}(s_n) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0^n & s_0^{n-1} & \dots & s_0 & 1 \\ s_1^n & s_1^{n-1} & \dots & s_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n^n & s_n^{n-1} & \dots & s_n & 1 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} x'_{\nu_1}(s_0) & x'_{\nu_2}(s_0) & \dots & x'_{\nu_n}(s_0) \\ x''_{\nu_1}(s_0) & x''_{\nu_2}(s_0) & \dots & x''_{\nu_n}(s_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(n)}_{\nu_1}(s_0) & x^{(n)}_{\nu_2}(s_0) & \dots & x^{(n)}_{\nu_n}(s_0) \end{vmatrix}.$$

La rectifiabilité de l'arc E entraîne

$$\lim_{s_i, s_j \rightarrow s_0} \prod_{(i,j)} \frac{|s_i - s_j|}{p_i p_j} = 1.$$

On obtient donc, d'après (10), la relation suivante :

$$[1! 2! \dots (n-1)! (n!)^2] \lim_{p_i \rightarrow p_0} \left\{ \frac{V(p_0, p_1, \dots, p_n)}{\prod_{(i,j)} p_i p_j} \right\}^2 = \sum_{(\nu)} \begin{vmatrix} x'_{\nu_1}(s_0) & x'_{\nu_2}(s_0) & \dots & x'_{\nu_n}(s_0) \\ x''_{\nu_1}(s_0) & x''_{\nu_2}(s_0) & \dots & x''_{\nu_n}(s_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(n)}_{\nu_1}(s_0) & x^{(n)}_{\nu_2}(s_0) & \dots & x^{(n)}_{\nu_n}(s_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{vmatrix} = G_n. \quad (11)$$

Introduisons pour un moment l'abréviation $\prod_{\alpha, \beta} = \prod_{\alpha \leq i < j \leq \beta} \overline{p_i p_j}$; alors on peut écrire en vertu de la relation (3) :

²⁶) *Stieltjes*, 16. La démonstration de notre théorème ne fait usage du passage à la limite que dans cette relation de *Schwarz-Stieltjes*. Mais cette relation est indépendante (*Stieltjes*, 16) du sens de parcours des points $(x_1(s_i), x_2(s_i), \dots, x_k(s_i))$. Il n'est donc pas nécessaire de supposer que l'ordre de ces points soit établi par le rangement croissant ou décroissant des valeurs s_0, s_1, \dots, s_{n+1} ; ce que justifie notre remarque antérieure, faite dans la note ⁶), d'après laquelle l'existence de la limite (2) pour *tout* sens de parcours des points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} n'est pas une condition restrictive, lorsqu'on se borne aux arcs considérés dans la géométrie infinitésimale.

$$\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = \frac{(n+1)^2}{n} \cdot \frac{\frac{V(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})}{\Pi_{0, n+1}} \cdot \frac{V(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\Pi_{1, n}}}{\frac{V(p_0, p_1, \dots, p_n)}{\Pi_{0, n}} \cdot \frac{V(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})}{\Pi_{1, n+1}}}.$$

Il en résulte d'après les relations (2) et (11):

$$\kappa_n(p_0) = \frac{\sqrt{G_{n+1} \cdot G_{n-1}}}{G_n}.$$

Le point p_0 étant régulier, cette relation prouve l'existence de $\kappa_n(p_0)$; ce qui était justement notre proposition.

4.3. Il est remarquable que M. Blaschke²⁷⁾, ayant défini la n -ième courbure d'un arc d'une manière tout à fait formelle comme les coefficients des équations généralisées de Frenet, a obtenu la valeur $\sqrt{G_{n+1} \cdot G_{n-1}}/G_n$. La n -ième courbure linéaire $\kappa_n(p_0)$ définie par une voie purement géométrique coïncide donc dans le cas spécial des courbes euclidiennes dérivables avec les courbures formelles de M. Blaschke. La notion de n -ième courbure linéaire permet alors de généraliser les équations de Frenet. Désignons, à cet effet, par v_i le vecteur unitaire du i -ième axe du repère mobile et posons $1/\varrho_i = \kappa_i(p_0)$; alors

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{ds} &= \frac{v_2}{\varrho_1} \\ \frac{dv_2}{ds} &= -\frac{v_1}{\varrho_1} + \frac{v_3}{\varrho_2} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dv_i}{ds} &= -\frac{v_{i-1}}{\varrho_{i-1}} + \frac{v_{i+1}}{\varrho_i} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dv_n}{ds} &= -\frac{v_{n-1}}{\varrho_{n-1}} \end{aligned}$$

4.4. Si les $(n+1)$ -ièmes dérivées des fonctions $x_i(s)$ existent dans un voisinage de $s = s_0$ et si elles sont continues au point $s = s_0$, alors E possède au point régulier p_0 une n -ième courbure de seconde espèce $\kappa_n^*(p_0)$ ²⁸⁾.

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à la démonstration du théorème précédent; il suffit même d'appliquer, au lieu de la relation Schwarz-Stieltjes, la relation originelle de Schwarz²⁹⁾.

²⁷⁾ Blaschke, 5.

²⁸⁾ Egerváry, 6.

²⁹⁾ Schwarz, 15.

4.5. Le théorème 4.2 nous assure que la notion de n -ième courbure linéaire n'est pas moins générale que les différentes notions de n -ième courbure prises au sens classique de la géométrie infinitésimale³⁰). Mais, la n -ième courbure linéaire peut exister même quand aucune méthode infinitésimale n'est applicable. Envisageons par exemple un arc plan $y = f(x)$ tel que $f(x)$ n'ait nulle part une dérivée. La deuxième courbure (torsion) de cet arc ne peut être définie par voie infinitésimale, tandis que les 2-ièmes courbures linéaires $\kappa_2(p)$ et $\kappa_2^*(p)$ sont partout définies, puisqu'on a, d'après 3.6, $\kappa_2(p) = \kappa_2^*(p) = 0$ ³¹). Il faut pourtant remarquer que, si $x_n(p) \neq 0$ en tout point d'un arc euclidien E , il semble que E satisfait à certaines conditions de dérivabilité. Mais, jusqu'à présent, rien n'est connu à cet égard, excepté le cas où $n = 1$. Dans ce cas, on connaît les théorèmes suivants: 1. Si E est un arc plan représenté sous la forme $y = f(x)$ et s'il possède au point $p_0 = f(x_0)$ une première courbure linéaire de seconde espèce, alors $f(x)$ admet au point $x = x_0$ une dérivée seconde³²). 2. Si, au lieu de $\kappa_1^*(p_0)$, on n'exige que l'existence de $\kappa_1(p_0)$, la seconde dérivée de $f(x)$ n'existe pas toujours, mais la fonction $f(x)$ admet une dérivée seconde généralisée³³); c'est à dire la limite suivante:

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{2}{h_1 - h_2} \left[\frac{f(x_0 + h_1) - f(x_0)}{h_1} - \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0)}{h_2} \right].$$

§ 5. Propriétés des arcs à courbure linéaire nulle

5.1. Nous avons vu au numéro 3.6 qu'un continu E situé dans l'espace E_n a partout une courbure linéaire $\kappa_n(p) = 0$, à moins qu'aucun de ses sous-ensembles ouverts relativement à E ne soit situé dans l'espace E_{n-1} . Pour une classe importante de continus euclidiens, on peut démontrer aussi le théorème inverse:

Si E est un arc rectifiable situé dans un espace euclidien quelconque et tel que $\kappa_n(p) = 0$ à tout point p de E , alors E est plongé dans un hyperplan n -dimensionnel de l'espace considéré³⁴).

³⁰) En parlant de n -ième courbure au sens infinitésimal, on peut bien se borner aux cas $n = 1, 2$; car, pour $n \geq 3$, la théorie classique de la n -ième courbure n'a jamais été développée d'une manière satisfaisante. Voir p. ex. *Egerváry*, 6.

³¹) Voir à ce sujet: *Alexits*, 2.

³²) *Haupt* et *Alt*, 7.

³³) *Alt*, 4 et *Pauc*, 13.

³⁴) Première démonstration de ce théorème, pour $n = 1$, chez *Menger*, 10; pour $n = 2$, chez *Alexits*, 1, 2.

Désignons par p, q deux points arbitraires de E et par \overline{pq} leur distance euclidienne. Intercalons entre p et q les points $p = p_0, p_1, \dots, p_{k+n+1} = q$ de l'arc E . Posons pour abrégé

$$v_k(p, q) = \text{Max} \{ \overline{p_0 p_1}, \overline{p_1 p_2}, \dots, \overline{p_{k+n} p_{k+n+1}} \}$$

et choisissons les points p_1, p_2, \dots, p_{k+n} de sorte que $v_k(p, q)$ tende avec $1/k$ vers zéro; c'est-à-dire que, $\varepsilon > 0$ étant un nombre aussi petit que l'on veut, il existe un $k_\varepsilon > 0$ tel que

$$v_k(p, q) < \frac{\varepsilon}{n} \quad (k \geq k_\varepsilon) .$$

On déduit de cette relation que la distance des points p_i, p_j ($i = 0, 1, \dots, k$; $j = i + 1, i + 2, \dots, i + n + 1$) peut s'évaluer par l'inégalité

$$\overline{p_i p_j} \leq \sum_{\alpha=i}^{j-1} \overline{p_\alpha p_{\alpha+1}} \leq n \cdot v_k(p, q) < \varepsilon \quad (k \geq k_\varepsilon) . \quad (12)$$

Nous avons supposé que E possède en tout point une n -ième courbure linéaire. Il en résulte d'après 3.1 qu'aucun des sous-ensembles relativement ouverts de E n'est plongé dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel. Par conséquent, on peut choisir les points p_1, p_2, \dots, p_{k+n} de sorte que, pour tout $i = 0, 1, \dots, k$, les $n + 1$ points $p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+n}$ ne soient pas situés dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel. Alors le dénominateur de la fraction qui figure dans la relation (3) ne s'évanouit pas; c'est-à-dire que l'expression $\kappa(p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+n+1})$ peut être définie pour tout $i = 0, 1, \dots, k$. D'après l'inégalité (12), les distances entre le point p_i et les points $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{i+n+1}$ deviennent aussi petites que l'on veut, pourvu que k soit suffisamment grand. Les conditions du lemme dont nous avons fait usage en 2.3 se trouvent donc satisfaites. Il en résulte pour un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit

$$\kappa(p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+n+1}) < \varepsilon \quad (i = 0, 1, \dots, k) ,$$

pourvu que k soit suffisamment grand. Désignons par P_i l'hyperplan n -dimensionnel passant par les points $p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+n}$, alors cette inégalité peut s'écrire aussi, en vertu de la relation (4), sous la forme suivante:

$$(n + 1) \frac{\sin \widehat{P_i P_{i+1}}}{p_i p_{i+n+1}} < \varepsilon \quad (i = 0, 1, \dots, k) , \quad (13)$$

pourvu que k soit suffisamment grand.

Grâce à une remarque orale de M. Hajós, l'angle $\widehat{P_0 P_{k+1}}$ peut être évalué par l'inégalité suivante:

$$\widehat{P_0 P_{k+1}} \leq \sum_{i=0}^k \widehat{P_i P_{i+1}} . \quad (14)$$

Or $\widehat{P_i P_{i+1}} \leq \frac{\pi}{2}$; il s'ensuit donc d'après l'inégalité (13) que

$$\widehat{P_i P_{i+1}} \leq \frac{\pi}{2} \sin \widehat{P_i P_{i+1}} < \frac{\varepsilon \pi}{2(n+1)} \cdot \overline{p_i p_{i+n+1}} \leq \frac{\varepsilon \pi}{2(n+1)} \sum_{j=i}^{i+n} \overline{p_j p_{j+1}} . \quad (15)$$

Nous avons supposé que E est un arc rectifiable; c'est-à-dire que sa longueur λ est finie. On obtient donc d'après (14) et (15):

$$\widehat{P_0 P_{k+1}} < \frac{\varepsilon \pi}{2(n+1)} \sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^{i+n} \overline{p_j p_{j+1}} < \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^k \overline{p_i p_{i+1}} \leq \varepsilon \cdot \frac{\lambda \pi}{2} .$$

Par conséquent:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{P_0 P_{k+1}} = 0 . \quad (16)$$

Les hyperplans P_0 et P_{k+1} , passant par les points $p = p_0, p_1, \dots, p_n$, et $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_{k+n+1} = q$, tendent, en vertu de la relation (12) et du théorème 3.2, vers les hyperplans n -dimensionnels osculateurs P_p , et P_q , de E appartenant aux points p ou q . Mais p et q sont des points arbitrairement choisis sur E ; il s'ensuit donc de (16) que l'angle de deux hyperplans n -dimensionnels osculateurs arbitraires de E est égal à zéro. Par suite, l'arc E est contenu dans chacun de ses hyperplans n -dimensionnels osculateurs; ce qui était exactement notre proposition.

5.2. Un cas spécial du théorème précédent équivaut à un résultat classique d'après lequel un arc E représenté par les fonctions $x_1(s)$, $x_2(s)$, $x_3(s)$ est un segment, si la première courbure classique de E est partout $= 0$, ou est situé dans un plan, si sa torsion s'évanouit partout.

5.3. Nous avons fait l'hypothèse que E est un arc rectifiable. Il semble pourtant que cette hypothèse n'est pas nécessaire et qu'elle n'est imposée que par une faiblesse de notre méthode de démonstration. En effet, pour $n = 1$, nous pouvons énoncer ce théorème plus général:

E étant un continu situé dans un espace euclidien quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour que E soit un segment est $\kappa_1(p) = 0$.

La nécessité de cette condition a été déjà démontrée au numéro 3.6. Quant à sa suffisance, si $\kappa_1(p) = 0$, le continu est un arc rectifiable³⁵). Toutes les conditions du théorème 5.1 sont donc satisfaites.

5.4. Bien qu'il semble que la propriété de E d'être un arc rectifiable est superflue, il est essentiel que E soit un arc euclidien. Pour s'en convaincre, il suffit de construire un arc non-euclidien jouissant des propriétés suivantes³⁶):

1° E est un arc rectifiable ; 2° $\kappa_n(p) = 0$ en tout point p de E ; 3° E n'est isométrique avec aucun sous-ensemble de l'espace E_n .

Envisageons, en effet, un arc rectifiable euclidien C ayant partout une n -ième courbure linéaire $\kappa_n(p) = 0$. Choisissons C de sorte qu'il contienne $n + 2$ points q_0, q_1, \dots, q_{n+1} pour lesquels $\overline{q_i q_j} \geq 1$, ($i, j = 0, 1, \dots, n + 1$). Définissons maintenant l'espace E de la manière suivante: Les points de E sont les mêmes que les points de C , mais la distance $p q$ des points p et q de E est définie par la relation

$$p q = \begin{cases} \overline{p q} , & \text{si } \overline{p q} \leq 1 , \\ 1 , & \text{si } \overline{p q} > 1 . \end{cases} \quad (17)$$

E est évidemment un continu homéomorphe avec C ; par conséquent E est un arc. De plus, tout voisinage $U(p)$ d'un point p de E dont le diamètre ne surpasse pas l'unité est isométrique avec un voisinage de C . Tout voisinage $U(p)$ contient donc un voisinage fermé $\overline{U^*}(p)$ de p qui est un arc rectifiable. Or E est contenu, grâce à un théorème de MM. Borel et Lebesgue³⁷), dans la somme d'un nombre fini de voisinages $\overline{U^*}(p)$. Par conséquent, E est lui-même un arc rectifiable. La propriété 1° de E est donc démontrée. Choisissons maintenant les points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} dans le voisinage $\overline{U^*}(p_0)$ du point arbitraire p_0 . Comme $\overline{U^*}(p_0)$ est isométrique avec un voisinage de C , c'est-à-dire que $p_i p_j = \overline{p_i p_j}$, la courbure linéaire $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ de ces points a la même valeur qu'elle aurait prise si nous avions mesuré les $\binom{n+2}{2}$ distances $p_i p_j$ sur l'arc C . Par conséquent, la valeur de $\kappa_n(p_0)$ est égale à la valeur de la n -ième courbure linéaire au point p_0 de C . Celle-ci étant partout $= 0$, il s'ensuit que $\kappa_n(p_0) = 0$ en

³⁵) Menger, 10 et Pauc, 14.

³⁶) Chez Menger, 10, on trouve l'exemple d'un arc non-droit ayant pourtant une première courbure linéaire évanouissante partout. La construction que nous employons dans ce mémoire est due, pour $n = 2$, à Alexits, 1, 2.

³⁷) Voir p. ex. Menger, 11.

tout point p_0 de E . La propriété 2° de E est aussi démontrée. Pourtant, E n'est isométrique avec aucun sous-ensemble de E_n , puisque C contient, d'après l'hypothèse, $n+2$ points q_0, q_1, \dots, q_{n+1} tels que $\overline{q_i q_j} \geq 1$, ($i, j = 0, 1, \dots, n+1$). Il en résulte, grâce à notre définition (17) de la distance en E , que $q_i q_j = 1$, ($i, j = 0, 1, \dots, n+1$). Or, dans l'espace euclidien n -dimensionnel E_n , il n'y a pas $n+2$ points différents dont les $\binom{n+2}{2}$ distances mutuelles soient toutes égales. La propriété 3° de E est donc aussi démontrée; ce qui était justement notre but.

B I B L I O G R A P H I E

1. *G. Alexits*, La torsion des espaces distanciés. *Comp. Math.* 6 (1939), p. 471—477.
2. *G. Alexits*, Der Torsionsbegriff in metrischen Räumen. *Mat. Fiz. Lapok* 46 (1939), p. 13—28 (en hongrois), p. 29—30 (en allemand).
3. *F. Alt*, Zur Theorie der Krümmung. *Ergebn. Math. Koll. Wien* 3 (1932), p. 5—6.
4. *F. Alt*, Zur Theorie der Krümmung. *Ergebn. Math. Koll. Wien* 4 (1933), p. 4.
5. *W. Blaschke*, Frenets Formeln für den Raum von Riemann. *Math. Zeitschr.* 6 (1920), p. 94—99.
6. *E. Egerváry*, Über die Kurven des n -dimensionalen euklidischen Raumes. *Math. Term. Tud. Ertesitő* 59 (1940), p. 787—795 (en hongrois), p. 796—797 (en allemand).
7. *O. Haupt* und *F. Alt*, Zum Krümmungsbegriff. *Ergebn. Math. Koll. Wien* 3 (1932), p. 4—5.
8. *H. Kühne*, Beiträge zur Lehre von der n -fachen Mannigfaltigkeit. *Arch. Math. Phys.* 11 (1892), p. 353—407.
9. *A. Marchaud*, Sur les continus d'ordre borné. *Acta Math.* 55 (1930), p. 67—115.
10. *K. Menger*, Untersuchungen über allgemeine Metrik. *Math. Ann.* 103 (1930), p. 466—501.
11. *K. Menger*, *Kurventheorie* (Leipzig und Berlin, 1932).
12. *L. W. Fr. Meyer*, Über die Anwendung eines Sylvesterschen Determinantensatzes auf ein metrisches Problem des R_n . *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.* 20 (1911), p. 211—216.
13. *Chr. Pauc*, De quelques propriétés locales des continus euclidiens. *C. R. Paris* 203 (1936), p. 29—32.
14. *Chr. Pauc*, Courbure dans les espaces métriques. *Rend. R. Acc. Naz. Lincei* (6) 24 (1936), p. 109—115.
15. *H. A. Schwarz*, Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes. *Ges. math. Abhandlungen*. Vol. 2, p. 296—302.
16. *Stieltjes*, Sur une généralisation de la formule des accroissements finis. *Oeuvres complètes*. Vol. 2, p. 105—123.

(Reçu le 14 février 1940.)

Über die topologische Struktur der Lieschen Gruppen

Von L. PONTRJAGIN, Moskau

Die Poincaréschen Polynome der kompakten Lieschen Gruppen haben die Gestalt

$$(1 + t^{\alpha_1}) \cdot (1 + t^{\alpha_2}) \cdot \dots \cdot (1 + t^{\alpha_n}),$$

also dieselbe Gestalt wie die Poincaréschen Polynome der topologischen Produkte der Sphären der Dimensionen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ¹⁾; unter den einfachen Gruppen aus den vier großen Klassen in der Killing-Cartanschen Aufzählung haben die Gruppen A_n und C_n überdies, wie ich gezeigt habe, keine Torsion²⁾, und ihre Fundamentalgruppen sind, wie man leicht sieht, trivial (d. h. von der Ordnung 1); für diese Gruppen erhebt sich daher die Frage, ob sie mit den entsprechenden Sphärenprodukten homöomorph seien³⁾.

Im folgenden wird gezeigt, daß diese Frage im allgemeinen zu verneinen ist; es wird nämlich bewiesen:

Die Gruppe A_n , $n \geq 2$, deren Poincarésches Polynom

$$(1 + t^3) \cdot (1 + t^5) \cdot \dots \cdot (1 + t^{2n+1})$$

lautet¹⁾, ist nicht mit einem Produkt $S^3 \times M$ homöomorph, worin S^3 die 3-dimensionale Sphäre, M irgend ein topologischer Raum ist.

Der Beweis beruht darauf, daß die 4-dimensionale Homotopiegruppe⁴⁾ der Mannigfaltigkeit A_n , $n \geq 2$, trivial (d. h. von der Ordnung 1), die 4-dimensionale Homotopiegruppe eines Produktes $S^3 \times M$ aber nicht

¹⁾ Für die Gruppen A_n, B_n, C_n, D_n der vier großen Klassen einfacher Gruppen mit Bestimmung der Exponenten α_i zuerst von mir, C. R. Acad. Sc. U. R. S. S. 1 (1935), 433—437, und C. R. Paris 200 (1935), 1277—1280, bewiesen; eine ausführliche Darstellung mit Bestimmung der Torsionsgruppen habe ich im Recueil math. de Moscou 6 (1939), 389—422, gegeben. Weitere Beweise: R. Brauer, C. R. Paris 201 (1935), 419—421; C. Ehresmann, C. R. Paris 208 (1939), 321—323 und 1263—1265; ferner — als Spezialfall eines allgemeineren Satzes, aber ohne Bestimmung der α_i —: H. Hopf, Annals of Math. 42 (1941), 22—52.

²⁾ Recueil math., wie ¹⁾; sowie Ehresmann, l. c.

³⁾ Auf diese Frage hat E. Cartan am Schluß seines Genfer Vortrages „La Topologie des Groupes de Lie“ hingewiesen (L'Enseignement math. 85 [1936], 177—200; sowie: Actualités Scient. et Industr. 358 [Paris 1936]; sowie: Selecta, Jubilé Scientifique [Paris 1939], 253—258).

⁴⁾ W. Hurewicz, Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935), 112—119, 521—528.

trivial ist. Übrigens spielt der Begriff der Homotopiegruppe selbst in dem Beweis eigentlich keine Rolle; es wird einfach gezeigt, daß jede Abbildung der 4-dimensionalen Sphäre Σ^4 in die Mannigfaltigkeit A_n , $n \geq 2$, homotop 0 in A_n ist, während es eine Abbildung von Σ^4 in $S^3 \times M$ gibt, die nicht homotop 0 in $S^3 \times M$ ist.

§ 1. Die Gruppe A_n ist definiert als die Gruppe aller unitären unimodularen Matrizen der Ordnung $n + 1$,

$$a = (a_{jk}) \quad , \quad j, k = 0, 1, \dots, n .$$

Durch die Bedingung $a_{00} = 1$ greifen wir aus A_n eine Untergruppe A'_{n-1} heraus, und durch die Bedingung $a_{00} = -1$ eine Restklasse (Nebengruppe) A''_{n-1} der Gruppe A_n nach der Untergruppe A'_{n-1} . Die Dimension einer Gruppe A_r ist $(r + 1)^2 - 1$, und daher gilt für die Dimensionsdifferenzen:

$$\text{Dim. } A_n - \text{Dim. } A'_{n-1} = \text{Dim. } A_n - \text{Dim. } A''_{n-1} = 2n + 1 . \quad (1)$$

Wie ich gezeigt habe¹⁾, kann jede Menge $F \subset A_n - A'_{n-1}$ durch eine stetige Deformation innerhalb von $A_n - A'_{n-1}$ in eine Teilmenge von A''_{n-1} übergeführt werden; und das Analoge gilt für die Mengen $F \subset A_n - A''_{n-1}$.

f sei eine stetige Abbildung der 4-dimensionalen Sphäre Σ^4 in die Mannigfaltigkeit A_n . Wenn $n \geq 2$ ist, so kann man, infolge von (1), durch eine kleine Deformation von f zu einer solchen Abbildung f' übergehen, daß $f'(\Sigma^4) \subset A_n - A''_{n-1}$ ist; nach dem zitierten Deformationssatz kann man f' weiter stetig in eine Abbildung f'' überführen, welche die Bedingung erfüllt: $f''(\Sigma^4) \subset A'_{n-1}$.

Durch wiederholte Anwendung dieser Operation erhalten wir eine Abbildung g von Σ^4 mit $g(\Sigma^4) \subset A_2$, und indem wir dieselbe Operation noch einmal wiederholen, eine Abbildung g' , die homotop zu f und so beschaffen ist, daß $g'(\Sigma^4) \subset A'_1$ ist. Unser Ziel — zu zeigen, daß f homotop 0 in A_n ist — ist daher erreicht, sobald bewiesen ist: jede Abbildung von Σ^4 in A'_1 ist homotop 0 in A_2 .

Bekanntlich ist A'_1 mit der 3-dimensionalen Sphäre S^3 homöomorph; nun weiß man aber, daß es nur zwei Abbildungsklassen von Σ^4 in S^3 gibt⁵⁾; folglich genügt es, folgendes zu beweisen: *Es gibt eine wesentliche Abbildung von Σ^4 auf A'_1 , die homotop 0 in A_2 ist.* Dieser Beweis wird im § 2 mit Hilfe algebraischer Rechnungen geführt werden.

Betrachten wir jetzt andererseits ein topologisches Produkt $S^3 \times M$; seine Punkte $z = x \times y$ entsprechen den Punktpaaren $x \in S^3$, $y \in M$;

wir setzen $\varphi(z) = x$. Wir behaupten: ist f eine wesentliche Abbildung von Σ^4 auf S^3 , so ist die Abbildung g von Σ^4 in $S^3 \times M$, welche durch $g(u) = f(u) \times b$ erklärt ist, wobei b ein fester Punkt von M ist, nicht homotop 0 in $S^3 \times M$; in der Tat: wenn eine stetige Deformation g_t der Abbildung $g_0 = g$ existiert, die $g(\Sigma^4)$ in einen Punkt von $S^3 \times M$ zusammenzieht, so ist $\varphi g_t = f_t$ eine Deformation der Abbildung f , welche $f(\Sigma^4)$ in einen Punkt von S^3 zusammenzieht.

Nun ist bekannt⁵⁾, daß es eine wesentliche Abbildung f von Σ^4 auf S^3 gibt; nach dem eben Gesagten gibt es daher auch eine Abbildung g von Σ^4 in $S^3 \times M$, welche nicht homotop 0 in $S^3 \times M$ ist.

§ 2. Die Eigenschaften von A_2 , die ich brauche, führe ich für A_n an, da diese allgemeineren Eigenschaften nicht komplizierter sind und für weitere Zwecke Verwendung finden können.

R^n sei ein komplexer unitärer Raum der komplexen Dimension n . Ein Vektor $\gamma \in R^n$ sei durch seine Komponenten als einzeilige Matrix $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ gegeben. Ist d eine beliebige Matrix, so bezeichnen wir durch d^* die dazu konjugiert-komplexe und transponierte Matrix. Es ist also γ^* eine Matrix aus einer Kolonne; weiter ist $\gamma\gamma^*$ eine Matrix der Ordnung 1, deren Zahlwert gleich dem Quadrat der Länge von γ ist; $\gamma^*\gamma$ ist eine quadratische Matrix der Ordnung n :

$$\gamma^*\gamma = (\bar{\gamma}_j \cdot \gamma_k) .$$

Wir fügen zu R^n noch eine reelle Achse mit der Koordinate α hinzu und bezeichnen den so entstandenen Raum mit R_n ; ein Punkt von R_n ist durch eine Matrix $x = (\alpha, \gamma)$ gegeben. Durch

$$\alpha^2 + \gamma\gamma^* = 1 \tag{2}$$

wird im R_n eine $2n$ -dimensionale Sphäre Σ^{2n} bestimmt. Wenn $x = (\alpha, \gamma)$ auf Σ^{2n} liegt, so ist $\gamma\gamma^* = 1 - \alpha^2$; für $\gamma \neq 0$, also $\alpha \neq \pm 1$, bezeichnen wir durch δ den Einheitsvektor in der Richtung von γ , also $\delta = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot \gamma$; er wird ebenso wie γ durch eine einzeilige Matrix der Länge n beschrieben.

Mit ε werde die Einheitsmatrix der Ordnung $n + 1$ bezeichnet: $\varepsilon = (\delta_{jk})$, $j, k = 0, 1, \dots, n$; mit ε' die Einheitsmatrix der Ordnung n : $\varepsilon' = (\delta_{jk})$, $j, k = 1, \dots, n$.

Es sei nun $x = (\alpha, \gamma) \in \Sigma^{2n}$; wir betrachten die Matrix der Ordnung $n + 1$

⁵⁾ L. Pontrjagin, C. R. Congrès intern. des math., Oslo 1936, t. II, 140; sowie: C. R. Acad. Sc. U.R.S.S. 19 (1938), 147—149. — H. Freudenthal, Compositio Math. 5 (1937), 299—314.

$$u = \begin{pmatrix} \alpha i & \gamma \\ -\gamma^* & -\alpha i \varepsilon' \end{pmatrix};$$

in ihr ist γ ein Block aus einer Zeile, $-\gamma^*$ ein Block aus einer Kolonne, $-\alpha i \varepsilon'$ ein quadratischer Block der Ordnung n , αi eine Zahl; u ist also quadratisch von der Ordnung $n + 1$; es gilt

$$u + u^* = 0. \quad (3)$$

Ist t eine reelle Zahl, so ist

$$b(x, t) = e^{tu} \quad (4)$$

eine quadratische Matrix der Ordnung $n + 1$, für die aus (3) folgt, daß sie unitär ist; durch Rechnung findet man:

$$b(x, t) = \begin{pmatrix} \cos t + \alpha i \cdot \sin t & \sin t \cdot \gamma \\ -\sin t \cdot \gamma^* & e^{-i\alpha t} \cdot \varepsilon' + (\cos t - \alpha i \cdot \sin t - e^{-i\alpha t}) \cdot \delta^* \delta \end{pmatrix}; \quad (5)$$

hierbei ist $\gamma \neq 0$, $\alpha \neq \pm 1$ vorausgesetzt, da sonst δ nicht erklärt ist; die Formel (5) bleibt aber auch für $\gamma = 0$, $\alpha = \pm 1$ gültig, wenn man unter δ einen beliebigen Vektor versteht. Daß $b(x, t) = e^{tu}$ ist, ist nicht wichtig; es kommt nur auf einige Eigenschaften dieser Matrix an, die sich aus (4) oder aus (5) durch direkte Rechnung ergeben: nämlich, daß sie unitär und daß ihre Determinante

$$\text{Det. } b(x, t) = e^{-(n-1)it\alpha t} \quad (6)$$

ist.

Beweis: s' sei eine quadratische unitäre Matrix der Ordnung n ; wir setzen

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s' \end{pmatrix};$$

dann ist

$$s^{-1} \cdot b(x, t) \cdot s = b(y, t) \quad (7)$$

mit $y = (\alpha, \gamma s')$, wobei $\gamma s'$ das einzeilige Matrixprodukt von γ und s' ist; da s unitär ist, sind $b(x, t)$ und $b(y, t)$ gleichzeitig unitär und haben gleiche Determinanten. Wählen wir nun, zu dem gegebenen Vektor γ , die Matrix s' so, daß

$$\gamma s' = (\beta, 0, \dots, 0), \quad \beta \text{ reell,}$$

wird, dann hat $b(y, t)$ eine besonders einfache Form, für welche man,

unter Berücksichtigung der Beziehung $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, unsere Behauptungen leicht bestätigt.

Wir betrachten noch die Matrix

$$c(\alpha, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{n-1}{n} i \alpha t} \end{pmatrix} \varepsilon'$$

sie ist unitär, ihre Determinante ist $e^{(n-1) i \alpha t}$. Das Produkt

$$a(x, t) = b(x, t) \cdot c(\alpha, t)$$

ist daher eine unitäre unimodulare Matrix: $a(x, t) \in A_n$.

Bei festem t entspricht jedem Punkt x von Σ^{2n} ein Punkt $a(x, t)$ von A_n , d. h. $a(x, t)$ vermittelt eine Abbildung von Σ^{2n} in A_n ; wird t variiert, so entsteht eine Deformation dieser Abbildung. Man sieht unmittelbar, daß

$$a(x, 0) = \varepsilon \quad , \quad a(x, \pi) \in A_{n-1}''$$

ist. $a(x, \pi) = a(x)$ ist also eine stetige Abbildung von Σ^{2n} in A_{n-1}'' , die in A_n homotop 0 ist.

Es bleibt zu zeigen, daß für $n = 2$ die Abbildung $a(x)$ von Σ^4 in die 3-dimensionale Sphäre A_1'' wesentlich ist.

Wir setzen

$$a(x) = (a_{jk}(x)) \quad , \quad j, k = 0, 1, 2 ;$$

dann ist

$$a_{00}(x) = -1 \quad , \quad a_{j0}(x) = a_{0k}(x) = 0 \quad , \quad j, k = 1, 2 ,$$

$$a_{jk}(x) = \left(\cos \frac{\pi}{2} \alpha - i \sin \frac{\pi}{2} \alpha \right) \delta_{jk} - 2 \cos \frac{\pi}{2} \alpha \cdot \bar{\delta}_j \delta_k \quad , \quad j, k = 1, 2 .$$

Führen wir in A_1'' Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 ein, indem wir

$$a_{11}(x) = x_2 - i x_1 \quad , \quad a_{12}(x) = -x_3 - i x_4$$

setzen, so ist die mit einer 3-dimensionalen Sphäre homöomorphe Mannigfaltigkeit A_1'' durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ gegeben, und für unsere Abbildung $a(x)$ ist

$$x_1 = \sin \frac{\pi \alpha}{2}$$

$$x_2 = (1 - 2 \bar{\delta}_1 \delta_1) \cdot \cos \frac{\pi \alpha}{2} \tag{8}$$

$$x_3 + i x_4 = 2 \bar{\delta}_1 \delta_2 \cdot \cos \frac{\pi \alpha}{2} .$$

Auf der Sphäre A''_1 werden durch die Bedingungen $x_1 > 0$, $x_1 < 0$, $x_1 = 0$ eine nördliche Halbkugel, eine südliche Halbkugel und eine Äquatorsphäre S^2 ausgezeichnet; analog auf Σ^4 durch $\alpha > 0$, $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ eine nördliche und eine südliche Halbkugel sowie eine Äquatorsphäre Σ^3 . Aus (8) sieht man: wenn x auf Σ^4 einen Halbmeridian vom Nordpol zum Südpol durchläuft, so durchläuft $a(x)$ auf A''_1 einen Halbmeridian vom Nord- zum Südpol, und wenn x auf Σ^3 ist, so ist $a(x)$ auf S^2 .

In Anbetracht dieser Eigenschaften der Abbildung a und in Anbetracht bekannter allgemeiner Sätze über Sphärenabbildungen⁶⁾ genügt es für den Beweis der Wesentlichkeit der Abbildung a von Σ^4 auf A''_1 , zu zeigen, daß für die durch a gelieferte Abbildung von Σ^3 auf S^2 die Hopfsche Zahl⁷⁾ C ungerade ist.

Nun ist aber diese Abbildung des durch $\alpha = 0$, $\delta_1 \bar{\delta}_1 + \delta_2 \bar{\delta}_2 = 1$, bestimmten Äquators Σ^3 von Σ^4 auf den durch $x_1 = 0$, $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, bestimmten Äquator S^2 von A''_1 nach (8) durch die Formeln

$$x_2 = 1 - 2\bar{\delta}_1 \delta_1, \quad x_3 + ix_4 = 2\bar{\delta}_1 \delta_2 \quad (9)$$

gegeben; von der durch (9) gegebenen Abbildung aber ist es bekannt und leicht zu sehen⁸⁾, daß $C = \pm 1$ ist.

Damit ist bewiesen: Die Abbildung a der Sphäre Σ^4 auf die Mannigfaltigkeit A''_1 ist wesentlich auf A''_1 , aber homotop 0 in A_2 .

§ 3. Im Vorstehenden ist bewiesen worden, daß die Mannigfaltigkeit A_2 nicht mit dem topologischen Produkt $S^3 \times S^5$ homöomorph ist, obwohl die beiden Mannigfaltigkeiten triviale Fundamentalgruppen und isomorphe Homologiegruppen, und sogar isomorphe Schnittringe haben. Der Beweis beruhte darauf, daß die vierte Homotopiegruppe von A_2 trivial ist, während die vierte Homotopiegruppe von $S^3 \times S^5$ nicht trivial (sondern von der Ordnung 2) ist. Es war also nicht nötig, für den Beweis neue topologische Invarianten einzuführen; jedoch wird durch die geometrischen Überlegungen, die zu dem Beweis geführt haben, die Einführung einer neuen topologischen Invariante nahegelegt.

Die Elemente der r -ten Homotopiegruppe $H^r(Q)$ eines zusammenhängenden Polyeders Q sind die Klassen der Abbildungen der Sphäre S^r in das Polyeder Q , wobei nur solche Abbildungen betrachtet werden, welche einen auf S^r fest ausgezeichneten „Pol“ p in einen in Q ausge-

⁶⁾ *Freudenthal*, l. c., Satz III.

⁷⁾ *H. Hopf*, *Math. Annalen* 104 (1931), 637—665.

⁸⁾ *Hopf*, l. c., § 5.

zeichneten „Nullpunkt“ o überführen; die Definition der Addition in $H^r(Q)$ darf wohl als bekannt gelten⁹⁾.

Neben der Gruppe $H^r(Q)$ betrachten wir die Gruppe $H^{r+k}(S^r)$; wir nehmen an, daß der für die Definition von $H^r(Q)$ auf S^r ausgezeichnete Pol mit dem für die Definition von $H^{r+k}(S^r)$ auf S^r ausgezeichneten Nullpunkt zusammenfällt. Ist nun x ein Element von $H^r(Q)$, y ein Element von $H^{r+k}(S^r)$, so gehören diejenigen Abbildungen fg von S^{r+k} in Q , für welche $f \in x$, $g \in y$ ist, einer Klasse von Abbildungen von S^{r+k} in Q an; diese Klasse repräsentiert ein Element xy der Gruppe $H^{r+k}(Q)$.

Die Struktur der hiermit erklärten Multiplikation der Gruppen $H^{r+k}(S^r)$ und $H^r(Q)$, die übrigens das Gesetz $x(y \pm y') = xy \pm xy'$ erfüllt, ist eine Invariante des Polyeders Q , und es liegt kein Grund dafür vor, anzunehmen, daß sie sich auf bekannte Invarianten zurückführen läßt.

(Eingegangen den 4. April 1941.)

⁹⁾ *Hurewicz*, l. c. ⁴⁾; sowie *Freudenthal*, l. c. ⁶⁾, §§ 1, 2.

Konforme Abbildung und eine Verallgemeinerung der Jensenschen Formel

Von A. PFLUGER, Freiburg

1. Ein einfach zusammenhängender Bereich D werde berandet von endlich vielen Jordanbogen J_1, J_2, \dots, J_n . Die konforme Abbildung des Bereiches D auf den Einheitskreis ist also am Rande noch stetig und es werden die Jordanbogen J_1, J_2, \dots, J_n umkehrbar eindeutig und stetig auf Kreisbogen K_1, K_2, \dots, K_n abgebildet, die ihrerseits die Kreisperipherie einfach überdecken. Wir schreiben

$$J_\nu \longleftrightarrow K_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Sei $w = f(z)$ die analytische Funktion, welche die konforme Abbildung des Bereiches D der z -Ebene auf den Einheitskreis $|w| < 1$ der w -Ebene vermittelt. Ihrer (einzigen) Nullstelle a_0 in D entspricht der Mittelpunkt des Bildkreises. Durch Angabe dieser Nullstelle ist demnach die Abbildung — bis auf eine Drehung der w -Ebene — eindeutig festgelegt; also auch die gegenseitige Lage der Kreisbogen K_1, K_2, \dots, K_n . Läßt sich über den Zusammenhang zwischen Nullstelle der Abbildungsfunktion und der gegenseitigen Lage der Bildbogen K_1, K_2, \dots, K_n etwas Bestimmtes aussagen?

Den gemeinsamen Punkt zweier aufeinanderfolgender Jordanbogen nennen wir „Ecken“. E_ν bezeichne die Ecke, in der die Bogen J_ν und $J_{\nu+1}$ zusammenstoßen, $\nu = 1, 2, \dots, n$; $J_{n+1} = J_1$. Entsprechend stoßen dann die Kreisbogen K_ν und $K_{\nu+1}$ im Bildpunkt von E_ν , d. i. G_ν zusammen ($\nu = 1, 2, \dots, n$; $K_{n+1} = K_1$). In der Ecke E_1 greifen wir einen eindeutigen Zweig der Funktion $\arg w = \arg f(z)$ heraus und setzen ihn längs J_1, J_2, \dots, J_n stetig fort. Jeder Ecke E_ν entspricht dann eindeutig die Richtung ω_ν zum Bildpunkt G_ν und K_ν ist der Kreisbogen zwischen den Richtungen ω_ν und $\omega_{\nu+1}$. Wir betrachten folgende mittlere Richtung des Kreisbogens K_ν ,

$$\bar{\omega}_\nu = \frac{\int_{J_\nu} \arg f(z) \cdot \left| \frac{dz}{z} \right|}{\int_{J_\nu} \left| \frac{dz}{z} \right|}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

und präzisieren obige Frage folgendermaßen: *Was läßt sich aussagen über den Zusammenhang zwischen der Lage der Nullstelle der Abbildungsfunktion und den mittlern Richtungen $\bar{\omega}_\nu$ der Kreisbogen K_ν ?*

Diese Fragestellung kann verallgemeinert werden: Es sei die Funktion $f(z)$ im Innern des Bereiches D regulär, auf dem Rande stetig und von null verschieden. Wir fassen speziell die Bilder B_ν der Jordanbogen J_ν ins Auge und betrachten neben einer mittlern Richtung $\bar{\omega}_\nu$ gemäß (1) auch eine mittlere logarithmische Entfernung

$$\bar{R}_\nu = \frac{\int_{J_\nu} \log \left| f(z) \right| \cdot \left| \frac{dz}{z} \right|}{\int_{J_\nu} \left| \frac{dz}{z} \right|}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Gesucht wird eine Beziehung zwischen den mittlern Richtungen und Entfernungen der Bildbogen B_ν und der Nullstellenverteilung von $f(z)$ in D .¹⁾

Wir lösen die Aufgabe für den Kreissektorstumpf. D bezeichne also im folgenden den Bereich $r_1 \leq |z| \leq r_2$, $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$. Er wird begrenzt von den Jordanbogen $J_1(z = \rho e^{i\varphi_2}$, $r_2 \geq \rho \geq r_1$), $J_2(z = r_1 e^{i\theta}$, $\varphi_2 \geq \theta \geq \varphi_1$), $J_3(z = \rho e^{i\varphi_1}$, $r_1 \leq \rho \leq r_2$), $J_4(z = r_2 e^{i\theta}$, $\varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_2$) und besitzt die Ecken $E_1(z = r_2 e^{i\varphi_2})$, $E_2(z = r_1 e^{i\varphi_2})$, $E_3(z = r_1 e^{i\varphi_1})$, $E_4(z = r_2 e^{i\varphi_1})$. Der Reihenfolge E_1, \dots, E_4 entspricht der positive Umlaufssinn des Bereiches. Für die mittleren Richtungen und Entfernungen gilt jetzt

$$\bar{\omega}_{1,3} \cdot \log \frac{r_2}{r_1} = \int_{r_1}^{r_2} \arg f(\rho e^{i\varphi_{2,1}}) \cdot \frac{d\rho}{\rho}, \quad (1')$$

$$\bar{\omega}_{2,4} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(r_{1,2} e^{i\theta}) \cdot d\theta, \quad (1'')$$

$$\bar{R}_{1,3} \cdot \log \frac{r_2}{r_1} = \int_{r_1}^{r_2} \log |f(\rho e^{i\varphi_{2,1}})| \cdot \frac{d\rho}{\rho}, \quad (2')$$

$$\bar{R}_{2,4} \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log |f(r_{1,2} e^{i\theta})| \cdot d\theta. \quad (2'')$$

2. Es sei also die Funktion $f(z)$ im Innern von D regulär, und auf dem Rande noch stetig und von null verschieden. In der Ecke $E_1(z = r_2 e^{i\varphi_2})$ greifen wir einen eindeutigen Zweig der Funktion $\log f(z)$ bzw. $\arg f(z)$ heraus und setzen ihn längs J_1, \dots, J_4 stetig fort. Dies soll die Bedeutung

¹⁾ Allgemein gefaßt, handelt es sich um den Zusammenhang zwischen dem Verhalten einer Funktion auf dem Rande und der Lage ihrer Nullstellen im Innern eines Bereiches. Im Fall des Kreises macht die Jensen'sche Formel hierüber eine bestimmte Aussage:

$$2\pi \log \left| \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n}{r^n} \right| - \log |f(0)| = \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

von $\log f(z)$ bzw. $\arg f(z)$ auf dem Rande von D sein. Es ist klar, daß Anfangs- und Schlußwert dieser Funktion in E_1 verschieden sind, wenn der Bereich Nullstellen enthält. Er enthält aber nur endlich viele Nullstellen und deshalb sind die Bogen $z = \rho e^{i\theta}$, $\varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_2$ — bis auf endlich viele — von Nullstellen frei. Wir greifen ein solches ρ ($r_1 \leq \rho \leq r_2$) heraus und betrachten den folgenden Teilbereich D' : $r_1 \leq |z| \leq \rho$, $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$. Er wird begrenzt von den Jordanbogen $J_2, J'_4(z = \rho e^{i\theta}$, $\varphi_1 \leq \theta \leq \varphi_2)$, $J'_{1,3}(z = t e^{i\varphi_{2,1}}$, $r_1 \leq t \leq \rho)$. Bezeichnet $n(\rho)$ die Anzahl der Nullstellen im Bereich D' , so gilt nach dem Argumentprinzip

$$2\pi i \cdot n(\rho) = \oint_{J'_1+J_2+J'_3+J'_4} d \log f(z) = \int_{J'_1+J_2+J'_3} d \log f(z) + \int_{J'_4} d \log f(z),$$

$$2\pi i \cdot n(\rho) = \log f(\rho e^{i\varphi_1}) - \log f(\rho e^{i\varphi_2}) + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d \log f(\rho e^{i\theta}). \quad (3)$$

Nun ist

$$d \log f(\rho e^{i\theta}) = i \rho \cdot \frac{f'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta}}{f(\rho e^{i\theta})} \cdot d\theta = i \rho \cdot \frac{d}{d\rho} \log f(\rho e^{i\theta}) d\theta$$

und daher

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d \log f(\rho e^{i\theta}) = i \rho \cdot \frac{d}{d\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log f(\rho e^{i\theta}) d\theta. \quad 2)$$

Daraus folgt in Verbindung mit (3)

$$2\pi i \cdot n(\rho) = \log f(\rho e^{i\varphi_1}) - \log f(\rho e^{i\varphi_2}) + i \rho \cdot \frac{d}{d\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log f(\rho e^{i\theta}) d\theta$$

und weiter, durch Gleichsetzen der Real- und Imaginärteile

$$\log |f(\rho e^{i\varphi_1})| - \log |f(\rho e^{i\varphi_2})| = \rho \cdot \frac{d}{d\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\rho e^{i\theta}) d\theta, \quad (4)$$

$$2\pi \cdot n(\rho) - \arg f(\rho e^{i\varphi_1}) + \arg f(\rho e^{i\varphi_2}) = \rho \frac{d}{d\rho} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log |f(\rho e^{i\theta})| d\theta. \quad 3)$$

Betrachten wir zunächst die Gleichung (5). Das Integral $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log |f(\rho e^{i\theta})| \cdot d\theta$ hat für alle ρ ($r_1 \leq \rho \leq r_2$) einen Sinn, es ist eine stetige Funktion von ρ und für alle ρ , denen keine Nullstellen entsprechen, stetig differenzier-

²⁾ Integrieren und Differenzieren nach dem Parameter ρ sind hier vertauschbar, da $\log f(z)$ in der Umgebung jedes innern Punktes des Bogens J'_4 regulär ist.

³⁾ Vgl. auch *A. Pfluger*, *Comm. Math. Helv.* 12, S. 59..

bar. Enthält der Bogen J'_4 dagegen Nullstellen, so erleidet die Ableitung dort, wie sich unmittelbar aus (5) ergibt, einen Sprung um den Betrag $2\pi \frac{n(\varrho + 0) - n(\varrho - 0)}{\varrho}$. Wir dividieren (5) durch ϱ und integrieren von r_1 bis r_2 . Es folgt

$$2\pi \int_{r_1}^{r_2} n(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \arg f(\varrho e^{i\varphi_2}) - \arg f(\varrho e^{i\varphi_1}) \} \frac{d\varrho}{\varrho} = \\ = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \log |f(r_2 e^{i\theta})| - \log |f(r_1 e^{i\theta})| \} d\theta \quad (6)$$

oder mit Benützung von (1') bis (2'')

$$2\pi \cdot \int_{r_1}^{r_2} n(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho} + \log \frac{r_2}{r_1} (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_3) = (\varphi_2 - \varphi_1) (\bar{R}_4 - \bar{R}_2) . \quad (6')$$

Die entsprechende Umformung der Gleichung (4) bietet Schwierigkeiten. Zunächst ist das Integral $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\varrho e^{i\theta}) \cdot d\theta$ nur definiert für solche ϱ , denen keine Nullstellen entsprechen. Dort ist es auch stetig nach ϱ differenzierbar. An jenen Stellen ϱ , denen Nullstellen entsprechen, ist aber das Integral selbst unstetig. Für solche kritische ϱ läßt sich $\arg f(z)$ — ausgehend vom wohlbestimmten $\arg f(\varrho e^{i\varphi_1})$ — längs J'_4 nicht stetig fortsetzen. Umgehen wir jedoch die Nullstellen auf J'_4 im *positiven* Sinne durch kleine Halbkreise und setzen wir längs des abgeänderten Weges stetig fort, so entsteht eine Funktion $\arg f(\varrho e^{i\theta})$, die überall auf J'_4 stetig ist, bis auf die Nullstellen. Dort erleidet sie aber einen Sprung um $+p\pi$, wenn p die Vielfachheit der betreffenden Nullstelle bedeutet. Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f((\varrho + \varepsilon) e^{i\theta}) \cdot d\theta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\varrho e^{i\theta}) \cdot d\theta + , \quad \varepsilon > 0 .$$

Umgehen wir aber die Nullstellen im *negativen* Sinne durch kleine Halbkreise, so entsteht analog eine Funktion $\arg f(\varrho e^{i\theta})$, die in den Nullstellen einen Sprung von der Höhe $-p\pi$ erleidet. Entsprechend gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f((\varrho - \varepsilon) e^{i\theta}) \cdot d\theta = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\varrho e^{i\theta}) \cdot d\theta - , \quad \varepsilon > 0 .$$

Die Differenz $\arg f(\varrho e^{i\theta}) - \arg f(\varrho e^{i\theta})$ dagegen ist stückweise konstant.

Sie ist unstetig in den Nullstellen und besitzt dort Sprünge von der Höhe $2\pi p$. Bezeichnen wir die Nullstellen in D mit a_μ , jede ihrer Vielfachheit nach hingeschrieben, so folgt

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\rho e^{i\theta}) d\theta - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\rho e^{i\theta}) d\theta = 2\pi \sum_{|a_\mu| = \rho} (\varphi_2 - \arg a_\mu) . \quad (4)$$

Es ist also die Summe auf der rechten Seite der Sprung, den unser Integral bei einem kritischen ρ erleidet.

Wir dividieren (4) durch ρ , integrieren von r_1 bis r_2 , indem wir die Unstetigkeiten von $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \arg f(\rho e^{i\theta}) \cdot d\theta$ berücksichtigen, und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \{ \log |f(\rho e^{i\varphi_1})| - \log |f(\rho e^{i\varphi_2})| \} \frac{d\rho}{\rho} + 2\pi \sum_{(\mu)} (\varphi_2 - \arg a_\mu) = \\ = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \arg f(r_2 e^{i\theta}) - \arg f(r_1 e^{i\theta}) \} d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

oder mit Benützung von (1') bis (2'')

$$2\pi \sum_{(\mu)} (\varphi_2 - \arg a_\mu) + \log \frac{r_2}{r_1} (\bar{R}_3 - \bar{R}_1) = (\varphi_2 - \varphi_1) (\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_2) . \quad (7')$$

3. Die Ergebnisse der vorigen Nummer lassen sich in folgendem Satz zusammenfassen.

Satz 1. Sei die Funktion $f(z)$ im Bereiche $r_1 \leq |z| \leq r_2$, $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$ regulär, auf dem Rande noch stetig und von null verschieden. Längs dieses Randes, nachdem er bei $z = r_2 e^{i\varphi_2}$ aufgeschnitten wurde, sei ein eindeutiger und stetiger Zweig von $\arg f(z)$ festgelegt. $n(\theta)$ bezeichne die Anzahl der Nullstellen im Bereich $r_1 < |z| < r_2$, $\varphi_1 < \arg z < \theta_2$ und $n(\rho)$ ihre Anzahl in $r_1 < |z| \leq \rho$, $\rho \leq r_2$, $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{r_1}^{r_2} n(\rho) \cdot \frac{d\rho}{\rho} + \int_{r_1}^{r_2} \{ \arg f(\rho e^{i\varphi_2}) - \arg f(\rho e^{i\varphi_1}) \} \frac{d\rho}{\rho} = \\ = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \log |f(r_2 e^{i\theta})| - \log |f(r_1 e^{i\theta})| \} d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

und

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} n(\theta) d\theta + \int_{r_1}^{r_2} \{ \log |f(\rho e^{i\varphi_1})| - \log |f(\rho e^{i\varphi_2})| \} \frac{d\rho}{\rho} = \\ = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \arg f(r_2 e^{i\theta}) - \arg f(r_1 e^{i\theta}) \} d\theta . \end{aligned} \quad (7)$$

⁴⁾ Es ist $\varphi_1 < \arg a_\mu < \varphi_2$.

Wir können uns von der Beschränkung befreien, daß die Funktion auf dem Rande von null verschieden sein müsse. Dagegen müssen wir noch fordern, daß der Bereich im Innern nur endlich viele Nullstellen enthalte. Dann läßt sich nämlich der gegebene Bereich von innen durch Teilbereiche so approximieren, daß ihr Rand keine Nullstellen überstreicht. Für diese Teilbereiche ist die Voraussetzung des Satz 1 erfüllt. Wählen wir die Bestimmung auf dem Rand des gegebenen Bereiches so, daß ein stetiger Anschluß erfolgt, so ergibt sich der Satz durch Grenzübergang auch für den gegebenen Bereich.

Es ist vorteilhaft, folgenden Fall hervorzuheben. Die Funktion sei in und auf dem Rande des Bereiches $r_1 < |z| < r_2$, $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ regulär. Dieser Bereich kann dann durch Bereiche von „rechts unten“, d. i. $r_1 + \varepsilon < |z| < r_2 + \varepsilon$, $\varphi_1 - \varepsilon < \arg z < \varphi_2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (ε genügend klein), approximiert werden, ohne daß ihr Rand Nullstellen überstreicht. Wie unten genauer angegeben wird, sei $\arg f(z)$ auf dem Rande von D und analog D' so definiert, daß der stetige Anschluß gewährleistet ist. Es gilt dann im Anschluß an das Vorangehende

Satz 2. *Sei die Funktion $f(z)$ in und auf dem Rande des Bereiches $r_1 < |z| < r_2$, $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ regulär. Entlang des Randes, der bei $z = r_2 e^{i\varphi_2}$ aufgeschnitten sei, werde ein bestimmter Zweig von $\arg f(z)$ stetig fortgesetzt, indem eventuelle Nullstellen auf dem Rand durch kleine Halbkreise umgangen werden, und zwar von $r_2 e^{i\varphi_2}$ über $r_1 e^{i\varphi_2}$ bis $r_1 e^{i\varphi_1}$ im negativen Sinn, von $r_1 e^{i\varphi_1}$ über $r_2 e^{i\varphi_1}$ bis $r_2 e^{i\varphi_2}$ aber im positiven Sinn. $n(\theta)$ bezeichne die Anzahl der Nullstellen im Bereich $r_1 < |z| < r_2$, $\varphi_1 < \arg z < \theta_2$ und $n(\varrho)$ ihre Anzahl in $r_1 < |z| < \varrho$, $\varrho < r_2$, $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$. Dann gelten die Formeln (6) und (7) des Satzes 1.*

Der Satz gilt entsprechend auch für meromorphe Funktionen, wenn $n(\varrho)$ durch die Differenz $n_0(\varrho) - n_\infty(\varrho)$ der Anzahlfunktionen der Pol- und Nullstellen ersetzt wird und $n(\theta)$ entsprechend durch $n_0(\theta) - n_\infty(\theta)$.

4. Die beiden vorangehenden Sätze stellen eine Verallgemeinerung und Erweiterung der Jensen'schen Formel dar. Mit $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, $r_1 = 0$, $r_2 = r$ geht der Kreissektorstumpf über in den Kreis $|z| < r$. Gemäß den Festsetzungen in Satz 2 ergibt sich dann unmittelbar aus (6)

$$\int_0^r n(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| \quad (8)$$

und gewissermaßen dual dazu, aus (7)

$$\int_0^{2\pi} n(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \arg f(re^{i\theta}) d\theta - \arg f(0) , \quad (9)$$

sofern $z = 0$ keine Nullstelle ist.

Formel (9) stellt einen Zusammenhang dar zwischen den Mittelwerten des Argumentes auf der Peripherie und dem Mittelpunkt des Kreises einerseits, den Argumenten der Nullstellen in diesem Kreise andererseits. Sie könnte als die *Jensen'sche Formel des Argumentes* betrachtet werden, (8) dagegen als die *Jensen'sche Formel des Betrages*. Während aber die Formel (8) vollkommen eindeutig ist, spielt in (9) die Unbestimmtheit des Argumentes eine unangenehme Rolle. Um den Zusammenhang zwischen dem Argument im Nullpunkt und auf der Peripherie zu verstehen, ist immer die ganze Figur, wie sie allgemein im Kreissektorstumpf vorliegt, im Auge zu behalten; also auch die beiden zusammenfallenden, aber entgegengesetzt orientierten Radien, J_1 und J_3 , die den Mittelpunkt J_2 mit der Peripherie J_4 verbinden. In Übereinstimmung mit (9) wählen wir für J_1 bzw. J_3 das Stück der positiven reellen Achse. Es kann jedoch irgend ein anderer Radius für J_1 bzw. J_3 gewählt werden, sofern dann $\arg f(re^{i\theta})$ und $n(\theta)$ sinngemäß modifiziert werden. Die Bedeutung der Formel (9) ist aus folgendem Satz ersichtlich:

Satz 3. $f(z)$ sei in $|z| \leq r$ regulär, $f(0) \neq 0$ und $n(\theta)$ die Anzahl ihrer Nullstellen in $|z| \leq r$, $0 \leq \arg z < \theta$. Es sei ferner ein Zweig von $\arg f(z)$ in $z = 0$ festgelegt und stetig fortgesetzt entlang der positiven reellen Achse bis $z = r$ und von dort im positiven Sinne längs der Kreisperipherie, indem eventuelle Nullstellen im positiven Sinne durch kleine Halbkreise umgangen werden. Schließlich sei

$$m \leq \arg f(re^{i\theta}) - \arg f(0) \leq M, \quad 0 \leq \theta < 2\pi . \quad (10)$$

Dann gilt

$$m \leq \int_0^{2\pi} n(\theta) d\theta \leq M . \quad (11)$$

Die Schranken des Argumentes auf dem Rande des Bereiches liefern also keine Schranke für die Zahl der Nullstellen im ganzen Bereich, wohl aber für ihre Anzahl in gewissen Sektoren. Denn in (11) hat eine Nullstelle um so größeres Gewicht, je kleiner ihr Argument ist. So folgt aus (11) z. B.: Die Zahl der Nullstellen in $0 \leq \arg z < \pi$ ist kleiner als $\frac{M}{\pi}$. Liegen sämtliche Nullstellen auf der negativen reellen Achse, so ist ihre Anzahl zwischen $\frac{m}{\pi}$ und $\frac{M}{\pi}$.

5. Die Lösung der eingangs gestellten Frage über konforme Abbildung eines Kreissektorstumpfes ergibt sich sofort aus Satz 1. Denn die Abbildungsfunktion $f(z)$ hat auf dem Rande den Betrag 1 und im Innern nur eine einzige Nullstelle a_0 . (6) und (7) reduzieren sich also auf

$$\int_{r_1}^{r_2} \{ \arg f(\rho e^{i\varphi_1}) - \arg f(\rho e^{i\varphi_2}) \} \cdot \frac{d\rho}{\rho} = 2\pi \log \frac{r_2}{|a_0|} \quad (12)$$

und

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \arg f(r_2 e^{i\theta}) - \arg f(r_1 e^{i\theta}) \} d\theta = 2\pi (\varphi_2 - \arg a_0) . \quad (13)$$

Daraus folgt

Satz 4. *Zwischen der Lage der Nullstelle a_0 der Abbildungsfunktion und den mittlern Richtungen der Kreisbogen besteht folgender Zusammenhang*

$$\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1 = 2\pi \cdot \frac{\log r_2 - \log |a_0|}{\log r_2 - \log r_1} , \quad (12')$$

$$\bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_2 = 2\pi \cdot \frac{\varphi_2 - \arg a_0}{\varphi_2 - \varphi_1} . \quad (13')$$

Satz 4 legt also den „Richtungsunterschied gegenüberliegender Bogen“ fest. Wählen wir die Nullstelle im „Mittelpunkt“, gilt also

$$|a_0| = \sqrt{r_1 \cdot r_2} \quad , \quad \arg a_0 = \frac{1}{2} (\varphi_2 + \varphi_1)$$

so folgt $\bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_2 = \pi$, d. h. die Richtungen $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_3$ bzw. $\bar{\omega}_4$ und $\bar{\omega}_2$ sind entgegengesetzt. Aus Symmetriegründen folgt dann weiter, daß die Richtungen $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_4$ aufeinanderfolgend rechte Winkel einschließen.

6. Es scheint, daß die Formeln (6) und (7) zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen nützlich sein könnten. In dieser Hinsicht erwähnen wir folgendes:

Satz 5 *Sei die Funktion $f(z)$ in und auf dem Rande des Winkelraumes $\varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2$ regulär und beschränkt. Sei ferner*

$$\int_1^{\infty} \{ \arg f(\rho e^{i\varphi_2}) - \arg f(\rho e^{i\varphi_1}) \} \frac{d\rho}{\rho} \quad (14)$$

konvergent. Dann besitzt $f(z)$ im Innern des Winkelraumes keine Nullstellen.

⁵⁾ Je näher a_0 einem Jordanbogen J_ν kommt, um so länger ist sein Bildbogen und um so größer der „Richtungsunterschied“ der beiden angrenzenden Kreisbogen. Die Formeln (12') und (13') zeigen, daß alle Richtungsunterschiede von 0 bis 2π möglich sind.

Beweis: Wegen (6) und den Voraussetzungen des Satzes muß

$$2\pi \int_{\varepsilon}^r n(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho} = \int_{\varepsilon}^r \{ \arg f(\varrho e^{i\varphi_1}) - \arg f(\varrho e^{i\varphi_2}) \} \frac{d\varrho}{\varrho} + \\ + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{ \log |f(re^{i\theta})| - \log |f(\varepsilon e^{i\theta})| \} d\theta$$

bei $r \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben, wie klein auch $\varepsilon (> 0)$ gewählt werde. Dies kann aber nur sein, wenn $n(\varrho) \equiv 0$ ist.

Es ist zu bemerken, daß in diesem Falle zugleich mit (14) auch der Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \log |f(re^{i\theta})| \cdot d\theta$$

existiert.

(Eingegangen den 5. April 1941.)

Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive

Par F. FIALA, Genève

INTRODUCTION

1. Hypothèses

1. 1. Pendant longtemps la *géométrie différentielle* s'est bornée à l'étude des *propriétés locales* de morceaux suffisamment petits de surface. C'est en particulier le point de vue qui a guidé Darboux dans ses „Leçons sur la théorie générale des surfaces“ [1]*), auxquelles nous aurons bien souvent implicitement recours. Il existe pourtant un autre champ de recherches, pour la plupart relativement récentes, qui ont pour but la connaissance de la *structure globale* des surfaces tout entières. C'est à celles-ci que se rattache le présent travail.

Les surfaces qui nous intéressent sont *ouvertes*, ce qui signifie qu'elles contiennent des régions s'éloignant jusqu'à l'infini ou, pour employer un langage plus précis, *qu'elles contiennent des ensembles infinis de points n'admettant aucun point d'accumulation*. Il est alors essentiel, pour que nous soyons sûrs d'avoir à faire à des *surfaces entières* et non à des morceaux de surfaces, de formuler l'hypothèse suivante: *La longueur de toute courbe divergente sur la surface est infinie*. La notion de courbe divergente est précisée au no 4. 1. MM. Hopf et Rinow ont montré [2] que cette hypothèse de „Vollständigkeit“ est équivalente à plusieurs autres, en particulier à la suivante, qui fait de nos surfaces des espaces de Riemann normaux au sens de Cartan: *Tout ensemble infini borné de points admet au moins un point limite*¹⁾.

*) Dans le texte, nous désignons par les chiffres suivants les principaux ouvrages auxquels nous nous référons:

- [1] *Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, 1887.
- [2] *Hopf und Rinow*, Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, *Comm. Math. Helv.*, 3, 1931, p. 209—225.
- [3] *Cohn-Vossen*, Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen, *Comp. Math.*, II, 1935, p. 69—133.
- [4] *Cohn-Vossen*, Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfach zusammenhängenden offenen vollständigen Flächenstücken, *Recueil mathématique de Moscou*, I (43), 1936, p. 139—163.
- [5] *Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3^{me} éd., Berlin, 1930.

¹⁾ *Cartan*, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris 1928.

Nous allons dorénavant borner nos considérations aux surfaces *homéomorphes au plan euclidien*. Nous verrons au n° 1.3 que cette hypothèse ne réduit nullement la portée de nos théorèmes principaux, qui se trouvent énoncés dans la seconde partie de ce travail. C'est pour cette raison que nous nous sommes permis, dans le but de simplifier les démonstrations, de faire cette hypothèse topologique même dans la première partie, où elle n'est pas essentielle.

Comme les propriétés qui nous intéressent ainsi que leur démonstration ne dépendent que de l'élément linéaire de nos surfaces, nous n'avons pas besoin de supposer qu'elles sont plongées dans l'espace euclidien à trois dimensions, leur métrique étant déterminée par cette „immersion“. Nous les supposerons, au contraire données abstraitement comme des *espaces de Riemann à deux dimensions* dans lesquels une forme quadratique, donnée dans le voisinage de chaque point et satisfaisant à certaines conditions de „raccordement“, définit la métrique ([2], p. 209—211). Bien entendu, tous les résultats s'appliquent en particulier aux surfaces ordinaires de l'espace euclidien.

1. 2. Pour simplifier les démonstrations et bien qu'il soit sans doute possible de se passer de cette hypothèse, nous supposerons encore que *les surfaces sont analytiques*. On entend par là que dans le voisinage de chaque point doit exister un système de coordonnées tel que, là où deux systèmes se superposent, la transformation qui permet de passer de l'un à l'autre est donnée par des fonctions analytiques; les coefficients de la forme quadratique doivent être des fonctions analytiques de ces coordonnées.

Si nous ne retenons de la métrique de Riemann que la formule connue du cosinus de l'angle de deux courbes en un point quelconque de nos surfaces, nous pouvons les considérer comme des variétés de Riemann au sens de Koebe²⁾. Nous pouvons en particulier leur appliquer le premier théorème d'équivalence et les représenter d'une manière conforme, donc analytique, soit sur le plan euclidien, soit sur l'intérieur du cercle unité. Comme il est facile de trouver une représentation analytique, évidemment pas conforme, de l'intérieur du cercle unité sur le plan euclidien, on pourra dans tous les cas représenter analytiquement nos surfaces sur le plan euclidien.

C'est ce plan, dans lequel nous introduisons des coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y , que nous prendrons comme point de départ de nos

²⁾ Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Acta Math. 50, 1927, p. 31—57, en particulier la IV^e partie.

recherches. Nous l'appelons *un plan de Riemann*. La métrique y est définie à l'aide d'une forme quadratique définie positive

$$ds^2 = E(x, y) dx^2 + 2F(x, y) dx dy + G(x, y) dy^2,$$

dont les coefficients sont des fonctions analytiques de x et de y ; la longueur de toute ligne divergente dans le plan est infinie. Par fonction analytique, nous entendons dans tout ce travail une fonction analytique réelle, c'est-à-dire développable en série entière dans le voisinage des valeurs considérées des variables. On connaît les formules permettant de calculer toutes les expressions qui ne dépendent que de l'élément linéaire, en particulier la courbure totale en un point.

1. 3. Il nous reste à formuler l'hypothèse caractéristique de ce travail. Nous considérons des *plans de Riemann à courbure totale jamais négative*.

C'est à cette classe de surfaces qu'appartiennent le plan euclidien, les paraboloides elliptiques, chacune des nappes des hyperboloïdes à deux nappes, et plus généralement toutes les surfaces ouvertes normales à courbure positive, comme l'a démontré Cohn-Vossen ([3], p. 80). C'est d'ailleurs dans les travaux de ce dernier, [3] et [4], qu'il faut voir le point de départ des présentes recherches.

2. Résultats³⁾

Nos résultats principaux sont donnés sous la forme de trois inégalités et de quatre théorèmes dans la seconde partie de notre travail.

2. 1. Considérons une courbe \mathfrak{F} rectifiable et simplement fermée, située dans un plan de Riemann. Le problème central de ce travail est la recherche d'une *inégalité isopérimétrique*, c'est-à-dire d'une relation entre la longueur L de \mathfrak{F} et l'aire A du domaine compris à l'intérieur de \mathfrak{F} . Sans hypothèse complémentaire, relative par exemple à la courbure de la surface, le problème est évidemment beaucoup trop général. A côté de l'exemple classique *du plan euclidien* où les démonstrations de la formule bien connue

$$L^2 \geq A \cdot 4\pi$$

ne se comptent plus, le problème a été résolu sur *la sphère* par F. Bernstein⁴⁾ et dans *le plan hyperbolique* par E. Schmidt⁵⁾. Celui-ci a d'ailleurs

³⁾ Nous les avons résumés dans une note parue dans les Comptes Rendus, 209, 1939, p. 821—823.

⁴⁾ Math. Ann. 60, 1905, p. 117—136.

⁵⁾ Math. Zeitschrift, 46, 1940, p. 204.

montré que l'on peut réunir en une seule formule les inégalités isopérimétriques valables sur ces trois surfaces à courbure constante. En désignant par K la courbure totale de la surface considérée, on a :

$$L^2 \geq A(4\pi - KA).$$

Le signe d'égalité n'ayant lieu que pour le cercle, cette formule permet de résoudre le *problème isopérimétrique* : Parmi toutes les courbes fermées de longueur donnée, le cercle limite le domaine dont l'aire est la plus grande.

Nous ajouterons que la formule isopérimétrique du plan euclidien a été démontrée sur les surfaces minima par Carleman⁶⁾ et d'une manière plus générale sur les surfaces à courbure totale négative par Radó et Beckenbach⁷⁾ ; ces derniers ont également remarqué que cette formule n'est pas valable sur des surfaces à courbure totale positive. Pour ces surfaces, c'est à notre connaissance avec le théorème de Bernstein relatif à la sphère le seul résultat connu concernant le problème isopérimétrique. Si, dans le présent travail, nous n'en donnons pas encore la solution définitive, nous en fournissons du moins un élément important sous la forme d'une inégalité isopérimétrique, analogue à celle du plan euclidien. Voici d'ailleurs quelques remarques qui montreront pourquoi le problème isopérimétrique est beaucoup plus difficile à résoudre sur une surface quelconque que sur une surface à courbure totale constante.

Une condition pour qu'une courbe fermée, de longueur donnée L , limite sur une surface un domaine d'aire maximum est que la courbure géodésique de la courbe soit constante ([5], p. 154). Sur une surface à courbure totale constante, la recherche de telles courbes est considérablement simplifiée par le fait suivant : les lignes géodésiques issues d'un point fixe forment un système de coordonnées facile à étudier et leurs trajectoires orthogonales sont des courbes à courbure géodésique constante.

Il n'en est évidemment plus de même sur une surface quelconque et la notion même de cercle se décompose en plusieurs notions plus ou moins incompatibles entre elles, suivant la propriété du cercle que l'on tient à conserver.

Dans certaines démonstrations de l'inégalité isopérimétrique du plan euclidien et en supposant que la courbure de la courbe \mathfrak{C} existe en tous points, on peut considérer la constante 4π comme le double de l'intégrale de la courbure de \mathfrak{C} ⁸⁾ ; on sait en effet que cette quantité que nous voulons

⁶⁾ Math. Zeitschrift, 9, 1921, p. 154—160.

⁷⁾ Trans. Amer. Math. Soc. 35, 1933.

⁸⁾ P. ex. la démonstration de Crone et Frobenius, reproduite dans [5], p. 56.

désigner par $\kappa(\mathfrak{F})$ ne dépend pas de \mathfrak{F} dans le plan euclidien et vaut toujours 2π . On peut alors énoncer l'inégalité isopérimétrique

$$L^2 \geq 2A \kappa(\mathfrak{F}). \quad (\text{I})$$

C'est sous cette forme que nous la démontrerons pour une courbe simplement fermée \mathfrak{F} située dans un plan de Riemann à courbure jamais négative; nous ferons tout d'abord l'hypothèse que \mathfrak{F} est une courbe analytique régulière; $\kappa(\mathfrak{F})$ représente l'intégrale de la courbure géodésique le long de \mathfrak{F} .

Il est avantageux de transformer légèrement cette inégalité à l'aide de la formule de Bonnet

$$\kappa(\mathfrak{F}) = 2\pi - C(\mathfrak{F}),$$

où $C(\mathfrak{F})$ représente l'intégrale de la courbure totale $K(x, y)$, étendue au domaine compris à l'intérieur de \mathfrak{F} .

Nous pouvons ainsi énoncer l'inégalité

$$L^2 \geq 2A (2\pi - C(\mathfrak{F})). \quad (\text{II})$$

Cette formule est tout d'abord valable pour une courbe analytique régulière; on peut l'étendre à toute courbe rectifiable \mathfrak{F} à l'aide d'une suite de courbes analytiques régulières $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ convergeant vers \mathfrak{F} .

Le coefficient de A est une quantité qui dépend encore de la courbe \mathfrak{F} . Pour obtenir à sa place une constante, il suffit de rappeler que $K(x, y)$ n'est par hypothèse jamais négatif; $C(\mathfrak{F})$ est donc plus petit que l'intégrale de $K(x, y)$ sur tout le plan, intégrale que nous désignons par C_T (l'égalité $C(\mathfrak{F}) = C_T$ ne peut avoir lieu que dans le cas du plan euclidien).

Étant donné un plan de Riemann à courbure non négative, nous pouvons donc formuler une inégalité valable pour une courbe quelconque de ce plan,

$$L^2 \geq 2A (2\pi - C_T). \quad (\text{III})$$

Si $C_T = 2\pi$, la formule est triviale. Le membre de droite ne saurait d'ailleurs être négatif, car, comme l'a démontré Cohn-Vossen, sur une surface du type considéré $C_T \leq 2\pi$, ([3], p. 79).

Quant au signe d'égalité dans la formule (I), nous démontrerons au *Théorème B* qu'il ne peut avoir lieu que si le plan de Riemann est isométrique au plan euclidien et si la courbe est un cercle; dans ce cas on a $C(\mathfrak{F}) = 0$. Il est clair que les conditions du signe d'égalité restent les mêmes pour les inégalités (II) et (III).

La formule (I) et le théorème *B* sont démontrés dans la seconde partie de notre travail, au n° 11.

La formule (I) nous a été suggérée pour les surfaces ordinaires de l'espace euclidien par les considérations suivantes: Etant donnée sur une surface ouverte à courbure positive, une courbe simplement fermée \mathfrak{F} , considérons la surface développable, enveloppe des plans tangents à la surface le long de \mathfrak{F} . Dans le cas où la surface développable est un cône, l'aire comprise à l'intérieur de \mathfrak{F} sur la surface est certainement plus petite que l'aire comprise à l'intérieur de \mathfrak{F} sur le cône. Pour s'en persuader, il suffit d'appliquer la généralisation du théorème d'Archimède: Si une surface convexe est entièrement située à l'intérieur d'une autre surface convexe, l'aire de la première est plus petite que l'aire de la seconde. Or, il est facile de vérifier que l'inégalité (I) est valable sur le cône ou dans le secteur correspondant à son développement sur un plan. Elle l'est donc a fortiori pour le morceau de surface considéré. Il aurait peut-être été possible de la démontrer généralement pour des morceaux de surface plongés dans l'espace ordinaire en déformant isométriquement ceux-ci jusqu'à ce que la surface développable déterminée par les plans tangents à la surface le long de la courbe \mathfrak{F} soit un cône. Nos efforts dans ce sens ne nous ont conduit qu'à des résultats partiels et c'est une tout autre idée qui nous permettra de donner une démonstration générale. Nous voulons faire une dernière remarque: l'hypothèse d'une surface normale n'est pas indispensable pour les formules (I) et (II), qui pourraient être démontrées sur n'importe quel morceau simplement connexe de surface à courbure non négative. Elles sont évidemment triviales dès que $C(\mathfrak{F}) \geq 2\pi$.

2. 2. Dans nos inégalités isopérimétriques apparaissent certaines constantes dont nous nous sommes proposé de justifier le choix. Nous bornerons nos considérations à l'inégalité (III) pour laquelle le résultat obtenu est particulièrement intéressant.

Considérons un plan de Riemann fixe et l'ensemble de toutes les courbes simplement fermées de ce plan. A chaque courbe \mathfrak{F} nous faisons correspondre la valeur du quotient $\frac{L^2(\mathfrak{F})}{A(\mathfrak{F})}$. L'inégalité isopérimétrique (III) nous apprend que l'ensemble de ces valeurs est borné inférieurement. Cette inégalité nous fournit même une estimation de la borne inférieure. On a évidemment

$$\text{borne inf.} \left(\frac{L^2}{A} \right) \geq 2(2\pi - C_T) .$$

Lorsque nous aurons démontré que, dans cette formule, seul le signe

d'égalité est valable, nous aurons en même temps montré qu'il est impossible de remplacer la constante $2(2\pi - C_T)$ par une constante plus grande dans l'inégalité (III), que nous voulons valable pour toutes les courbes du plan de Riemann considéré.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer le

Théorème C. *Dans un plan de Riemann à courbure totale non négative, on a pour l'ensemble des courbes simplement fermées*

$$\text{borne inf.} \left(\frac{L^2}{A} \right) = 2(2\pi - C_T) .$$

La démonstration de ce théorème, que nous présenterons au n^o 12, consistera à trouver une suite de courbes fermées $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ pour lesquelles

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2(\mathfrak{F}_n)}{A(\mathfrak{F}_n)} = 2(2\pi - C_T) .$$

Il nous faut remettre au n^o 3 une explication plus détaillée de la construction d'une telle suite qui repose sur la méthode caractéristique de ce travail.

2. 3. On peut considérer la question suivante comme le point de départ du présent travail:

Etant donné un plan de Riemann à courbure totale non négative et un nombre L , l'aire des domaines limités par une courbe fermée de longueur L est-elle supérieurement bornée?

A cette question nous répondrons au n^o 13 par le

Théorème D. *Si $C_T < 2\pi$, l'aire des domaines limités par une courbe de longueur L est bornée supérieurement pour tout L .*

Si $C_T = 2\pi$, l'aire des domaines limités par une courbe de longueur $L < L^$ est bornée supérieurement; L^* est une constante positive (éventuellement infinie) qui dépend du plan de Riemann considéré.*

Ce théorème est au fond une forme très affaiblie de la solution habituelle du problème isopérimétrique. On remarquera en particulier qu'il serait complètement faux d'en déduire immédiatement l'existence d'une courbe fermée \mathfrak{F} limitant un domaine d'aire maximum.

La première partie du théorème *D* est applicable par exemple à la surface formée par une des nappes d'un hyperboloïde à deux nappes. La seconde partie concerne le cas du paraboloidé elliptique où l'on trouve

pour L^* la valeur ∞ , ou celui de la surface de révolution dont le méridien a pour équation

$$z = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad ,$$

où l'on trouve pour L^* la valeur π^2 .

2. 4. Quant au n^o 10, nous y démontrerons un théorème presque évident pour des surfaces plongées dans l'espace ordinaire, mais moins immédiat pour les surfaces abstraites que nous considérons :

Théorème A. *L'aire totale d'un plan de Riemann à courbure non négative est infinie.*

C'est du reste une condition essentielle pour que les conséquences que nous avons tirées de nos inégalités isopérimétriques ne soient pas triviales.

Remarquons d'autre part que ce théorème n'est pas vrai dans un plan de Riemann à courbure quelconque ; il est facile en effet de construire des surfaces ouvertes normales dont l'aire totale est finie.

3. Méthode

3. 1. Nous allons dire maintenant quelques mots du procédé qui nous a permis de démontrer la formule isopérimétrique (I) et les théorèmes *A, B, C*. Il s'agissait avant tout de trouver un système de coordonnées adéquat à notre problème.

Crone et Frobenius³⁾ ont présenté une démonstration de l'inégalité isopérimétrique du plan euclidien à l'aide des parallèles à la courbe \mathfrak{F} , définies de la manière suivante : C'est le lieu des points que l'on obtient en reportant une longueur constante sur toutes les normales à \mathfrak{F} . On est assuré que les courbes ainsi obtenues sont analytiques régulières, seulement si \mathfrak{F} est une courbe analytique régulière et convexe et si l'on ne considère que les parallèles extérieures à \mathfrak{F} . Par contre, les parallèles intérieures ou les parallèles à une courbe non convexe peuvent présenter des points singuliers.

Sur une surface à courbure non nulle, la situation est beaucoup plus désagréable. Rappelons tout d'abord la définition que Gauss a donnée des *parallèles géodésiques à une courbe* \mathfrak{F} analytique régulière : Ce sont les trajectoires orthogonales de la famille des lignes géodésiques normales à \mathfrak{F} ; on sait que l'on peut également les définir comme lieux des points obtenus en reportant à partir de \mathfrak{F} une longueur constante sur toutes les lignes géodésiques normales à \mathfrak{F} .

Or ce n'est que dans le voisinage de la courbe \mathfrak{F} que l'on peut affirmer

³⁾ Voir note ²⁾, voir aussi la démonstration de *Bernstein*, note ⁴⁾.

que les parallèles géodésiques sont analytiques régulières. Ailleurs, elles peuvent présenter des points singuliers et il est possible que des points de la surface soient situés sur plusieurs parallèles géodésiques. On ne saurait donc les employer, sans précautions, comme coordonnées sur toute la surface. Nous avons dû en modifier quelque peu la définition pour obtenir un système de courbes utilisable dans nos plans de Riemann tout entiers.

Nous définissons la *vraie parallèle à distance p d'une courbe \mathfrak{F}* comme le lieu des points situés à la distance p de \mathfrak{F} . Nous entendons par distance entre une courbe \mathfrak{F} et un point P , la borne inférieure de la longueur des arcs joignant P et un point quelconque de \mathfrak{F} . Pour éviter toute confusion, nous comptons la distance positivement ou négativement suivant que le point P est à l'extérieur ou à l'intérieur de \mathfrak{F} .

La vraie parallèle à distance p de \mathfrak{F} se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques appartenant à la parallèle géodésique à distance p de \mathfrak{F} ; ces arcs forment un nombre fini de courbes fermées. Pour de petites valeurs de p , on sait que les vraies parallèles coïncident avec les parallèles géodésiques. La propriété essentielle des vraies parallèles, celle qui les rend vraiment adéquates à des considérations géométriques globales est la suivante: *Par tout point d'un plan de Riemann passe une et une seule vraie parallèle à une courbe donnée \mathfrak{F} .*

3. 2. La principale difficulté de cette méthode provient de l'angle que forment en général deux arcs d'une vraie parallèle au point où ils se raccordent. Nous verrons qu'un tel point est ce que nous avons appelé un point extrême et dont voici la définition: On sait qu'une ligne géodésique normale à \mathfrak{F} fournit entre un de ses points P et un point quelconque de \mathfrak{F} un arc de longueur minimum — du moins si P n'est pas trop éloigné de \mathfrak{F} . Nous appelons *point extrême* le point pour lequel une ligne géodésique normale à \mathfrak{F} perd cette propriété.

Signalons qu'une étude du lieu des points extrêmes a déjà été entreprise par Myers¹⁰⁾ dans un cas moins général que le nôtre. Myers s'est borné en effet à étudier les points extrêmes — qu'il appelle d'ailleurs „points minimum“ — pour la famille des lignes géodésiques issues d'un point fixe. Ses considérations permettraient d'étudier le lieu des points à distance constante d'un point fixe, courbe que l'on pourrait appeler *un vrai cercle*.

Nous avons réussi à généraliser un bon nombre des résultats de Myers et à en tirer les conséquences désirées pour nos vraies parallèles; ceci

¹⁰⁾ Connections between differential geometry and topology, I. Simply connected surfaces, Duke Math. Journal, 1, 1935, p. 376—391.

représente un travail préliminaire assez considérable. Aussi, pour ne pas surcharger les démonstrations de nos résultats principaux sur le problème isopérimétrique, nous avons réunis ces considérations dans une première partie et nous les avons résumées en 5 théorèmes dont les énoncés sont seuls nécessaires à la compréhension de la seconde partie.

3. 3. Etant donnée dans un plan de Riemann une courbe analytique régulière simplement fermée \mathfrak{F} , nous désignons par $L(p)$ la longueur de la vraie parallèle à distance p de \mathfrak{F} . La fonction $L(p)$, continue pour toute valeur de p , est même analytique, sauf éventuellement pour un nombre fini ou pour une suite divergente de valeurs de p .

Pour la dérivée de $L(p)$, on peut donner deux inégalités suivant que l'on considère une parallèle extérieure ou intérieure à \mathfrak{F} . En désignant par $\kappa(\mathfrak{F})$ l'intégrale de la courbure géodésique le long de \mathfrak{F} et par $C(p)$ l'intégrale de la courbure totale sur le domaine compris entre \mathfrak{F} et la vraie parallèle à distance p , on a

$$\text{pour } p > 0, \quad \frac{dL(p)}{dp} \leq \kappa(\mathfrak{F}) - C(p)$$

$$\text{et pour } p < 0, \quad \frac{dL(p)}{dp} \geq \kappa(\mathfrak{F}) + C(p).$$

L'aire du domaine situé à l'intérieur de \mathfrak{F} se calcule à l'aide de la formule

$$A(\mathfrak{F}) = \int_{\bar{p}}^0 L(p) dp,$$

où \bar{p} est une constante négative dépendant de \mathfrak{F} .

Dans un plan de Riemann à courbure totale positive, ces diverses formules permettent d'établir l'inégalité isopérimétrique linéaire suivante, généralisation d'une formule bien connue démontrée par Bonnesen¹¹⁾ dans le plan euclidien :

$$A(\mathfrak{F}) \leq L(\mathfrak{F}) \cdot (-\bar{p}) - \kappa(\mathfrak{F}) \frac{\bar{p}^2}{2}.$$

Une transformation algébrique élémentaire permet de passer de cette formule à notre inégalité isopérimétrique (I).

On peut exprimer d'autre part l'aire totale du plan de Riemann à l'aide de l'intégrale suivante :

$$A_T = \int_{\bar{p}}^{\infty} L(p) dp.$$

¹¹⁾ Les problèmes des isopérimètres, Paris, 1929, p. 60 et suiv.

La démonstration du théorème *A* repose sur une remarque facile à déduire des travaux de Cohn-Vossen ([3], p. 132), à savoir que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} L(p) > 0 .$$

Quant au théorème *C*, la suite de courbes sur laquelle doit reposer sa démonstration, d'après les considérations du n° 2. 2 consistera en une suite de vraies parallèles à distance de plus en plus grande d'une courbe \mathfrak{F} fixe, mais quelconque. On le démontre à l'aide de la formule suivante, qui nous fournit un renseignement intéressant sur le comportement asymptotique des vraies parallèles à une courbe \mathfrak{F} située dans un plan de Riemann à courbure non négative :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{L(p)}{p} = 2\pi - C_T .$$

PREMIÈRE PARTIE

Coordonnées géodésiques et vraies parallèles géodésiques dans un plan de Riemann

4. Plan de Riemann

4. 1. Nous appelons plan de Riemann un plan euclidien aux coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y , dans lequel est donnée en chaque point *une forme quadratique définie positive*,

$$ds^2 = E(x, y) dx^2 + 2F(x, y) dx dy + G(x, y) dy^2 ,$$

introduisant une nouvelle métrique.

Soit un arc de courbe \mathfrak{A} donné par les deux fonctions dérivables

$$x = x(t) \quad \text{et} \quad y = y(t)$$

définies dans l'intervalle $t_1 \leq t \leq t_2$. On calcule la longueur de \mathfrak{A} à l'aide de l'intégrale suivante

$$L(\mathfrak{A}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(x, y) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2F(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + G(x, y) \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt .$$

Nous supposons que la forme quadratique satisfait aux conditions suivantes :

1) Les fonctions $E(x, y)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$ sont des fonctions analytiques réelles de x et de y dans tout le plan, c'est-à-dire que dans le voisinage de tout point P_0 , de coordonnées x_0, y_0 , elles admettent un développement en série entière de $x - x_0$ et $y - y_0$.

2) La longueur de toute courbe divergente est infinie.

Nous appelons l'image topologique de l'intervalle $0 \leq t < 1$ une courbe divergente si toute suite de points divergente sur la courbe est divergente dans le plan. Nous disons en général qu'une suite infinie de points est divergente dans un ensemble de points \mathfrak{E} si elle ne possède aucun point d'accumulation dans \mathfrak{E} . Dans notre cas particulier, une suite de points est divergente sur la courbe si les valeurs $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ correspondant aux points de la suite, tendent vers 1; une suite de points est divergente dans le plan si la suite des expressions $x^2(t_n) + y^2(t_n)$ tend vers l'infini.

Désormais la longueur d'un arc de courbe ainsi que toutes les quantités qui ne dépendent que de l'élément linéaire, comme la courbure géodésique d'une courbe, l'angle de deux courbes, l'aire d'un domaine, la courbure totale en un point, sont entendues, à moins d'indication contraire, au sens de la métrique de Riemann.

4. 2. Les hypothèses auxquelles doit satisfaire un plan de Riemann en font une surface analytique complète suivant la définition donnée dans le travail de MM. Hopf et Rinow [2] dont nous voulons rappeler quelques résultats.

La distance $\varrho(A, B)$ entre deux points A et B , définie comme borne inférieure de la longueur des arcs de courbe rectifiables joignant A et B , possède les trois propriétés caractéristiques de la „distance“ dans les espaces métriques.

$$a) \quad \varrho(A, B) = \varrho(B, A) ,$$

$$b) \quad \varrho(A, A) = 0 , \quad \varrho(A, B) > 0 \quad \text{si} \quad A \neq B ,$$

$$c) \quad \varrho(A, B) + \varrho(B, C) \geq \varrho(A, C) .$$

Soit une suite de points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ tendant (au sens euclidien) vers un point limite P . On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(P, P_n) = 0$, ce qui signifie que les

notions de voisinage, c'est-à-dire de suite convergente de points, au sens euclidien et au sens de la nouvelle métrique sont équivalentes.

Nous voulons encore remarquer que si $P_n \rightarrow P$ et $Q_n \rightarrow Q$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(P_n, Q_n) = \varrho(P, Q)$, ce qui signifie que la distance entre deux points (au sens de Riemann) est une fonction continue de ces deux points.

4.3. La condition 2) du n° 4.1 est équivalente aux conditions suivantes:

2') *Sur toute ligne géodésique, on peut reporter, à partir d'un point fixe et de chaque côté, une longueur quelconque (au sens de la métrique de Riemann).*

2'') *Tout ensemble infini borné de points (au sens de la métrique de Riemann) admet au moins un point d'accumulation.*

Cette dernière montre qu'un plan de Riemann est un espace de Riemann *normal* au sens de M. E. Cartan¹²⁾. Elle permet aussi d'affirmer que les notions de suite divergente de points au sens euclidien et au sens de la métrique de Riemann sont équivalentes; la distance à un point fixe tend dans les deux métriques vers l'infini. Les notions d'ensemble borné sont aussi équivalentes dans les deux métriques. Nous emploierons à plusieurs reprises le lemme suivant: *Si l'ensemble des points situés sur une suite de courbes simplement fermées est borné, l'ensemble des points situés à l'intérieur de ces courbes est aussi borné.*

Sa démonstration peut consister à en remarquer l'évidence en géométrie euclidienne.

5. Arc minimum

5.1. Nous appelons un arc joignant deux points donnés A et B et ayant la longueur $\varrho(A, B)$ un *arc minimum* entre les deux points.

Dans un plan de Riemann, entre deux points quelconques, il existe au moins un arc minimum. C'est un arc géodésique.

Ce théorème est démontré dans [2], p. 216, pour toute surface complète.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc géodésique entre deux points A et B dont nous désignons la longueur par $L(A, B)$ soit un arc minimum est que la formule $L(A, B) = \varrho(A, B)$ soit vérifiée.

5.2. Dorénavant, et durant toute la première partie de ce travail, nous désignerons par \mathfrak{F} une courbe analytique, régulière, simplement fermée. Nous rappelons qu'une courbe donnée sous forme paramétrique par les deux équations

$$x = x(t) \quad \text{et} \quad y = y(t)$$

¹²⁾ Voir note 1).

est analytique en un point P si pour la valeur t_0 correspondant à P les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont analytiques, c'est-à-dire développables en séries entières de $t - t_0$. Nous dirons que la courbe est régulière en P si l'une des deux coordonnées est une fonction analytique de l'autre, c'est-à-dire si l'on peut exprimer l'une des deux différences $x - x_0$ et $y - y_0$ comme série entière de l'autre. C'est toujours le cas si l'une des deux quantités $\frac{dy(t_0)}{dt}$ et $\frac{dx(t_0)}{dt}$ n'est pas nulle. Une courbe est analytique régulière si elle est analytique régulière en chacun de ses points.

Si la courbe est donnée implicitement par une équation $f(x, y) = 0$ il suffit, grâce au théorème de Weierstrass sur les fonctions implicites, pour qu'elle soit analytique régulière en un point de coordonnées x_0, y_0 que les trois conditions suivantes soient satisfaites.

- 1) $f(x, y)$ est une fonction analytique de x, y en x_0, y_0 ,
- 2) $f(x_0, y_0) = 0$,
- 3) $f_x(x_0, y_0)$ et $f_y(x_0, y_0)$ ne sont pas tous les deux nuls.

On sait que la courbe simplement fermée \mathfrak{F} divise le plan en deux régions, l'intérieur de \mathfrak{F} et l'extérieur. Soit $L(\mathfrak{F})$ la longueur de \mathfrak{F} . Nous choisissons comme paramètre sur \mathfrak{F} la longueur d'arc q , comptée positivement à partir d'un point fixe de \mathfrak{F} de manière à laisser l'intérieur de \mathfrak{F} à gauche. Il suffit de considérer q variant de 0 à $L(\mathfrak{F})$.

5. 3. Nous appelons *distance du point P à la courbe \mathfrak{F}* la borne inférieure de la longueur des arcs de courbe rectifiables joignant P et un point quelconque Q de \mathfrak{F} , et nous la désignons par $\varrho(P, \mathfrak{F})$.

5. 4. Nous appelons un arc joignant P et un point Q_0 de \mathfrak{F} et ayant la longueur $\varrho(P, \mathfrak{F})$ un *arc minimum entre la courbe \mathfrak{F} et le point P* . Dans la suite, nous dirons simplement arc minimum lorsqu'il ne peut y avoir de confusion avec l'arc minimum entre deux points.

Dans un plan de Riemann, entre une courbe \mathfrak{F} et un point P non situé sur la courbe, il existe au moins un arc minimum. Cet arc joint P et un point Q_0 de \mathfrak{F} . C'est aussi un arc minimum entre ces deux points.

Il est clair que

$$\varrho(P, \mathfrak{F}) = \text{borne inf. } \varrho(P, Q),$$

si nous désignons par Q un point quelconque de \mathfrak{F} . Nous pouvons affirmer grâce au n^o 4. 2 que $\varrho(P, Q)$ est une fonction continue de q . Elle prend son minimum pour une certaine valeur q_0 par exemple, correspondant à un point Q_0 de \mathfrak{F} . On a donc $\varrho(P, \mathfrak{F}) = \varrho(P, Q_0)$. D'après le n^o 5. 1, il existe un arc minimum entre P et Q_0 . Il a la longueur $\varrho(P, Q_0)$ égale à $\varrho(P, \mathfrak{F})$. C'est donc un arc minimum entre \mathfrak{F} et P .

5. 5. *Un arc minimum entre un point P et une courbe \mathfrak{F} est situé sur une ligne géodésique normale à \mathfrak{F} . Il est entièrement compris dans la région du plan de Riemann où se trouve P .*

Un arc minimum entre P et \mathfrak{F} est un arc géodésique, puisque c'est un arc minimum entre deux points. Il est évident qu'il n'a avec \mathfrak{F} aucun point commun autre que son extrémité Q_0 et qu'il est par conséquent entièrement situé soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de \mathfrak{F} . L'orthogonalité de l'arc minimum et de la courbe \mathfrak{F} en Q_0 se démontre facilement. On prend sur l'arc minimum un point P' suffisamment près de Q_0 ; si cet arc ne formait pas en Q_0 un angle droit avec \mathfrak{F} , on pourrait le remplacer par un arc plus court comme on peut le constater à l'aide de [1], deuxième partie, p. 416.

5. 6. D'un point Q_0 de \mathfrak{F} ne peut partir qu'un arc minimum entre P et \mathfrak{F} . Car un arc minimum est un arc de géodésique normal à \mathfrak{F} en Q_0 et par un point, dans une direction, ne passe qu'une ligne géodésique. Par contre, il peut y avoir plusieurs points Q_0, Q_1, \dots , sur \mathfrak{F} d'où partent un arc minimum entre P et \mathfrak{F} . Nous montrerons toutefois au n° 8. 12 qu'il n'y en a en général qu'un nombre fini.

5. 7. *Soit \mathfrak{A} un arc minimum entre le point P et la courbe \mathfrak{F} et soit P' un point situé sur l'arc \mathfrak{A} . L'arc \mathfrak{A}' situé sur \mathfrak{A} entre P' et \mathfrak{F} est un arc minimum.*

Nous renonçons à donner la démonstration de cette proposition d'ailleurs évidente.

5. 8. *Deux arcs minimum issus de deux points différents de \mathfrak{F} ne peuvent avoir d'autre point commun que leur extrémité.*

Il suffit de montrer que si deux arcs minimum \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' partent de deux points différents Q_0 et Q' et aboutissent au même point P , aucun d'eux ne peut faire partie d'un arc minimum plus grand.

Nous remarquons tout d'abord que les deux arcs \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' doivent avoir la même longueur. Si l'un des arcs faisait partie d'un arc minimum plus grand, par exemple si l'arc \mathfrak{A} était situé sur un arc minimum \mathfrak{B} , l'autre arc \mathfrak{A}' serait aussi situé sur un arc minimum plus grand \mathfrak{B}' , formé de \mathfrak{A}' et de la partie de \mathfrak{B} qui ne contient pas \mathfrak{A} . L'un au moins des deux arcs \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' ferait un angle en P , car les deux arcs géodésiques différents \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' ne peuvent avoir la même direction en P . Or un arc géodésique ne peut pas faire d'angle.

5. 9. *L'arc limite d'une suite d'arcs minimum est un arc minimum.*

Soit une suite d'arcs minimum $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \dots$ joignant les points P_1 et Q_1, P_2 et Q_2, \dots, P_n et Q_n, \dots tendant vers un arc limite \mathfrak{A} dont les extrémités sont P et Q . Pour chacun des arcs minimums, on a $L(\mathfrak{A}_n) = \varrho(P_n, Q_n)$. Un théorème classique sur les lignes géodésiques nous apprend que $\lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathfrak{A}_n) = L(\mathfrak{A})$; le n° 4. 2 entraîne d'autre part $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(P_n, Q_n) = \varrho(P, Q)$. D'où $L(\mathfrak{A}) = \varrho(P, Q)$, relation qui nous montre que l'arc limite \mathfrak{A} est aussi un arc minimum.

6. Coordonnées géodésiques

6. 1. Etant donnée une courbe \mathfrak{F} , nous prenons, comme au n° 5. 2 la longueur d'arc q comme paramètre.

En chaque point de \mathfrak{F} nous menons la géodésique normale et nous portons sur elle la longueur p , positive sur la partie de la géodésique qui se dirige vers l'extérieur de \mathfrak{F} , négative sur la partie de la géodésique qui se dirige vers l'intérieur de \mathfrak{F} . En tenant compte de la condition 2') du n° 4. 3, on peut affirmer qu'à tout couple de valeurs (p, q) correspond un point du plan de Riemann. En général, à un point du plan de Riemann peuvent correspondre plusieurs couples de valeurs $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \dots$. Toutefois un théorème connu permet d'affirmer qu'il existe un nombre positif p^* tel que, si un point P_0 correspond à un couple de valeurs (p_0, q_0) où $|p_0| < p^*$, ce couple de valeurs soit le seul pour lequel $|p| < p^*$. Ces points se trouvent dans le voisinage de la courbe, où p et q constituent un système de coordonnées sans singularités. Entre P_0 et la courbe \mathfrak{F} n'existe qu'un arc de géodésique plus petit que p^* ; c'est nécessairement le seul arc minimum entre P_0 et \mathfrak{F} .

6. 2. On sait¹³⁾ que l'élément linéaire peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = dp^2 + f^2(p, q) dq^2$$

où la fonction $f(p, q)$ est une fonction analytique réelle, en tout cas pour de petites valeurs de p et a les propriétés suivantes :

- a) $f(0, q) = 1$
- b) $f_p(0, q) = k(q)$
- c) $f(p, q) = f(p, q + L(\mathfrak{F}))$

où $k(q)$ représente la courbure géodésique de la courbe.

La fonction $f(p, q)$ satisfait encore à l'équation différentielle

$$d) f_{pp}(p, q) + K(p, q) \cdot f(p, q) = 0$$

où $K(p, q)$ représente la courbure totale de Gauss du plan de Riemann.

¹³⁾ Voir p. ex. [1], deuxième partie, p. 412 et suivantes.

6. 3. La fonction $f(p, q)$ est prolongeable analytiquement pour tout p et pour tout q . Il en est de même pour la fonction $K(p, q) = \frac{-f_{pp}(p, q)}{f(p, q)}$.

Nous entendons par là que dans le voisinage de tout couple de valeurs réelles (p_0, q_0) , $f(p, q)$ et $K(p, q)$ sont des fonctions développables en série entière de $p - p_0$ et de $q - q_0$. La démonstration est basée sur le théorème suivant, relatif aux familles de lignes géodésiques :

6. 4. L'extrémité d'un arc géodésique dépend analytiquement du point initial, de la direction initiale et de la longueur de l'arc géodésique.

Ce théorème signifie dans notre cas particulier que les deux fonctions

$$x = x(p, q) \quad \text{et} \quad y = y(p, q),$$

qui donnent la correspondance entre les coordonnées géodésiques et les coordonnées cartésiennes, sont des fonctions analytiques de p et q pour tout p et pour tout q . Ces fonctions satisfont au système d'équations suivant obtenu en identifiant les deux formes de l'élément linéaire :

1. $E(x, y) \cdot x_p^2(p, q) + 2F(x, y) \cdot x_p(p, q) \cdot y_p(p, q) + G(x, y) \cdot y_p^2(p, q) = 1$
2. $E(x, y) \cdot x_p(p, q) \cdot x_q(p, q) + F(x, y) \cdot (x_p(p, q) \cdot y_q(p, q) + x_q(p, q) \cdot y_p(p, q)) + G(x, y) \cdot y_p(p, q) \cdot y_q(p, q) = 0$
3. $E(x, y) \cdot x_q^2(p, q) + 2F(x, y) \cdot x_q(p, q) \cdot y_q(p, q) + G(x, y) \cdot y_q^2(p, q) = f^2(p, q)$.

6. 5. Pour démontrer le n^o 6. 3, il suffit de vérifier par un calcul élémentaire la formule

$$f(p, q) = \sqrt{E(x, y) \cdot G(x, y) - F^2(x, y)} (x_p(p, q) \cdot y_q(p, q) - x_q(p, q) \cdot y_p(p, q))$$

exprimant la transformation de l'élément de surface et valable tout d'abord pour de petites valeurs de p , et de constater que le membre de droite est une fonction analytique pour tout p et pour tout q , l'expression $EG - F^2$ étant une fonction analytique positive de x et de y , donc de p et de q . Quant à la courbure, le „theorema egregium“ de Gauss nous apprend que c'est une fonction analytique de x et de y , donc aussi de p et de q .

6. 6. Puisque les fonctions $x = x(p, q)$ et $y = y(p, q)$ sont développables en série entière, il en est de même pour les fonctions inverses $p = p(x, y)$ et $q = q(x, y)$, à moins que le déterminant fonctionnel ne soit nul. Donc si $x_p(p, q) \cdot y_q(p, q) - x_q(p, q) \cdot y_p(p, q) \neq 0$ les fonctions inverses

$p(x, y)$ et $q(x, y)$ sont analytiques dans le voisinage des valeurs considérées; la formule du n^o 6. 5 nous montre que ceci a lieu partout où $f(p, q) \neq 0$.

6. 7. Pour examiner plus commodément la fonction $f(p, q)$ et certaines propriétés des lignes géodésiques normales à \mathfrak{F} , nous allons considérer p et q comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires dans un plan auxiliaire. La courbe \mathfrak{F} correspond à l'axe des q . La correspondance est biunivoque si l'on ne considère que le segment $0 \leq q \leq L(\mathfrak{F})$ dont on identifie les extrémités. Les lignes géodésiques normales à la courbe correspondent aux droites parallèles à l'axe des p et leur équation est $q = q_0$. Il nous suffit à cause de la périodicité de considérer la bande comprise entre les droites $q = 0$ et $q = L(\mathfrak{F})$, ces deux droites étant à identifier puisqu'elles représentent la même ligne géodésique. Ce domaine va jouer un rôle important dans la suite de nos développements comme image du plan de Riemann et nous voulons le désigner par \mathfrak{D} . Il est clair qu'à un point de \mathfrak{D} correspond un seul point du plan de Riemann. Les n^{os} 5. 4 et 5. 5, qui nous apprennent que tout point du plan de Riemann est situé au moins sur une ligne géodésique normale à \mathfrak{F} , nous montrent qu'à un point du plan de Riemann correspond au moins un point de \mathfrak{D} . Nous ne saurions cependant affirmer que la correspondance soit en général biunivoque. Pour qu'elle le devienne, il nous faudra éventuellement restreindre le domaine \mathfrak{D} .

Nous voulons remarquer que toute suite de points correspondants aux points d'une suite divergente dans le plan de Riemann est évidemment divergente dans le domaine \mathfrak{D} . La réciproque n'est pas vraie en général.

La fonction $f(p, q)$ est analytique dans tout le plan p, q , donc en particulier dans le domaine \mathfrak{D} .

7. Lieu des foyers

7. 1. Lorsque l'on considère la famille des lignes géodésiques normales à une courbe \mathfrak{F} , on appelle foyer sur une ligne géodésique le point où cette ligne géodésique cesse de fournir un minimum de la longueur par rapport aux courbes voisines.

On sait que le foyer sur une géodésique $q = q_0$ est donné dans notre système de coordonnées géodésiques par la première valeur de p qui annule $f(p, q_0)$. Nous désignons par $P(q_0)$ la première valeur positive de p et par $N(q_0)$ la première valeur négative de p qui annulent $f(p, q_0)$. Si pour p positif $f(p, q_0)$ est toujours positif, nous attribuerons à $P(q_0)$ la valeur ∞ . Si pour p négatif, $f(p, q_0)$ est toujours positif, nous attribuerons à $N(q_0)$

la valeur $-\infty$. Dans les quelques pages qui vont suivre, nous nous bornons à donner les démonstrations pour l'une des deux fonctions $P(q)$ et $N(q)$ qui se comportent exactement de la même façon.

7. 2. Les fonctions $p = P(q)$ et $p = N(q)$ sont des fonctions analytiques de q .

Nous entendons par là que si $p_0 = P(q_0)$ n'est pas infini, la fonction $P(q)$ est développable en série entière de $q - q_0$ {idem pour $N(q)$ }.

La démonstration consiste à appliquer le théorème sur les fonctions implicites cité au n° 5. 2. En effet

1) $f(p, q)$ est une fonction analytique de p et q d'après le n° 6. 3.

2) $f(p_0, q_0) = 0$.

3) $f_p(p_0, q_0) \neq 0$; c'est une conséquence de l'équation $f_{pp} + K \cdot f = 0$ à laquelle doit satisfaire la fonction $f(p, q)$ suivant le n° 6. 2. Si $f(p_0, q_0)$ et $f_p(p_0, q_0)$ étaient tous deux nuls, $f(p, q)$ serait identiquement nul pour tout p , ce qui est impossible, puisque $f(0, q_0) = 1$.

7. 3. Nous venons de voir que la fonction $p = P(q)$ est analytique, donc continue, pour toute valeur q_0 où $P(q_0)$ n'est pas infini. Nous voulons démontrer qu'il en est de même si $P(q_0)$ est infini, autrement dit pour toute suite $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n) = q_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(q_n)$ existe et est égale à $P(q_0)$ {idem pour $N(q)$ }.

Si $P(q_0)$ est fini, le lemme est déjà démontré. Il suffit de démontrer que, si $P(q_0)$ est infini, $P(q_n)$ tend vers l'infini. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite partielle $P(q_{n'})$ tendant vers $p' \neq \infty$. Or

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} q_{n'} = q_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} P(q_{n'}) = p' ,$$

d'autre part $f(P(q_{n'}), q_{n'}) = 0$ d'où l'on tire que $f(p', q_0) = 0$ puisque $f(p, q)$ est une fonction continue. Il existerait donc une valeur p' annulant $f(p, q_0)$, contrairement à l'hypothèse que $P(q_0)$ est infini.

7. 4. S'il existe une suite infinie de valeurs $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q_0$ et que $\frac{dN(q_n)}{dq} = 0$,

on a, ou bien $N(q) = p_0$ pour tout q ,

ou bien $\lim_{n \rightarrow \infty} N(q_n) = -\infty$.

{Pour $P(q)$ la première possibilité est exclue, car il existe toujours,

d'après les n^{os} 8.1 et 8.4 une valeur au moins de q pour laquelle $P(q)$ est infini; si les hypothèses sont satisfaites, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} P(q_n) = \infty$ } .

Nous savons que $\lim_{n \rightarrow \infty} N(q_n) = p_0$.

Ou bien $p_0 = -\infty$, auquel cas la proposition est démontrée; ou bien p_0 est fini; dans ce cas, pour $q = q_0$ la fonction $\frac{dN(q)}{dq}$ est analytique en même temps que $N(q)$. Comme elle a une infinité de zéros autour de q_0 , elle est identiquement nulle et $N(q)$ est une constante

$$N(q) \equiv p_0$$

On montre facilement dans ce cas que le lieu des foyers se réduit à un point.

7. 5. Nous ferons à plusieurs reprises usage de la proposition suivante :

Soit $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ une suite de points tendant vers un point limite P_0 .

Soient (p_n, q_n) et (p'_n, q'_n) deux couples différents de valeurs correspondant au point P_n pour chaque n .

$$\text{Soient} \quad p_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n, \quad q_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n;$$

$$p'_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} p'_n, \quad q'_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} q'_n.$$

Si $p_0 = p'_0$ et $q_0 = q'_0$ le point P_0 est un foyer sur la géodésique $q = q_0$.

En effet, les fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$ ne sont pas uniformes dans le voisinage du point $P_0(x_0, y_0)$; elles ne sont donc pas analytiques, ce qui ne peut avoir lieu, d'après le n^o 6. 6, que si $f(p_0, q_0) = 0$, c'est-à-dire si P_0 est un foyer sur la géodésique $q = q_0$,

7. 6. *Les points singuliers du lieu des foyers sont ceux où $\frac{dP(q)}{dq} = 0$ ou $\frac{dN(q)}{dq} = 0$.*

Considérons les équations différentielles du n^o 6. 4 auxquelles doivent satisfaire les fonctions $x(p, q)$ et $y(p, q)$ qui donnent la relation entre les deux systèmes de coordonnées.

Dans le domaine \mathfrak{D} le lieu des foyers, solution de l'équation $f(p, q) = 0$, est donné par la fonction analytique $p = P(q)$ { ou par $p = N(q)$, pour laquelle la démonstration serait analogue }.

Dans le plan de Riemann, le lieu des foyers est donné alors sous forme paramétrique par

$$\begin{aligned}x &= X(q) = x(P(q), q), \\y &= Y(q) = y(P(q), q).\end{aligned}$$

En tenant compte de $x_q = y_q = 0$ qu'on tire de l'équation 3) du n° 6. 4, on trouve pour les deux dérivées

$$\begin{aligned}\frac{dX(q)}{dq} &= x_p(p, q) \frac{dP(q)}{dq} \\ \frac{dY(q)}{dq} &= y_p(p, q) \frac{dP(q)}{dq},\end{aligned}$$

$x_p(p, q)$ et $y_p(p, q)$ ne pouvant être tous les deux nuls à cause de l'équation 1) du n° 6. 4, les dérivées $\frac{dX(q)}{dq}$ et $\frac{dY(q)}{dq}$ sont en général différentes de 0, à moins que $\frac{dP(q)}{dq}$ soit nul. Nous en concluons que le lieu des foyers est, dans le plan de Riemann, une courbe analytique régulière, sauf si $\frac{dP(q)}{dq} = 0$, valeurs qui correspondent bien aux points singuliers de la courbe, en particulier aux points de rebroussement.

7. 7. Nous appelons \mathfrak{D}_1 la partie du domaine \mathfrak{D} définie par les inégalités suivantes

$$\begin{aligned}0 &\leq q \leq L(\mathfrak{F}), \\ N(q) &\leq p \leq P(q).\end{aligned}$$

Une conséquence directe de la définition de $N(q)$ et de $P(q)$ est que la fonction $f(p, q)$ est positive dans tout le domaine \mathfrak{D}_1 , sauf sur la frontière où elle est nulle. Il est facile de montrer qu'à chaque point du plan de Riemann correspond au moins un point du domaine \mathfrak{D}_1 , mais nous verrons au n° 8. 4 que pour avoir entre les deux une correspondance biunivoque, on doit en général restreindre encore le domaine \mathfrak{D}_1 .

8. Points extrêmes

8. 1. Comme au n° 6. 1, nous considérons la famille des lignes géodésiques normales à \mathfrak{F} . Soit \mathfrak{G} une ligne géodésique normale à \mathfrak{F} en un point Q . Aux coordonnées géodésiques p et q correspond un point P du plan de Riemann.

Prenons par exemple le cas où p est positif. Pour de petites valeurs de p , nous savons que l'arc de \mathfrak{G} entre P et Q est un arc minimum et que

c'est le seul. Ce n'est plus vrai en général pour de grandes valeurs de p . Dans ce cas, grâce au n° 5. 7, on peut affirmer qu'il existe sur \mathfrak{G} un point \bar{P} tel que à tout point situé sur \mathfrak{G} avant \bar{P} corresponde un arc minimum situé sur \mathfrak{G} et qu'à tout point situé sur \mathfrak{G} après \bar{P} ne corresponde pas d'arc minimum situé sur \mathfrak{G} . Nous appelons \bar{P} un point extrême et tout arc minimum aboutissant en \bar{P} un arc extrême. Nous désignons par $\bar{P}(q)$ la longueur de l'arc extrême partant de Q . Si tous les arcs partant de Q et situés sur \mathfrak{G} sont des arcs minimum, nous attribuerons naturellement à $\bar{P}(q)$ la valeur ∞ .

En prenant p négatif, on aurait pu faire les mêmes remarques. Nous désignons par $\bar{N}(q)$ la longueur négativement comptée de l'arc extrême situé sur la partie de la géodésique qui se dirige vers l'intérieur \mathfrak{F} . Il est facile de voir — en s'appuyant sur les n°s 4. 3 et 5. 4 — que $\bar{P}(q)$ ne peut pas être une fonction bornée supérieurement et que $\bar{N}(q)$ est une fonction bornée inférieurement dont nous désignerons dans la suite par \bar{p} le minimum. Cette constante négative correspond à l'arc minimum le plus long contenu à l'intérieur de \mathfrak{F} .

8. 2. Nous avons vu au n° 5. 8. que, si plusieurs arcs minimum aboutissent au même point P , ils ne peuvent pas faire partie d'arcs minimum plus grands, P est donc un point extrême et chacun des arcs minimum qui y aboutissent est un arc extrême. D'autre part, si un point situé sur un arc minimum est un foyer sur cet arc, c'est un point extrême; ceci est une conséquence de la condition de Jacobi qui prétend qu'un arc géodésique perd au plus tard sa propriété d'arc minimum au premier foyer. Nous allons démontrer réciproquement que

Tout point extrême est soit un foyer, soit un point où aboutissent au moins deux arcs minimum. Ces deux possibilités ne s'excluent pas.

Au point extrême considéré P aboutit au moins un arc minimum issu d'un point Q de la courbe \mathfrak{F} . Prolongeons-le au delà du point P et considérons sur ce prolongement une suite de points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ tendant vers P . Pour chaque P_n , il existe au moins un arc minimum issu d'un point Q_n différent de Q . Les points Q_n ont au moins un point d'accumulation \bar{Q} . L'arc géodésique partant de \bar{Q} et aboutissant en P est minimum, suivant le n° 5. 9. Si \bar{Q} est différent de Q , par P passent deux arcs minimum; si \bar{Q} coïncide avec Q , le n° 7. 5 montre que P est un foyer sur l'arc issu de Q . La proposition est démontrée.

8. 3. Nous appelons \mathfrak{D}_2 la partie du domaine \mathfrak{D} (n° 6. 7) définie par les inégalités

$$0 \leq q \leq L(\mathfrak{F}),$$

$$\overline{N}(q) \leq p \leq \overline{P}(q)$$

si $\overline{P}(q)$ est infini, cette relation est à remplacer par $\overline{N}(q) \leq p < \infty$.

La condition de Jacobi déjà citée nous permet d'écrire deux formules qui montrent que le domaine \mathfrak{D}_2 est entièrement compris dans le domaine \mathfrak{D}_1 , défini au n^o 7. 7.

$$0 < \overline{P}(q) \leq P(q),$$

$$0 > \overline{N}(q) \geq N(q).$$

A un arc minimum du plan de Riemann correspond un segment de droite perpendiculaire à l'axe des q . La longueur de ce segment est égale à la longueur de l'arc minimum. Nous constatons donc qu'à l'aide des arcs minimum, nous pouvons établir une correspondance presque biunivoque entre les points du plan de Riemann et ceux du domaine \mathfrak{D}_2 , qui joue donc un rôle fondamental dans la représentation d'un plan de Riemann à l'aide des lignes géodésiques :

1) A tout point de \mathfrak{D}_2 correspond un et un seul point du plan de Riemann.

2) A tout point du plan de Riemann correspond soit un seul point de l'intérieur de \mathfrak{D}_2 , soit un ou plusieurs points de la frontière de \mathfrak{D}_2 si le point considéré est un point extrême; dans ce dernier cas tous les points images d'un même point du plan de Riemann sont à la même distance de l'axe des q .

La proposition suivante est une conséquence immédiate du n^o 4. 3.

Une suite de points divergente dans le plan de Riemann est divergente dans le domaine \mathfrak{D}_2 et réciproquement.

8. 4. Nous pouvons affirmer que les inégalités

$$\overline{P}(q) < P(q),$$

et

$$\overline{N}(q) > N(q),$$

ont presque toujours lieu en remarquant, comme Jacobi l'a fait pour des surfaces ordinaires¹⁴⁾ qu'un arc géodésique perd en général sa propriété d'arc minimum avant le premier foyer. La même démonstration peut être faite en toute rigueur dans le domaine \mathfrak{D} . Il ne peut éventuellement y avoir exception que si $\frac{dP(q)}{dq} = 0$ } ou $\frac{dN(q)}{dq} = 0$ } . L'égalité entre

¹⁴⁾ Voir p. ex. [1], troisième partie, p. 87.

$P(q)$ et $\bar{P}(q)$ est en effet possible en ces points qui correspondent, d'après le n° 7. 6, aux points singuliers du lieu des foyers.

8. 5. La méthode du présent travail exige que nous considérions d'un peu plus près les points extrêmes et que nous montrions que certains cas particuliers, nuisibles à nos démonstrations, ne sont pas trop nombreux; ces considérations vont nous occuper jusqu'à la fin du n° 8. Commençons par quelques définitions:

Un arc extrême est dit *afocal* si son extrémité n'est pas un foyer sur cet arc.

Un arc extrême est dit *focal* si son extrémité est un foyer. Il est caractérisé par les deux relations $\bar{P}(q_0) = P(q_0)$ et $\frac{dP(q_0)}{dq} = 0$ {idem pour $N(q)$ }.

Un point extrême est dit *normal* si en ce point aboutissent deux arcs extrêmes afocaux et ces deux arcs extrêmes seulement.

Tout autre point extrême est dit *anormal*.

Un point extrême anormal est dit *focal* si en ce point aboutit un arc extrême focal.

Il est évident qu'un point extrême anormal est soit un point extrême focal, soit un point où aboutissent plus de deux arcs extrêmes afocaux. Ces deux possibilités ne s'excluent pas.

8. 6. Nous nous proposons tout d'abord de démontrer une proposition importante.

Lemme 1. *Les fonctions $\bar{P}(q)$ et $\bar{N}(q)$ sont continues, pour toute valeur de q .*

Contentons-nous de présenter la démonstration pour $\bar{P}(q)$. Nous considérons une suite de valeurs $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ tendant vers une valeur quelconque q_0 . Soient $\bar{P}(q_1), \bar{P}(q_2), \dots, \bar{P}(q_n) \dots$ et $\bar{P}(q_0)$ les longueurs des arcs extrêmes correspondants. La proposition énoncée revient à démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{P}(q_n) = \bar{P}(q_0) .$$

Comme $\bar{P}(q)$ est une fonction positive, $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{P}(q_n)$ existe certainement.

Si la suite des $\bar{P}(q_n)$ est bornée supérieurement $\overline{\lim} \bar{P}(q_n)$ existe aussi. Dans ce cas les deux relations suivantes entraînent la continuité de $\bar{P}(q)$:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bar{P}(q_n) \leq \bar{P}(q_0)$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \bar{P}(q_n) = \bar{P}(q_0) .$$

La première est une conséquence immédiate du n° 5. 9. La seconde s'en déduit de la façon suivante : Dans la suite des arcs extrêmes considérés, nous choisissons une suite partielle telle que la limite de la longueur des arcs soit égale à la limite inférieure de la longueur des arcs de la suite donnée. D'après les nos 8. 4 et 7. 4, il ne peut exister une infinité d'arcs extrêmes focaux bornés ; de la suite donnée nous pouvons donc extraire une suite partielle infinie $q'_1, q'_2, \dots, q'_n, \dots$ tendant vers q_0 et telle qu'à chacun des q'_n corresponde un arc extrême afocal ; soit P_n le point extrême de cet arc et q''_n la valeur du paramètre correspondant à un des autres arcs extrêmes aboutissant en P_n — il en existe au moins encore un, puisque l'arc correspondant à q'_n est afocal.

La suite $q''_1, q''_2, \dots, q''_n, \dots$ possède au moins une limite q''_0 . Si $q_0 = q''_0$ l'arc limite est, d'après le n° 7. 5, un arc extrême focal. Si $q_0 \neq q''_0$ il existe deux arcs minimum aboutissant au même point (n° 5. 9). Ce sont tous les deux des arcs extrêmes (n° 8. 2). Dans les deux cas, l'arc extrême correspondant à q_0 est égal à $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{P}(q_n)$, ce qui démontre la seconde formule.

Si la suite des $\overline{P}(q_n)$ n'est pas bornée, le n° 5. 9 nous permet de conclure d'une manière analogue qu'il existe des arcs minimum arbitrairement grands sur la ligne géodésique correspondant à q_0 , ce qui montre que $\overline{P}(q_0) = \infty$.

8. 7. Nous avons déjà usé du fait qu'il n'existe pas de suite infinie convergente d'arcs extrêmes focaux. La démonstration précédente nous apprend en particulier que l'arc limite d'une suite convergente d'arcs extrêmes est un arc extrême. On en déduit facilement à l'aide des nos 5. 9 et 7. 5 que le point limite d'une suite infinie convergente de points extrêmes anormaux serait anormal (en réalité nous démontrerons au n° 8. 16 qu'une pareille suite ne saurait exister). Cette remarque nous permet toutefois d'affirmer qu'on peut trouver autour de tout point extrême normal un voisinage ne contenant aucun point anormal.

Nous pouvons même énoncer le

Lemme 2. *Dans le voisinage d'un point extrême normal P , le lieu des points extrêmes est une courbe analytique régulière, bissectrice de l'angle formé par les deux arcs extrêmes aboutissant en P .*

Nous allons démontrer en même temps le

Lemme 2'. *Si l'arc extrême correspondant à une valeur q_0 aboutit en un point extrême normal, la fonction $\overline{P}(q)$ {ou $\overline{N}(q)$ } est analytique dans le voisinage de q_0 .*

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point P et soient q_0, q'_0 les deux valeurs

de q correspondant aux deux arcs extrêmes $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q'_0)$, aboutissant en P . Nous désignons par p_0 la longueur de ces deux arcs.

Des considérations analogues à celles qui précèdent l'énoncé du lemme 2 permettent d'affirmer que les points extrêmes voisins de P ne peuvent provenir que de l'intersection de deux arcs géodésiques de longueur égale, appartenant l'un au champ dans lequel est plongé l'arc $\mathfrak{A}(q_0)$, l'autre au champ dans lequel est plongé l'arc $\mathfrak{A}(q'_0)$. Sur une surface ordinaire, Darboux ([1], deuxième partie, p. 418) a montré que ce lieu est une courbe bissectrice de l'angle formé en P par les deux arcs $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q'_0)$. C'est le même résultat dont nous voulons indiquer la démonstration rigoureuse pour nos surfaces abstraites, en appliquant la même idée.

Nous avons désigné au n° 6. 4 par

$$x = x(p, q) \quad \text{et} \quad y = y(p, q)$$

les fonctions établissant la correspondance entre le système de coordonnées géodésiques et les coordonnées cartésiennes du plan de Riemann. Elles sont analytiques. Nous désignons les fonctions inverses dans le voisinage des valeurs p_0, q_0 par

$$p = p(x, y) \quad \text{et} \quad q = q(x, y) ,$$

et les fonctions inverses dans le voisinage de p_0, q'_0 par

$$p = p'(x, y) \quad \text{et} \quad q = q'(x, y) .$$

Le n° 6. 6 nous apprend que ces quatre fonctions sont analytiques dans le voisinage de x_0, y_0 , puisque par hypothèse aucun des deux arcs $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q'_0)$ n'est focal.

Les points extrêmes voisins de P sont alors donnés par l'équation

$$p(x, y) = p'(x, y) .$$

Pour démontrer que cette équation détermine une courbe analytique régulière, il suffit, grâce au théorème connu sur les fonctions implicites de démontrer que $p_x(x_0, y_0) - p'_x(x_0, y_0)$ et $p_y(x_0, y_0) - p'_y(x_0, y_0)$ ne sont pas tous les deux nuls.

Or, si l'on avait $p_x(x_0, y_0) = p'_x(x_0, y_0)$ et $p_y(x_0, y_0) = p'_y(x_0, y_0)$ il s'en suivrait que les deux courbes déterminées par les équations $p(x, y) = p_0$ et $p'(x, y) = p_0$, seraient tangentes en P . Comme nos coordonnées géodésiques sont orthogonales, il s'en suivrait que les deux arcs géodésiques $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q'_0)$ seraient tangents entre eux, ce qui est impossible, puisque par un point dans une direction ne passe qu'une ligne géodésique.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer que cette courbe est bissectrice de l'angle formé en P par $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q'_0)$. Prenons sur elle comme paramètre la longueur d'arc s comptée à partir de P et désignons par ϑ_0 l'angle que fait l'arc $\mathfrak{A}(q_0)$ avec la partie de la courbe où s est positif.

Soient

$$x = a(s) \quad \text{et} \quad y = b(s)$$

les équations paramétriques du lieu des points extrêmes. Nous savons d'après ce qui précède que $a(s)$ et $b(s)$ sont des fonctions analytiques. Il en est évidemment de même pour les fonctions $p = p(x(s), y(s)) = A(s)$ et $q = q(x(s), y(s)) = B(s)$ qui sont les équations paramétriques du lieu des points extrêmes dans notre système de coordonnées géodésiques p, q dans le voisinage de l'arc $\mathfrak{A}(q_0)$.

La formule bien connue qui permet de calculer le cosinus de l'angle de deux courbes à partir de la forme quadratique exprimant la métrique, nous donne

$$\cos \vartheta_0 = \frac{dA(0)}{ds} .$$

En désignant d'une façon analogue par $A'(s)$ la fonction $p'(a(s), b(s))$ dans le voisinage de l'arc $\mathfrak{A}(q')$, et par ϑ'_0 l'angle que fait cet arc avec le lieu des points extrêmes, on a

$$\cos \vartheta'_0 = \frac{dA'(0)}{ds} .$$

De l'équation définissant le lieu des points extrêmes, on tire $A(s) \equiv A'(s)$, d'où il s'ensuit naturellement que

$$\vartheta_0 = \vartheta'_0 ,$$

ce que nous voulions démontrer.

Pour démontrer le lemme 2', il suffit d'établir, par un calcul élémentaire à partir de la formule du cosinus, la formule suivante

$$\sin \vartheta_0 = \pm f(A(0), B(0)) \frac{dB(0)}{ds} .$$

Comme ϑ_0 ne saurait être nul, la fonction inverse de $q = B(s)$ est aussi une fonction analytique dans le voisinage de la valeur q_0 , ce qui nous permet d'exprimer la coordonnée p du lieu des points extrêmes comme fonction analytique de q . Nous l'avons appelée $\bar{P}(q)$.

Ajoutons deux remarques qui nous seront utiles dans la suite.

On aurait évidemment pu choisir la partie de la courbe sur laquelle on reportait s positivement de façon que ϑ_0 et ϑ'_0 soient compris entre 0

et $\frac{\pi}{2}$.

On vérifie d'autre part facilement que l'on doit prendre dans la formule du sinus les signes contraires suivant que l'on considère l'arc $\mathfrak{A}(q_0)$ ou l'arc $\mathfrak{A}(q'_0)$; la dérivée de $B(s)$ a en effet le signe contraire de la dérivée de $B'(s)$.

8. 8. Avant de démontrer les propositions des n^{os} 8.13, 8.14 et 8.15 qui conduiront finalement aux lemmes 3 et 4, nous avons besoin de démontrer un certain nombre de propositions auxiliaires.

S'il existe une infinité d'arcs géodésiques de longueur bornée normaux à une courbe \mathfrak{F} et passant par un point P , toutes les géodésiques normales à \mathfrak{F} passent par P et tous les arcs compris entre P et \mathfrak{F} ont la même longueur. Ceci n'est évidemment possible que si P est à l'intérieur de \mathfrak{F} .

L'hypothèse permet d'extraire une suite partielle de lignes géodésiques $\mathfrak{G}(q_1), \mathfrak{G}(q_2), \dots, \mathfrak{G}(q_n), \dots$ sur lesquelles on a porté les longueurs $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q^*$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p^*$. En outre

$$x(p_n, q_n) = x_0$$

et

$$y(p_n, q_n) = y_0.$$

Considérons les deux équations $x(p, q) = x_0$ et $y(p, q) = y_0$. Nous prétendons qu'elles sont satisfaites identiquement par la fonction $p = p^*$. En effet, l'une au moins des deux expressions $x_p(p^*, q^*)$ et $y_p(p^*, q^*)$ n'est pas nulle (1 du n^o 6. 4). Supposons que ce soit la première. Dans ce cas, le théorème sur les fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe une fonction analytique $p = \varphi(q)$, solution de $x(p, q) = x_0$ et telle que $\varphi(q^*) = p^*$. La fonction $y(\varphi(q), q)$ est aussi une fonction analytique de q . Comme dans le voisinage de q^* elle prend une infinité de fois la valeur y_0 , elle est identiquement égale à y_0 . Toutes les lignes géodésiques voisines de $\mathfrak{G}(q^*)$ passent donc par le point P . Le calcul des variations nous apprend que tous les arcs situés sur ces géodésiques entre \mathfrak{F} et P ont la même longueur, égale à p^* . Les équations $x(p, q) = x_0$ et $y(p, q) = y_0$, identiquement satisfaites dans un intervalle autour de la valeur q^* par la fonction $p = p^*$, sont identiquement satisfaites par cette fonction pour toute valeur de q .

8. 9. *S'il existe une infinité d'arcs géodésiques de longueur bornée normaux à deux courbes analytiques régulières fermées \mathfrak{F} et \mathfrak{G} , toutes les lignes géodésiques normales à \mathfrak{F} sont normales à \mathfrak{G} et réciproquement et tous les arcs de ces géodésiques compris entre \mathfrak{F} et \mathfrak{G} ont la même longueur.*

L'hypothèse nous permet de considérer une suite convergente d'arcs géodésiques $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \dots$ ayant les propriétés suivantes :

Pour tout n , \mathfrak{A}_n est normal en Q_n à \mathfrak{F} et en P_n à \mathfrak{G} .

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q^*$;

\mathfrak{A}^* est normal en Q^* à \mathfrak{F} et en P^* à \mathfrak{G} .

Soit p_n la longueur de \mathfrak{A}_n et p^* la longueur de \mathfrak{A}^* .

Au n° 9. 1., nous reprendrons plus en détail les propriétés des parallèles géodésiques définies par Gauss. Nous voulons seulement rappeler que ce sont des courbes analytiques. Considérons la parallèle géodésique \mathfrak{G}^* à distance p^* de \mathfrak{G} et soit $x = f(t)$ et $y = g(t)$ son équation au voisinage du point Q^* , auquel correspond la valeur t^* du paramètre. Désignons par p, q , comme nous l'avons fait jusqu'ici, le système de coordonnées géodésiques engendré par la courbe \mathfrak{F} .

Dans le voisinage de \mathfrak{F} les fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$ sont analytiques et la courbe \mathfrak{G}^* est donnée dans le domaine \mathfrak{D} au voisinage de Q^* par deux fonctions analytiques

$$p = \varphi(t) \quad \text{et} \quad q = \psi(t) .$$

A cause de l'hypothèse, pour une infinité de valeurs $t_1, t_2, \dots, t_n, \rightarrow t^*$ la courbe \mathfrak{G}^* est perpendiculaire aux droites $q = q_n$, c'est dire que $\frac{d\varphi(t_n)}{dt} = 0$. La fonction $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ étant analytique en même temps que $\varphi(t)$ elle est identiquement nulle, et $\varphi(t)$ est une constante; comme $\varphi(t^*) = 0$, on peut affirmer que $\varphi(t) \equiv 0$ et que la courbe \mathfrak{G}^* coïncide avec la courbe \mathfrak{F} , ce qui prouve bien, à cause de la définition de \mathfrak{G}^* , que tous les arcs de géodésiques normaux à \mathfrak{G} sont normaux à \mathfrak{F} et réciproquement et que tous les arcs ont la même longueur.

8. 10. En particulier on peut considérer le cas où \mathfrak{F} et \mathfrak{G} sont identiques; la proposition suivante n'a donc pas besoin de nouvelle démonstration.

S'il existe une infinité d'arcs géodésiques de longueur bornée normaux en leurs deux extrémités à une courbe \mathfrak{F} , toutes les géodésiques normales à \mathfrak{F} recourent \mathfrak{F} normalement et tous ces arcs ont la même longueur. On voit facilement que ceci n'est possible que si les arcs géodésiques sont situés à l'intérieur de \mathfrak{F} . Dans ce cas on peut démontrer que tous les arcs extrêmes aboutissent en un seul point, nécessairement focal. Il suffit de considérer la parallèle géodésique à une distance de \mathfrak{F} égale à la moitié de la longueur des arcs considérés.

8. 11. Deux arcs minimum aboutissant au même point extrême P_0 divisent la région du plan de Riemann où se trouve P_0 en deux parties dont une au moins est bornée. On peut affirmer que

Ou bien il existe à l'intérieur de ce domaine borné au moins un arc extrême focal, ou bien tous les arcs extrêmes de \mathfrak{F} aboutissent en P_0 .

La seconde éventualité est évidemment exclue si P_0 est situé à l'extérieur de \mathfrak{F} puisqu'il existe au moins un arc extrême de longueur infinie à l'extérieur de \mathfrak{F} (n° 8. 1.).

La démonstration de ce théorème est analogue à celle que Carathéodory a donné pour le cas limite où \mathfrak{F} se réduit à un point ([5], p. 231).

Soient Q_0 et Q'_0 les deux points de \mathfrak{F} d'où partent les arcs minimum aboutissant en P_0 . Soit \mathfrak{F}_0 l'arc de \mathfrak{F} qui limite avec ces deux arcs le domaine borné considéré. Si une infinité d'arcs extrêmes issus de \mathfrak{F}_0 aboutissent en P_0 , le n° 8. 8. nous apprend que tous les arcs extrêmes issus de \mathfrak{F} aboutissent en P_0 . Sinon, nous pouvons prendre sur \mathfrak{F}_0 un point Q_1 , tel que l'arc extrême issu de ce point n'aboutisse pas en P_0 . Si cet arc extrême est focal, le théorème est démontré. Si ce n'est pas le cas, au point extrême P_1 , extrémité de l'arc extrême partant de Q_1 , et nécessairement situé à l'intérieur du domaine borné considéré, aboutit au moins un autre arc extrême, issu d'un point Q'_1 . Avec les deux arcs extrêmes issus de Q_1 et de Q'_1 nous pouvons répéter la même construction que nous venons de faire pour les arcs extrêmes issus de Q_0 et de Q'_0 , et ainsi de suite. Si un des arcs extrêmes ainsi construits est focal, le théorème est vérifié; sinon on peut toujours choisir la suite $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ de telle façon que $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q^*$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} Q'_n = Q^*$. Il suffit de prendre Q_2 au milieu de l'intervalle $Q_1Q'_1, Q_3$ au milieu de $Q_2Q'_2$, etc. L'arc extrême issu de Q^* est focal, comme le montre le n° 7. 5.

8. 12. *Le nombre des arcs minimum aboutissant à un point extrême est fini, ou bien tous les arcs extrêmes aboutissent en ce point.*

La seconde éventualité ne peut se présenter que si le point considéré est situé à l'intérieur de la courbe, à cause de la remarque du n° 8. 1.

Ce théorème n'est en réalité qu'un cas particulier de 8. 8 et se trouve par conséquent déjà démontré.

8. 13. *Dans un domaine borné du plan de Riemann, le nombre des points extrêmes focaux est fini.*

Le n° 8. 5 nous apprend que ces points doivent correspondre à des

valeurs de q qui annulent $\frac{dN(q)}{dq}$ ou $\frac{dP(q)}{dq}$; soient $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ une suite de ces valeurs. Comme ces points extrêmes focaux appartiennent au domaine \mathfrak{D}_2 , le n° 7. 4 nous apprend que ou bien l'on a affaire à un seul point extrême focal, ou bien la suite des points focaux est divergente. On tiendra compte dans la démonstration de la dernière remarque du n° 8. 3.

8. 14. *Dans un domaine borné du plan de Riemann le nombre des points extrêmes où aboutissent au moins trois arcs minimum est fini.*

Pour démontrer indirectement ce théorème, supposons qu'il existe dans un domaine borné du plan de Riemann une infinité de points extrêmes où aboutissent au moins trois arcs minimum. Soit $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ une suite de ces points. Nous désignons par $\mathfrak{A}'_n, \mathfrak{A}''_n, \mathfrak{A}'''_n$ trois des arcs minimum aboutissant en $P_n, n = 1, 2, 3, \dots$

Appelons la figure formée par les trois arcs $\mathfrak{A}'_n, \mathfrak{A}''_n, \mathfrak{A}'''_n$ le triple rattaché à P_n et dont P_n est le sommet. Un triple divise la région du plan de Riemann où se trouve son sommet en trois domaines, tous les trois bornés si P_n est à l'intérieur de \mathfrak{F} et dont deux seulement sont bornés si P_n est à l'extérieur de \mathfrak{F} . Deux triples de sommets différents n'ont aucun point commun, comme le montre le n° 5. 8; un triple est donc entièrement compris dans un seul des trois domaines formé par un autre triple. Soit une suite infinie de triples de sommets $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$; on peut toujours trouver une suite partielle de triples de sommets $P_{\nu_1}, P_{\nu_2}, \dots, P_{\nu_n}, \dots$ jouissant de la propriété suivante: Etant donné un triple de sommet P_{ν_n} les triples postérieurs sont tous contenus dans un seul des trois domaines formés par le triple de sommet P_{ν_n} . Le triple de sommet P_{ν_n} possède donc au moins un domaine borné qui ne contient aucun des triples postérieurs. Soit F_{ν_n} un point extrême focal contenu, d'après le n° 8. 11. à l'intérieur de ce domaine. On peut déterminer de cette façon par une suite de choix convenables une suite de points extrêmes focaux, tous différents les uns des autres. D'après le n° 8. 13., une telle suite doit être divergente, ce qui est évidemment impossible si la suite des sommets se trouve dans un domaine borné. Il est clair en effet que les triples considérés satisfont à la condition de la dernière remarque du n° 4. 3.

8. 15. Nous appelons point normal stationnaire un point extrême normal pour lequel la dérivée de la fonction $\bar{P}(q)$ est nulle {idem pour $\bar{N}(q)$ }.

Dans un domaine borné, il n'y a qu'un nombre fini de points normaux stationnaires.

Il suffit pour le démontrer de constater qu'en un point normal stationnaire P , les deux arcs minimum qui aboutissent en P forment un angle égal à deux droits et constituent donc un arc géodésique normal en ses deux extrémités à la courbe \mathfrak{F} ; en effet puisque la dérivée de $\overline{P}(q)$ est nulle, le lieu des points extrêmes forme avec chacun des arcs minimum un angle droit, car d'après le n^o 8. 7. $\cos \vartheta_0 = 0$. Nous avons vu au n^o 8. 10. qu'il existe tout au plus un nombre fini d'arcs géodésiques normaux de longueur bornée en leurs deux extrémités à la courbe \mathfrak{F} ou que tous les arcs extrêmes aboutissent en un même point. Dans le premier cas, il existe un nombre fini de points dans un domaine borné du plan de Riemann où la dérivée de $\overline{P}(q)$ est nulle; dans le second cas, le point extrême considéré n'est pas normal.

8. 16. Nous appelons *point particulier* un point extrême anormal ou un point normal stationnaire.

Lemme 3. *Il n'existe dans un domaine borné du plan de Riemann qu'un nombre fini de points particuliers.*

C'est une conséquence directe de la définition des points particuliers et des propositions démontrées aux n^{os} 8. 13, 8. 14 et 8. 15.

8. 17. Lemme 4. *L'équation $\overline{P}(q) = p_0$ n'a qu'un nombre fini de solutions.*

{Idem pour $\overline{N}(q)$, pour laquelle cependant il y a une exception, le cas où $\overline{N}(q)$ est identiquement égal à p_0 .}

Si l'équation considérée possédait une infinité de solutions, il existerait aussi une infinité de minima relatifs de la fonction positive $\overline{P}(q)$ plus petits ou égaux à p_0 . Ces minima correspondent nécessairement à des arcs extrêmes aboutissant en des points particuliers. Nous venons de voir (n^o 8. 16.) qu'il ne peut pas y en avoir une infinité dans un domaine borné.

9. Vraies parallèles

9. 1. Conformément à la définition de Gauss nous appelons *parallèle géodésique* à distance p_0 de la courbe \mathfrak{F} le lieu des points obtenus en reportant à partir de \mathfrak{F} la longueur constante sur toutes les lignes géodésiques normales à \mathfrak{F} . C'est aussi une trajectoire orthogonale de la famille des lignes géodésiques normales à \mathfrak{F} . Dans le domaine \mathfrak{D} la parallèle géodésique correspond au segment situé sur la droite

$p = p_0$, $0 \leq q \leq L(\mathfrak{F})$. Dans le plan de Riemann, c'est une courbe analytique dont les équations paramétriques sont

$$x = x(p_0, q) \quad \text{et} \quad y = y(p_0, q).$$

Si $f(p_0, q_0) \neq 0$, $x_q(p_0, q_0)$ et $y_q(p_0, q_0)$ ne sont pas tous les deux nuls (n° 6. 4) et la courbe est régulière en ce point (n° 5. 2). Si $f(p_0, q_0) = 0$, c'est-à-dire si le point considéré est un foyer, $x_q(p_0, q_0)$ et $y_q(p_0, q_0)$ sont nuls et la courbe présente en général un point singulier. Puisque d'après le n° 7. 2 $P(q)$ est une fonction analytique, une parallèle géodésique ne peut posséder qu'un nombre fini de points singuliers à moins que $P(q) \equiv p_0$, auquel cas la parallèle géodésique dégénère en un point.

9. 2. Nous définissons *une vraie parallèle géodésique* à la courbe \mathfrak{F} comme le lieu des points situés à une distance constante de la courbe \mathfrak{F} . Les n°s 5. 4 et 5. 5 nous apprennent que tout point de la vraie parallèle géodésique à distance p_0 appartient aussi à la parallèle géodésique à distance p_0 .

La vraie parallèle géodésique a pour image dans le domaine \mathfrak{D} les points du segment $p = p_0$, $0 \leq q \leq L(\mathfrak{F})$ qui appartiennent à \mathfrak{D}_2 ; ces points sont situés sur un nombre fini de segments, comme il ressort du n° 8. 17. L'image d'un segment du domaine \mathfrak{D} étant un arc analytique dans le plan de Riemann, nous pouvons affirmer que

La vraie parallèle à distance p_0 se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques appartenant à la parallèle géodésique à distance p_0 .

Comme la distance entre la courbe \mathfrak{F} et un point P est un nombre bien défini, on peut affirmer que

Chaque point du plan de Riemann est situé sur une et sur une seule vraie parallèle à une courbe donnée.

Etant donnée une vraie parallèle à distance p_0 de \mathfrak{F} , où nous supposons p_0 positif, il est clair que la vraie parallèle en question est la frontière entre l'ensemble des points situés à une distance $p > p_0$ de \mathfrak{F} et ceux situés à une distance $p < p_0$ de \mathfrak{F} . Ce dernier ensemble est évidemment connexe puisque chacun de ses points peut être joint à la courbe \mathfrak{F} par un arc minimum dont tous les points sont à une distance de \mathfrak{F} nécessairement inférieure à p_0 . Cet ensemble est d'autre part borné, conséquence du n° 4. 3; on peut en conclure que

La vraie parallèle à distance p_0 de \mathfrak{F} est formée d'une ou de plusieurs courbes fermées, que nous appelons les composantes de la vraie parallèle.

Une de ces courbes fermées est la frontière d'un ensemble connexe de points qui comprend tous les points à distance arbitrairement grande de

la courbe \mathfrak{F} . Nous l'appelons *la composante extérieure* de la vraie parallèle considérée. C'est une courbe simplement fermée qui contient toutes les autres composantes de la vraie parallèle.

On verrait de même qu'une vraie parallèle intérieure à la courbe \mathfrak{F} est formée d'une ou de plusieurs courbes fermées. Aucune de celles-ci toutefois ne joue un rôle particulier, car à l'intérieur de la courbe \mathfrak{F} il n'existe pas de points à distance (négative) arbitrairement grande.

9. 3. *La longueur* d'un arc de parallèle géodésique peut se calculer facilement à l'aide de la fonction $f(p, q)$. En effet comme p est constant l'élément d'arc du n^o 6. 2 se réduit à

$$ds^2 = f^2(p, q) dq^2 .$$

La fonction $f(p, q)$ étant positive sur toute vraie parallèle géodésique (n^{os} 7. 7 et 8. 3), la longueur de celle-ci, que nous désignons par $L(p)$, peut s'exprimer à l'aide de la somme d'intégrales suivante :

$$L(p) = \sum_{i=1}^{n(p)} \int_{q_i(p)}^{q'_i(p)} f(p, q) dq ,$$

où $n(p)$ désigne le nombre d'arcs de la parallèle géodésique formant la vraie parallèle géodésique et $q_i(p)$, $q'_i(p)$ les valeurs de q correspondant aux extrémités de ces arcs.

9. 4. Théorème 1. *$L(p)$ est une fonction continue.*

Donnons la démonstration lorsque p est positif, la démonstration lorsque p est négatif étant analogue. Nous considérons la fonction auxiliaire suivante :

$$\begin{aligned} \varphi(p, q) &= f(p, q) & \text{si } 0 \leq p \leq \bar{P}(q) , \\ \varphi(p, q) &= 0 & \text{si } p > \bar{P}(q) . \end{aligned}$$

La fonction $L(p)$ peut se mettre alors sous la forme

$$L(p) = \int_0^L \varphi(p, q) dq ,$$

ou L représente la longueur de la courbe \mathfrak{F} .

Prenons une valeur de p quelconque, $p_0 > 0$ et un nombre positif arbitrairement petit ε . Au n^o 6. 3 nous avons vu que $f(p, q)$ est une fonction continue; il existe donc un δ tel que pour tout q , $0 \leq q \leq L$

$$| f(p, q) - f(p_0, q) | < \frac{\varepsilon}{2L} ,$$

dès que $|p - p_0| < \delta$. Soit M le maximum de $f(p, q)$ dans la bande comprise entre $p_0 - \delta$ et $p_0 + \delta$ et M^* le plus grand des deux nombres M et $\frac{\varepsilon}{2L}$. Soient $q_i(p_0)$ $i = 1, 2, \dots, n$ les n solutions de l'équation $\bar{P}(q) = p_0$; il y en a un nombre fini, éventuellement nul, d'après le n° 8.17 (nous ne faisons pas de distinction ici entre les $q_i(p_0)$ et les $q'_i(p_0)$). De part et d'autre de chacun des $q_i(p_0)$ nous portons la quantité $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4nM^*}$. Appelons \mathfrak{C} l'ensemble des intervalles ouverts $q_i(p_0) - \varepsilon' < q < q_i(p_0) + \varepsilon'$ et \mathfrak{C} l'ensemble des intervalles complémentaires de \mathfrak{C} sur le segment $0 \leq q \leq L$. Puisque \mathfrak{C} est un ensemble fermé, le minimum δ' de la fonction $|\bar{P}(q) - p_0|$ sur \mathfrak{C} est certainement pris en un point de \mathfrak{C} . Il est plus grand que 0, puisque $\bar{P}(q) = p_0$ seulement aux points $q_i(p_0)$, qui n'appartiennent pas à \mathfrak{C} .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que $|L(p) - L(p_0)| < \varepsilon$ dès que $|p - p_0| < \text{Min}(\delta, \delta')$. Choisissons p satisfaisant à cette condition, et estimons la quantité

$$L(p) - L(p_0) = \int_0^L [\varphi(p, q) - \varphi(p_0, q)] dq .$$

M^* et δ sont définis de façon à ce que $|\varphi(p, q) - \varphi(p_0, q)| < M^*$ dès que $|p - p_0| < \delta$. Dans chacun des intervalles entourant un $q_i(p_0)$, l'intégrale se laisse évaluer à

$$\left| \int_{q_i(p_0) - \varepsilon'}^{q_i(p_0) + \varepsilon'} [\varphi(p, q) - \varphi(p_0, q)] dq \right| < 2\varepsilon' M^* = \frac{\varepsilon}{2n} .$$

Sur l'ensemble \mathfrak{C} composé des n intervalles entourant les $q_i(p_0)$, qui du reste peuvent se recouvrir en partie, l'intégrale est plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, en tout point de \mathfrak{C} , $\varphi(p, q)$ et $\varphi(p_0, q)$ sont ou tous deux nuls ou tous deux définis par $f(p, q)$ et $f(p_0, q)$ car si tel n'était pas le cas, il y aurait entre p et p_0 une valeur p' telle que $\bar{P}(q) = p'$ contrairement à l'hypothèse que δ' est le minimum de $|\bar{P}(q) - p_0|$, c'est-à-dire que $|\bar{P}(q) - p_0| > \delta'$. Dans les deux cas $|\varphi(p, q) - \varphi(p_0, q)| < \frac{\varepsilon}{2L}$ et l'intégrale sur \mathfrak{C} est plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$. L'intégrale étendue aux deux ensembles \mathfrak{C} et \mathfrak{C} , égale à $|L(p) - L(p_0)|$ est plus petite que ε , ce qui démontre le théorème.

9.5. Après avoir démontré que $L(p)$ est une fonction continue pour toute valeur de p , nous allons démontrer qu'elle est presque partout analytique.

Nous avons vu au n° 8. 16 qu'il n'existe dans un domaine borné du plan de Riemann qu'un nombre fini de points particuliers. Nous disons que p_0 est une *valeur particulière* de p si la vraie parallèle à distance p_0 passe par un point particulier. Il est bien clair que dans tout intervalle borné $p_1 \leq p \leq p_2$, il n'existe qu'un nombre fini de valeurs particulières de p , puisque par tout point du plan de Riemann ne passe qu'une seule vraie parallèle à une courbe \mathfrak{F} donnée. Or il est facile de démontrer le

Théorème 2. *Pour toute valeur non particulière de p , la fonction $L(p)$ est analytique.*

Le théorème de Weierstrass sur les fonctions implicites nous permet tout d'abord d'affirmer que les limites $q_i(p)$ et $q'_i(p)$ des intégrales qui interviennent dans le calcul de $L(p)$ sont des fonctions analytiques de p ; ce sont en effet les fonctions inverses de la fonction $p = \overline{P}(q)$ {ou $p = \overline{N}(q)$ },

analytique et telle que $\frac{d\overline{P}(q)}{dq} \neq 0$ {ou $\frac{d\overline{N}(q)}{dq} \neq 0$ } en tout point extrême non particulier. Quant à $n(p)$ c'est, d'après le même théorème, une constante pour une petite variation autour d'une valeur non particulière de p . Comme nous avons vu au n° 6. 3 que $f(p, q)$ est une fonction analytique, il s'ensuit que la fonction $L(p)$ est analytique.

9. 6. Pour toute valeur non particulière, la règle de dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre nous permet de calculer la dérivée de $L(p)$. (Nous ne pourrions plus appliquer cette formule pour des valeurs particulières de p , pour lesquelles nous avons renoncé à définir la dérivée de $L(p)$. En fait il serait aussi possible de définir une dérivée par la gauche et une dérivée par la droite, à condition d'admettre $-\infty$ et $+\infty$ comme valeurs admissibles pour ces dérivées.)

Nous obtenons la formule suivante

$$\frac{dL(p)}{dp} = \sum_{i=1}^{n(p)} \left[\int_{q_i(p)}^{q'_i(p)} \frac{\partial f(p, q)}{\partial p} dq + f(p, q'_i(p)) \frac{dq'_i(p)}{dp} - f(p, q_i(p)) \frac{dq_i(p)}{dp} \right].$$

Cherchons la signification géométrique de cette formule. On sait que la courbure géodésique d'une parallèle géodésique vaut $\frac{f_p(p, q)}{f(p, q)}$ ([5], p. 174).

Nous désignerons cette quantité par $k_p(q)$ et l'élément d'arc de la parallèle géodésique par $d\sigma_p$; on sait que ce dernier est égal à $f(p, q) dq$. Désignons par $\vartheta_i(p)$ la mesure de l'angle compris entre l'arc extrême correspondant à $q_i(p)$ et le lieu des points extrêmes. Désignons de façon analogue par

$\vartheta'_i(p)$ la mesure de l'angle compris entre l'arc extrême correspondant à $q'_i(p)$ et le lieu des points extrême. Nous pouvons évidemment choisir $\vartheta_i(p)$ {ou $\vartheta'_i(p)$ } compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Les formules établies au n° 8. 7 nous permettent de démontrer facilement les relations suivantes, valables pour $p > 0$,

$$f(p, q_i(p)) \frac{dq_i(p)}{dp} = \operatorname{tg} \vartheta_i(p) \quad \text{et} \quad f(p, q'_i(p)) \frac{dq'_i(p)}{dp} = - \operatorname{tg} \vartheta'_i(p).$$

On vérifiera en particulier le juste choix des signes, en remarquant que $q_i(p)$ est une fonction croissante et que $q'_i(p)$ est une fonction décroissante de p . Pour p négatif on obtient les mêmes formules, mais avec le signe contraire.

On peut donc exprimer la dérivée de $L(p)$ à l'aide des formules suivantes :

$$p > 0, \quad \frac{dL(p)}{dp} = \sum_{i=1}^{n(p)} \left[\int_{q_i(p)}^{q'_i(p)} k_p(q) d\sigma_p - \operatorname{tg} \vartheta'_i(p) - \operatorname{tg} \vartheta_i(p) \right],$$

$$p < 0, \quad \frac{dL(p)}{dp} = \sum_{i=1}^{n(p)} \left[\int_{q'_i(p)}^{q_i(p)} k_p(q) d\sigma_p + \operatorname{tg} \vartheta'_i(p) + \operatorname{tg} \vartheta_i(p) \right].$$

Appliquons la formule de Bonnet généralisée, au domaine connexe compris entre la courbe \mathfrak{F} et la vraie parallèle à distance p . Soit $k(q)$ la courbure géodésique de la courbe \mathfrak{F} , $m(p)$ le nombre de composantes de la vraie parallèle à distance p et $C(p)$ l'intégrale de la courbure totale sur le domaine compris entre la courbe \mathfrak{F} et la vraie parallèle à distance p . On a alors pour une valeur positive et non particulière de p ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n(p)} \left(\int_{q'_i(p)}^{q_i(p)} k_p(q) d\sigma_p \right) - \sum_{i=1}^{n(p)} [\vartheta_i(p) + \vartheta'_i(p)] - \int_0^{L(\mathfrak{F})} k(q) dq + C(p) = \\ = (1 - m(p)) \cdot 2\pi . \end{aligned}$$

Le second terme, le seul dont la présence demande quelques explications, provient des angles que forment les différents arcs de la vraie parallèle aux points où ils se raccordent. En un tel point aboutissent deux arcs extrêmes $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q'_0)$; l'angle formé par les deux arcs de la vraie parallèle se compose de deux droits plus les deux angles ϑ_0 et ϑ'_0 compris entre le lieu des points extrêmes et les arcs $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q'_0)$. L'excédent de π est bien

$\vartheta_0 + \vartheta'_0$ dont la somme étendue à tous les points extrêmes de la vraie parallèle considérée est égale au deuxième terme de notre formule.

Pour p négatif on trouve une formule analogue.

Nous pouvons maintenant donner pour la dérivée de $L(p)$ deux formules que nous pouvons considérer comme le but principal de cette première partie :

$$p > 0, \quad \frac{dL(p)}{dp} = \\ = \int_0^{L(\bar{y})} k(q) dq - 2\pi(m(p) - 1) - C(p) - \sum_{i=1}^{n(p)} [\text{tg } \vartheta'_i(p) - \vartheta'_i(p) + \text{tg } \vartheta_i(p) - \vartheta_i(p)],$$

$$p < 0, \quad \frac{dL(p)}{dp} = \\ = \int_0^{L(\bar{y})} k(q) dq + 2\pi(m(p) - 1) + C(p) + \sum_{i=1}^{n(p)} [\text{tg } \vartheta'_i(p) - \vartheta'_i(p) + \text{tg } \vartheta_i(p) - \vartheta_i(p)].$$

9. 7. Des deux formules précédentes, on peut tirer des inégalités qui nous serviront dans la suite et qui constituent notre

Théorème 3

$$\text{pour } p > 0 \quad , \quad \frac{dL(p)}{dp} \leq \int_0^{L(\bar{y})} k(q) dq - C(p) \quad ,$$

$$\text{pour } \bar{p} < p < 0 \quad , \quad \frac{dL(p)}{dp} \geq \int_0^{L(\bar{y})} k(q) dq + C(p) \quad .$$

Il suffit en effet de remarquer que dans les formules du n° 9. 6 $m(p)$ est au moins égal à 1 et que chacune des différences $\text{tg } \vartheta_i(p) - \vartheta_i(p)$ est positive, puisque $\vartheta_i(p)$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

9. 8. Nous aurons enfin besoin de la formule suivante valable sans exception, bien que $\frac{dL(p)}{dp}$ ne soit peut-être pas défini pour toute valeur de p :

$$\text{Théorème 4} \quad L(p_2) - L(p_1) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dL(p)}{dp} dp \quad .$$

Cette formule est évidente si dans l'intervalle $p_1 \leq p \leq p_2$ il n'y a aucune valeur particulière; $\frac{dL(p)}{dp}$ est en effet une fonction analytique dans tout l'intervalle.

Supposons maintenant qu'une des limites, par exemple p_2 , soit une valeur particulière de l'intervalle $p_1 \leq p \leq p_2$ et que ce soit la seule. On définit alors $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dL(p)}{dp} dp$ comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{p_1}^{p_2 - \varepsilon} \frac{dL(p)}{dp} dp$. Pour l'intervalle $p_1 \leq p \leq p_2 - \varepsilon$, on a évidemment

$$\int_{p_1}^{p_2 - \varepsilon} \frac{dL(p)}{dp} dp = L(p_2 - \varepsilon) - L(p_1) .$$

Lorsque ε tend vers zéro, le membre de droite tend vers $L(p_2) - L(p_1)$, puisque la fonction $L(p)$ est continue, d'après le n^o 9. 4; dans ce cas, la formule est donc aussi valable.

Dans le cas général, on peut affirmer que dans tout intervalle $p_1 \leq p \leq p_2$, il n'y a éventuellement qu'un nombre fini de valeurs particulières. On pourra donc décomposer l'intervalle en un nombre fini d'intervalles pour chacun desquels la formule sera valable. En faisant la somme de toutes les intégrales et grâce à la continuité de la fonction $L(p)$, on démontre la formule proposée, pour des valeurs p_1 et p_2 quelconques.

9. 9. Soient p_1, p_2 deux nombres tels que $\bar{p} \leq p_1 < p_2$, où \bar{p} représente, comme au n^o 8. 1, la longueur, comptée négativement, du plus grand arc minimum contenu à l'intérieur de \mathfrak{F} . Désignons par $\mathfrak{D}(p_1, p_2)$ la partie du domaine \mathfrak{D}_2 comprise entre les droites $p = p_1$ et $p = p_2$; c'est l'image de l'ensemble des points dont la distance à la courbe \mathfrak{F} est comprise entre p_1 et p_2 . L'élément d'aire étant égal en coordonnées géodésiques à $f(p, q) dp dq$, l'aire du domaine situé entre les deux vraies parallèles à distance p_1 et p_2 peut s'exprimer à l'aide de l'intégrale

$$A(p_1, p_2) = \iint_{\mathfrak{D}(p_1, p_2)} f(p, q) dp dq .$$

La frontière de ce domaine étant formée d'un nombre fini d'arcs rectifiables ne crée aucune difficulté pour le calcul de cette intégrale.

Commençons par intégrer par rapport à q ; l'intégrale est alors à étendre sur un certain nombre d'intervalles dont nous avons désigné les limites au n^o 9. 3 par $q_i(p)$ et $q'_i(p)$. Nous obtenons

$$A(p_1, p_2) = \int_{p_1}^{p_2} dp \left(\sum_{i=1}^{n(p)} \int_{q_i(p)}^{q'_i(p)} f(p, q) dq \right) .$$

La quantité entre parenthèses est précisément égale à $L(p)$, de sorte que notre formule devient

$$A(p_1, p_2) = \int_{p_1}^{p_2} L(p) dp .$$

Cette formule nous permet de calculer en particulier l'aire comprise à l'intérieur d'une courbe analytique régulière, simplement fermée \mathfrak{F} . La formule obtenue constitue le

Théorème 5
$$A(\mathfrak{F}) = \int_p^0 L(p) dp .$$

On peut d'autre part calculer l'aire du plan de Riemann tout entier par un passage à la limite à l'aide du

Théorème 5'
$$A_T = \int_p^\infty L(p) dp .$$

9. 10. Pour les démonstrations de la seconde partie, il suffira de retenir de cette première partie les théorèmes 1 à 5, énoncés à partir du n^o 9. 4.

Nous voulons signaler enfin un cas particulier intéressant; c'est celui des vrais cercles, dont nous donnons la définition suivante: *Un vrai cercle* est le lieu des points équidistants d'un point fixe. La courbe \mathfrak{F} se réduisant à un point, les démonstrations que nous avons données pour une courbe \mathfrak{F} analytique régulière ne sont naturellement pas valables sans autre explication. On pourrait les refaire de manière tout à fait semblable, en tenant compte des résultats déjà obtenus par Myers¹⁵⁾. Mais il est encore plus simple de prendre, autour du point fixe, un cercle géodésique suffisamment petit pour qu'il soit régulier, et de considérer les vrais cercles autour du point comme les vrais parallèles à ce petit cercle géodésique.

S E C O N D E P A R T I E

Le problème isopérimétrique

10. Aire totale

Dans ce chapitre, nous nous proposons de démontrer le

Théorème A. *Tout plan de Riemann à courbure non négative possède une aire infinie.*

Dans ce but nous allons donner quelques définitions et établir deux lemmes.

¹⁵⁾ Voir note 10).

10. 1. Etant donné dans un plan de Riemann (à courbure d'ailleurs quelconque) un domaine borné, nous appelons *ceinture autour de ce domaine*) une ligne rectifiable simplement fermée comprenant tous les points du domaine donné à l'intérieur.

Nous appelons d'autre part *suite divergente de courbes* une suite de courbes $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n, \dots$ telles que toute suite de points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, pris respectivement sur $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n, \dots$ soit divergente dans le plan de Riemann. Nous avons donné la définition exacte d'une suite divergente de points au n^o 4. 1.

Soit \mathfrak{S} une suite divergente de ceintures $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ autour d'un domaine \mathfrak{B} ; nous désignons leurs longueurs par $L(\mathfrak{F}_1), L(\mathfrak{F}_2), \dots, L(\mathfrak{F}_n), \dots$.

$$\text{Soit } L^*(\mathfrak{S}) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} L(\mathfrak{F}_n).$$

Puisque $L(\mathfrak{F}_n) > 0$, cette limite existe évidemment; elle est positive ou nulle.

Dans un plan de Riemann, nous considérons toutes les suites divergentes de ceintures autour d'un domaine \mathfrak{B} et nous posons

$$L^* = \text{borne inf. } L^*(\mathfrak{S}).$$

Cette borne existe évidemment, puisque $L^*(\mathfrak{S}) \geq 0$. On peut même ajouter que L^* est en quelque sorte indépendant du domaine \mathfrak{B} . Il est en effet facile de démontrer qu'étant donné un autre domaine borné \mathfrak{B}' , il existe un n à partir duquel toute ceinture d'une suite divergente autour de \mathfrak{B} est aussi ceinture autour de \mathfrak{B}' . Il suffit de considérer un domaine borné simplement connexe \mathfrak{B}^* contenant \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' et de remarquer que les courbes d'une suite divergente n'ont à partir d'un certain rang aucun point commun avec un domaine borné donné, mais quelconque.

Toute suite divergente de ceintures autour du domaine \mathfrak{B} forme donc aussi, à part un nombre fini de courbes, une suite divergente autour de \mathfrak{B}' , ce qui montre bien que L^* ne dépend pas du domaine \mathfrak{B} .

10. 2. Dans un plan de Riemann à courbure non négative, les résultats de Cohn-Vossen (voir en particulier [4], p. 132) nous permettent d'affirmer que

$$L^* > 0.$$

En effet, étant donné un domaine \mathfrak{B} , simplement connexe, du plan de Riemann, Cohn-Vossen considère la borne inférieure de la longueur de toutes les ceintures autour de \mathfrak{B} ; soit A cette borne. Cohn-Vossen appelle suite minimale une suite de ceintures dont la longueur tend vers A ; dans

le cas d'un plan de Riemann à courbure non négative, il démontre l'existence d'une suite minimale bornée, c'est-à-dire dont les courbes sont situées dans un domaine borné; on vérifie aisément que la limite A de leur longueur ne saurait être nulle. Comme on a évidemment $L^* > A$, on peut énoncer le

Lemme I. *Pour tout plan de Riemann à courbure non négative $L^* > 0$.*

10.3. Etant donnée une courbe analytique régulière simplement fermée \mathfrak{F} , nous avons désigné dans la première partie de ce travail la longueur de la vraie parallèle à distance p par $L(p)$. Nous avons vu au n^o 9. 9 comment on peut calculer l'aire totale du plan de Riemann à l'aide de l'intégrale

$$A_T = \int_p^\infty L(p) dp .$$

Supposons que nous ayons à faire à un plan dont l'aire totale soit finie. On voit qu'une condition nécessaire pour cela est que $\lim_{n \rightarrow \infty} L(p) = 0$,

c'est-à-dire qu'il existe une suite de valeurs $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ tendant vers l'infini, telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} L(p_n) = 0$. Or il est clair que les composantes

extérieures $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ de ces vraies parallèles forment une suite divergente de ceintures autour du domaine compris à l'intérieur de \mathfrak{F} (n^o 9. 2). Comme on a évidemment $L(\mathfrak{F}_n) \leq L(p_n)$, on peut affirmer que $\lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathfrak{F}_n) = 0$. D'où nous tirons la conclusion suivante:

Lemme II. *Si l'aire d'un plan de Riemann est finie, on a nécessairement $L^* = 0$.*

10.4. L^* ne pouvant être à la fois positif et nul, on constate que le théorème A n'est qu'une conséquence logique de la conjonction des lemmes I et II; il est donc démontré.

10.5. Si l'on considère un plan de Riemann à courbure jamais positive, on sait que le système de coordonnées géodésiques polaires autour d'un point quelconque est valable sur tout le plan. A l'aide de ces coordonnées, on démontre facilement que l'aire totale d'un plan de Riemann à courbure non positive est infinie.

Ce résultat, joint au théorème A, nous permet de conclure par le théorème suivant:

Tout plan de Riemann dont l'aire totale est finie présente des points à courbure positive et des points à courbure négative.

11. Inégalité isopérimétrique

Etant donnée dans un plan de Riemann une courbe analytique, régulière, simplement fermée \mathfrak{F} , nous désignons par L la longueur de \mathfrak{F} , par A l'aire du domaine compris à l'intérieur de \mathfrak{F} et par κ l'intégrale de la courbure géodésique le long de \mathfrak{F} .

Nous nous proposons de démontrer maintenant l'*inégalité isopérimétrique* (I), valable dans un plan de Riemann à courbure non négative

$$L^2 \geq 2A \cdot \kappa. \quad (\text{I})$$

11. 1. Nous partons de la formule établie au n° 9. 7,

$$\frac{dL(p)}{dp} \geq \kappa + C(p). \quad (1)$$

Elle est valable dans tout intervalle $p_1 \leq p \leq p_2$, où $\bar{p} \leq p_1 < p_2 \leq 0$, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs particulières (n° 9. 6) où $\frac{dL(p)}{dp}$ n'existe pas.

En tenant compte de l'inégalité (1) dans la formule du n° 9. 8

$$L(0) - L(p) = \int_p^0 \frac{dL(p)}{dp} dp$$

nous obtenons immédiatement pour tout p , où $\bar{p} \leq p \leq 0$

$$L(p) \leq L + \kappa p - \int_p^0 C(p) dp. \quad (2)$$

Dans un plan de Riemann à courbure non négative $C(p) \geq 0$ et nous pouvons en déduire l'inégalité

$$L(p) \leq L + \kappa p.$$

Nous voulons introduire cette dernière dans la formule du n° 9. 9

$$A = \int_{\bar{p}}^0 L(p) dp$$

qui nous livre alors

$$A \leq -L\bar{p} - \kappa \frac{\bar{p}^2}{2}.$$

En désignant par \bar{r} la longueur du plus grand arc minimum contenu à l'intérieur de \mathfrak{F} , on a $\bar{p} = -\bar{r}$. Remarquons encore que \bar{r} peut être con-

sidéré comme le rayon du vrai cercle le plus grand inscrit dans la courbe \mathfrak{F} . Notre inégalité s'écrit alors

$$A \leq L\bar{r} - \kappa \frac{\bar{r}^2}{2} . \quad (3)$$

Cette formule est la généralisation d'une formule connue, démontrée dans le plan euclidien par Bonnesen¹⁶). Notre inégalité (I) en est une conséquence presque immédiate. Une simple transformation algébrique nous livre en effet

$$A \leq \frac{L^2}{2\kappa} - \frac{1}{2\kappa} (L - \kappa\bar{r})^2 .$$

Nous verrons au n^o 11. 1. 1 que κ est positif. Cette formule est donc équivalente à

$$L^2 \geq 2\kappa A + (L - \kappa\bar{r})^2 \quad (4)$$

d'où l'on déduit immédiatement l'inégalité isopérimétrique (I), ainsi démontrée.

11. 1. 1. Nous devons encore montrer que la quantité κ est comprise entre 0 et 2π . La formule de Bonnet nous montre en effet qu'elle est égale à $2\pi - C(\mathfrak{F})$, où $C(\mathfrak{F})$ représente l'intégrale de la courbure de Gauss $K(x, y)$ sur le domaine compris à l'intérieur de \mathfrak{F} . Puisque $K(x, y)$ est analytique et jamais négatif, on a évidemment d'une part $C(\mathfrak{F}) \geq 0$ et d'autre part, si $C(\mathfrak{F}) \neq 0$, $C(\mathfrak{F}) < C_T$ où C_T désigne l'intégrale de la courbure totale étendue à tout le plan de Riemann. Or Cohn-Vossen a démontré ([4], p. 79—80) que $C_T \leq 2\pi$. Nous en concluons donc que

$$0 \leq C(\mathfrak{F}) < 2\pi$$

et que

$$0 < \kappa \leq 2\pi .$$

11. 2. Pour que l'égalité ait lieu dans la formule (I), il faut, d'après (4), que

$$L - \kappa\bar{r} = 0 . \quad (5)$$

Or, on tire de (2) que

$$L - \kappa\bar{r} \geq \int_{\bar{p}}^0 C(p) dp \geq 0 . \quad (6)$$

Il faut donc que

$$\int_{\bar{p}}^0 C(p) dp = 0 . \quad (7)$$

Ceci n'est possible que si $K(x, y) \equiv 0$, c'est-à-dire si l'on se trouve dans un plan euclidien.

¹⁶) Voir note ¹¹).

11. 3. Nous avons vu au n^o 11. 1. 1 que κ est égal à $2\pi - C(\mathfrak{F})$. On peut remplacer κ par cette expression dans toutes les formules du n^o 11. 1 ainsi que dans l'inégalité (I) qui devient

$$L^2 \geq 2A(2\pi - C(\mathfrak{F})) . \quad (\text{II})$$

11. 4. Considérons maintenant le cas d'une courbe non analytique \mathfrak{F} pour laquelle nous voulons aussi démontrer la validité de la formule isopérimétrique (II).

Nous nous bornons à supposer que \mathfrak{F} est rectifiable et simplement fermée. La longueur L de la courbe \mathfrak{F} est donc un nombre bien défini, ainsi que l'aire A et l'intégrale $C(\mathfrak{F})$ de la courbure totale du domaine situé à l'intérieur de \mathfrak{F} . Une démonstration de ce fait serait basée sur l'approximation de \mathfrak{F} à l'aide de polygones géodésiques.

Comme nous l'avons fait pour une courbe analytique régulière au n^o 5. 3, nous pouvons aussi définir la distance $\varrho(P, \mathfrak{F})$ d'un point P du plan de Riemann à la courbe \mathfrak{F} comme la borne inférieure de la longueur des arcs de courbe rectifiables joignant P et un point quelconque Q de \mathfrak{F} . Nous pouvons également définir les arcs minimum et les points extrêmes par rapport à la courbe non analytique \mathfrak{F} . En particulier, nous continuerons à désigner par \bar{p} ($= -\bar{r}$) la longueur, comptée négativement, du plus grand arc minimum contenu à l'intérieur de \mathfrak{F} . Remarquons par contre que κ perd sa signification primitive, dès que l'on ne suppose plus que les fonctions qui représentent la courbe \mathfrak{F} sont au moins deux fois dérivables; dans ce cas, la formule (I) n'a plus de sens. Il n'en est heureusement pas de même pour la formule (II), qui, pour cette raison, présente un réel avantage sur la formule (I). Toutes les formules contenant κ sont cependant valables, d'une manière tout à fait générale, à la condition que l'on entende par κ la quantité $2\pi - C(\mathfrak{F})$; c'est ce que nous ferons jusqu'à la fin du chapitre 11, en particulier au n^o 11. 5.

11. 4. 1. Afin d'appliquer les résultats déjà obtenus, nous considérons une suite de courbes analytiques régulières, simplement fermées, $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ convergeant vers \mathfrak{F} et telles que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L_n &= L , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} A_n &= A , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} C(\mathfrak{F}_n) &= C(\mathfrak{F}) , \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}_n &= \bar{p} ; \end{aligned} \quad (8)$$

les symboles avec l'indice n ayant la même signification pour la courbe \mathfrak{F}_n qu'au n° 11. 1 les symboles sans indice pour la courbe \mathfrak{F} .

Si \mathfrak{F} se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques, on construirait facilement la suite de courbes dont il est question à l'aide par exemple de la représentation conforme de l'intérieur de \mathfrak{F} sur un cercle. Les quatre relations exigées sont alors facilement vérifiables pour les courbes correspondant aux cercles concentriques, tendant vers le cercle frontière.

Si \mathfrak{F} ne remplit aucune hypothèse de régularité autre que celle énoncée, il faudrait faire une double approximation, tout d'abord de \mathfrak{F} à l'aide de polygones géodésiques convenablement choisis, puis de chacun de ces polygones à l'aide de courbes analytiques régulières. Notre but n'est pas d'entrer dans les calculs qui permettraient de trouver, à l'aide du procédé diagonal, la suite cherchée et de vérifier les quatre relations exigées.

Les formules (3), (4) et (II), vraies pour chacune des courbes \mathfrak{F}_n , peuvent être directement étendues à la courbe \mathfrak{F} , grâce aux formules (8).

11. 5. Il nous reste à discuter le signe d'égalité de la formule (I) pour des courbes quelconques. Nous allons également démontrer qu'une condition nécessaire pour l'égalité et que la courbe soit située dans un plan euclidien.

Supposons qu'on aie le signe " $=$ " dans la formule (I). Comme au n° 11. 2, on en déduit, en vertu de (4), que

$$L - \kappa \bar{r} = 0, \quad (5)$$

d'où l'on tire à l'aide des formules (8)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L_n - \kappa_n \bar{r}_n) = 0. \quad (5')$$

La formule (6), valable pour chacune des courbes \mathfrak{F}_n nous permet alors d'affirmer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{p}_n}^0 C_n(p) dp = 0. \quad (7')$$

Pour déduire de là que, pour p constant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n(p) = 0, \quad (7'')$$

nous considérons deux nombres p' et p'' , où l'on a $\bar{p} < p' < p'' < 0$; d'après (8) on a dès que n est suffisamment grand $\bar{p}_n < p'$; on peut en conclure, puisque $C_n(p)$ est positif et ne peut croître lorsque p croît, que

$$\int_{\bar{p}_n}^0 C_n(p) dp \geq \int_{p'}^{p''} C_n(p) dp \geq (p'' - p') C_n(p'').$$

Cette formule combinée avec (7') nous livre immédiatement (7'').

Désignons par $\mathfrak{B}_n(p)$ le domaine compris entre la courbe et la vraie parallèle à distance p de cette courbe. Il est aisé de voir que la convergence des courbes \mathfrak{F}_n vers la courbe \mathfrak{F} entraîne l'existence d'un domaine \mathfrak{G} compris entièrement à l'intérieur de tous les $\mathfrak{B}_n(p)$ dont l'indice n est suffisamment grand. On peut prendre par exemple l'intérieur d'un cercle géodésique dont le centre est à distance $\frac{p}{2}$ de \mathfrak{F} et dont le rayon est suffisamment petit. En désignant par $C(\mathfrak{G})$ l'intégrale de la courbure totale sur le domaine \mathfrak{G} , on a évidemment

$$C(\mathfrak{G}) \leq C_n(p),$$

En tenant compte de (7''), on voit que

$$C(\mathfrak{G}) = 0,$$

ce qui n'est possible que si $K(x, y)$ est identiquement nul, c'est-à-dire, à cause de l'analyticité de $K(x, y)$, si l'on se trouve dans un plan euclidien. Dans ce cas bien connu, la solution du problème isopérimétrique nous permet de résumer nos résultats par le théorème suivant :

Théorème B. *L'égalité dans les formules isopérimétriques (I) et (II) n'a lieu que si le plan de Riemann est isométrique au plan euclidien et si la courbe considérée est un cercle dans ce plan.*

11. 6. Dans les plans de Riemann où $C_T < 2\pi$, on peut donner une inégalité isopérimétrique dont la constante ne dépend pas de la courbe considérée. On a en effet $C(\mathfrak{F}) < C_T$ et l'inégalité (II) peut évidemment être remplacée par

$$L^2 \geq 2(2\pi - C_T) A. \quad (\text{III})$$

Si $C_T = 2\pi$, cette inégalité est triviale.

Du n° 11. 5, on tire immédiatement que l'égalité ne peut avoir lieu que si $C_T = 0$, c'est-à-dire si l'on se trouve dans un plan euclidien.

12. Une limite

Le but de ce chapitre est la démonstration du

Théorème C. *Dans un plan de Riemann à courbure totale non négative, on a pour l'ensemble des courbes simplement fermées*

$$\text{borne inf.} \left(\frac{L^2}{A} \right) = 2(2\pi - C_T).$$

12.1. Une courbe simplement fermée, analytique régulière \mathfrak{F} étant donnée, nous désignons par $L^*(p)$ la longueur de la composante extérieure de la vraie parallèle à distance p . Cette composante extérieure est une courbe simplement fermée (n° 9. 2); nous désignons par $A^*(p)$ l'aire du domaine compris à l'intérieur.

Nous avons vu dans l'introduction que le théorème C sera démontré en même temps que la formule

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{L^{*2}(p)}{A^*(p)} = 2(2\pi - C_T) . \quad (1')$$

Les relations évidentes $L^*(p) \leq L(p)$ et $A^*(p) \geq A(p)$ ainsi que l'inégalité isopérimétrique (III) appliquée à la composante extérieure de la vraie parallèle considérée, nous livrent la relation suivante:

$$\frac{L^2(p)}{A(p)} \geq \frac{L^{*2}(p)}{A^*(p)} \geq 2(2\pi - C_T) .$$

Pour obtenir (1'), il suffira donc de démontrer

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{L^2(p)}{A(p)} = 2(2\pi - C_T) . \quad (1)$$

Cette formule repose sur la relation fondamentale suivante, dont nous présenterons la démonstration au n° 12. 2

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{L(p)}{p} = 2\pi - C_T . \quad (2)$$

On peut en effet déduire de cette dernière formule, à l'aide du théorème de l'Hospital la formule

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{A(p)}{p^2} = \frac{2\pi - C_T}{2} . \quad (3)$$

Il suffit de remarquer que $\lim_{p \rightarrow \infty} A(p) = \infty$ d'après le théorème A et que $\frac{dA(p)}{dp} = L(p)$ d'après le n° 9. 9. Si $C_T \neq 2\pi$ un calcul élémentaire permet de tirer (1) de (2) et (3). Si $C_T = 2\pi$ la démonstration nécessite une petite modification que nous présenterons au n° 12. 3.

12.2. Avant de donner la démonstration proprement dite de la formule (2), nous voulons tout d'abord nous assurer de l'existence de la limite de $\frac{L(p)}{p}$ lorsque p tend vers l'infini. Il suffit pour cela de montrer que $\frac{L(p)}{p}$ est une fonction positive, non croissante de p .

Au n° 9. 4, nous avons déjà mis $L(p)$ sous la forme suivante :

$$L(p) = \int_0^L \varphi(p, q) dq$$

où

$$\varphi(p, q) = f(p, q) \quad \text{si} \quad 0 \leq p \leq \bar{P}(q),$$

et

$$\varphi(p, q) = 0 \quad \text{si} \quad p > \bar{P}(q).$$

Il est facile de démontrer que $\frac{\varphi(p, q)}{p}$ est une fonction non croissante de p . En effet

pour $p_2 > p_1 > \bar{P}(q)$, $\frac{\varphi(p_2, q)}{p_2}$ et $\frac{\varphi(p_1, q)}{p_1}$ sont tous deux nuls;

pour $p_2 > \bar{P}(q) \geq p_1$, $\frac{\varphi(p_2, q)}{p_2}$ est nul et $\frac{\varphi(p_1, q)}{p_1}$ est positif ;

pour $\bar{P}(q) \geq p_2 > p_1$, $\frac{\varphi(p, q)}{p}$ est égal à $\frac{f(p, q)}{p}$. Un calcul

élémentaire nous montre que la dérivée de cette fonction est négative pour toute valeur de $p > 0$. On a en effet

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f(p, q)}{p} \right) = - \frac{\frac{\partial f(p, q)}{\partial p} - \frac{f(p, q)}{p}}{p}.$$

Or en tenant compte de $f(0, q) > 0$ (n° 6. 2) on voit que

$$\frac{f(p, q)}{p} > \frac{f(p, q) - f(0, q)}{p}.$$

Le théorème des accroissements finis nous permet d'affirmer que le membre de droite est égal à $\frac{\partial f(p^*, q)}{\partial p}$ où $p^* < p$. Nous obtenons donc la relation

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{f(p, q)}{p} \right) < \frac{\frac{\partial f(p, q)}{\partial p} - \frac{\partial f(p^*, q)}{\partial p}}{p}.$$

Mais le membre de droite ne saurait être positif, car l'hypothèse de la courbure non négative du plan de Riemann entraîne pour les valeurs de p considérées $\frac{\partial^2 f(p, q)}{\partial p^2} < 0$ à cause de la formule d) du n° 6. 2.

Pour q constant, la fonction $\frac{\varphi(p, q)}{p}$ n'est donc jamais croissante; on peut évidemment affirmer la même chose de la fonction

$$\frac{L(p)}{p} = \int_0^L \frac{\varphi(p, q)}{p} dq .$$

Comme cette fonction est positive pour toute valeur de $p > 0$, elle tend nécessairement vers une limite lorsque p tend vers l'infini.

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration de la formule (2) que nous décomposons en deux parties.

12. 2. 1. Nous démontrerons tout d'abord

$$\frac{L(p)}{p} \geq 2\pi - C_T . \quad (2')$$

Comme nous venons de voir que $\frac{L(p)}{p}$ est une fonction non croissante de p nous savons que, pour tout p' , où $0 \leq p' \leq p$

$$L(p') \geq L(p) \frac{p'}{p} .$$

En introduisant cette inégalité dans la formule du n° 9. 9, nous obtenons

$$A(p) = \int_0^p L(p') dp' \geq \frac{pL(p)}{2} .$$

En tenant compte de cette inégalité dans la formule du n° 12. 1

$$\frac{L^2(p)}{A(p)} \geq 2(2\pi - C_T)$$

nous pouvons écrire

$$L^2(p) \geq (2\pi - C_T) \cdot p \cdot L(p)$$

d'où il est facile de déduire la formule (2').

12. 2. 2. On peut d'autre part démontrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{L(p)}{p} \leq 2\pi - C_T . \quad (2'')$$

Nous avons vu en effet au n° 9. 7 que l'on a pour tout $p > 0$

$$\frac{dL(p)}{dp} \leq 2\pi - C(\mathfrak{F}) - C(p) .$$

Le membre de droite ne pouvant croître avec p — à cause de la courbure du plan de Riemann considéré — on a pour tout $p > p_0$

$$\frac{dL(p)}{dp} \leq 2\pi - C(\mathfrak{F}) - C(p_0)$$

d'où l'on tire, grâce à la formule du n° 9. 7

$$L(p) - L(p_0) \leq [2\pi - C(\mathfrak{F}) - C(p_0)] (p - p_0) .$$

Une conséquence directe de cette formule est

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{L(p)}{p} \leq 2\pi - C(\mathfrak{F}) - C(p_0)$$

d'où l'on déduit la formule (2''), car en prenant p_0 suffisamment grand, on peut choisir le membre de droite aussi près que l'on veut de $2\pi - C_T$.

12. 2. 3. La formule (2) est maintenant une simple conséquence des formules (2') et (2'') que nous venons de démontrer. Elle est donc aussi démontrée, et avec elle pour les plans de Riemann où $C_T \neq 2\pi$ la formule (1) et le théorème *C*, but de ce chapitre.

12. 3. Un cas cependant reste en suspens: celui des plans de Riemann pour lesquels $C_T = 2\pi$. La formule (1) à démontrer est alors

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{L^2(p)}{A(p)} = 0 .$$

De la formule (2'') on déduit facilement que, étant donné un nombre positif quelconque ε , on a pour $p > p_0(\varepsilon)$

$$L(p) < \varepsilon p .$$

Nous avons d'autre part montré au n° 12. 2. 1 que

$$\frac{L(p)}{A(p)} \leq \frac{2}{p} .$$

Nous tirons de ces deux inégalités la formule suivante, d'où il est facile de déduire la relation demandée, puisque ε peut être choisi arbitrairement petit.

$$\frac{L^2(p)}{A(p)} < 2\varepsilon .$$

13. Conséquences

Le but de ce dernier chapitre est la démonstration du

Théorème D. *Si $C_T < 2\pi$, l'aire limitée par une courbe simplement fermée de longueur L est bornée supérieurement pour tout L .*

Si $C_T = 2\pi$, l'aire limitée par une courbe simplement fermée de longueur $L < L^*$ est bornée supérieurement; L^* est une constante positive, éventuellement infinie, qui dépend du plan de Riemann considéré; c'est la même constante qu'au n° 10.

Nous entendons, qu'étant donné un nombre L satisfaisant à nos conditions, il existe un nombre $\bar{A}(L)$ plus grand que l'aire A du domaine compris à l'intérieur de toute courbe simplement fermée de longueur L .

13. 1. La première partie de ce théorème est une conséquence immédiate de l'inégalité isopérimétrique (III), qui nous permet même d'évaluer la borne en question. On a en effet, grâce à cette inégalité

$$A \leq \frac{L^2}{2(2\pi - C_T)} \quad , \quad \text{donc} \quad \bar{A}(L) \leq \frac{L^2}{2(2\pi - C_T)} \quad .$$

13. 2. La démonstration de la seconde partie du théorème D est un peu plus compliquée. Dans ce cas, l'inégalité III est en effet triviale et ne peut nous servir de moyen de démonstration.

Nous allons commencer par présenter quelques considérations préliminaires, avant de passer à la démonstration indirecte de cette proposition.

13. 2. 1. Dans un plan de Riemann quelconque, sur la courbure duquel nous ne faisons pas d'hypothèse, nous considérons une suite de courbes rectifiables, simplement fermées $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$. Au n° 10. 1, nous avons défini une suite divergente de courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ par la condition que toute suite de points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ appartenant respectivement à $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ soit divergente.

13. 2. 2. Nous allons démontrer que

Si toutes les courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ d'une suite ont la même longueur et si l'aire comprise à l'intérieur tend vers l'infini, la suite est divergente.

Soit L la longueur des courbes \mathfrak{F}_n .

Pour que l'aire comprise à l'intérieure de la courbe \mathfrak{F}_n tende vers l'infini avec n , il faut évidemment qu'il existe une suite divergente de points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ appartenant respectivement à $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$; c'est une conséquence de la remarque du n° 4. 3. P étant un point fixe du plan de Riemann, nous avons donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho(P, P_n) = \infty \quad .$$

Considérons maintenant une suite quelconque de points $P'_1 P'_2 \dots, P'_n$

appartenant respectivement à $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$. On a évidemment $\varrho(P_n, P'_n) \leq \frac{L}{2}$ et grâce à la formule du n^o 4. 2 c)

$$\varrho(P, P'_n) \geq \varrho(P, P_n) - \varrho(P_n, P'_n)$$

on peut affirmer que

$$\lim \varrho(P, P'_n) = \infty .$$

Une suite quelconque de points $P'_1, P'_2, \dots, P'_n, \dots$ appartenant respectivement à $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ est donc divergente, ce qui démontre la proposition.

13. 2. 3. Etant donné dans un plan de Riemann une suite divergente de courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ et un domaine borné \mathfrak{B} , nous avons vu au n^o 10. 1 que pour un n assez grand, le domaine \mathfrak{B} n'a aucun point commun avec \mathfrak{F}_n et qu'il est situé soit entièrement à l'intérieur, soit entièrement à l'extérieur.

Si \mathfrak{B} est situé à l'intérieur de toutes les courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ nous appelons la suite, comme au n^o 10. 1, *une suite divergente de ceintures autour de \mathfrak{B}* . Si \mathfrak{B} est situé à l'extérieur de toutes les courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$, nous appelons la suite *une suite divergente de boucles extérieures à \mathfrak{B}* . Etant donné un domaine \mathfrak{B} , il est évident que toute suite divergente $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ contient soit une suite partielle divergente de ceintures, soit une suite partielle divergente de boucles extérieures; ces deux possibilités ne s'excluent pas.

Nous avons déjà fait au n^o 10. 1 la remarque suivante:

Etant donné un domaine \mathfrak{B}' et une suite divergente de ceintures autour d'un domaine \mathfrak{B} , il existe un ν tel que la suite $\mathfrak{F}_\nu, \mathfrak{F}_{\nu+1}, \mathfrak{F}_{\nu+2}, \dots$ forme une suite divergente de ceintures autour de \mathfrak{B}' .

On constate de même qu'étant donné un domaine \mathfrak{B}' et une suite divergente de boucles $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ extérieures à un domaine \mathfrak{B} , il existe un ν tel que la suite $\mathfrak{F}_\nu, \mathfrak{F}_{\nu+1}, \mathfrak{F}_{\nu+2}, \dots$ forme une suite divergente de boucles extérieures à \mathfrak{B}' .

13. 3. Dans un plan de Riemann à courbure non négative, considérons maintenant une suite divergente de boucles $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ de longueur L extérieures à un domaine \mathfrak{B} . Nous allons démontrer la formule suivante:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A(\mathfrak{F}_n) \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

qui montre bien que dans ce cas l'aire comprise à l'intérieure des courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ est bornée.

On a en effet $\lim C(\mathfrak{F}_n) = 0$, car on peut toujours prendre un domaine borné \mathfrak{B}' tel que $C_T - C(\mathfrak{B}') < \varepsilon$ et pour n suffisamment grand, nous venons de voir que \mathfrak{B}' est extérieur à \mathfrak{F}_n , d'où $C(\mathfrak{F}_n) < \varepsilon$. L'inégalité isopérimétrique (II) nous permet de conclure que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A(\mathfrak{F}_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^2}{2(2\pi - C(\mathfrak{F}_n))} = \frac{L^2}{4\pi} .$$

13. 3. 1. Considérons d'autre part une suite divergente de ceintures $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ autour d'un domaine \mathfrak{B} ; comme elle finit par contenir tout domaine borné, on peut affirmer, grâce au théorème A du n° 10 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathfrak{F}_n) = \infty .$$

Mais il résulte d'autre part du n° 10. 2 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(\mathfrak{F}_n) \geq L^* > 0 .$$

13. 4. Nous sommes maintenant à même de démontrer le théorème D. En effet, étant donné un nombre L , s'il n'existe pas de borne supérieure pour l'aire du domaine compris à l'intérieur de toute courbe simplement fermée de longueur L , on peut trouver une suite de courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$ telles que $L(\mathfrak{F}_n) = L$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} A(\mathfrak{F}_n) = \infty$.

Etant donné un domaine \mathfrak{B} quelconque, il faut, à cause du n° 13. 2. 2, que la suite de courbes soit divergente; à cause du n° 13. 3, cette suite ne saurait contenir une suite partielle infinie de boucles extérieures à \mathfrak{B} ; à partir d'un certain n la suite est donc une suite divergente de ceintures autour de \mathfrak{B} . Il faut, à cause du n° 13. 3. 1, que L soit plus grand ou égal à L^* ; si L est plus petit que L^* , une suite telle que nous l'avons supposée est impossible, ce qui démontre le théorème D.

Remarquons qu'une telle suite ne peut exister que si L^* est fini. Si $C_T < 2\pi$, l'inégalité isopérimétrique (III) nous montre que ce n'est pas le cas. On a en effet, pour une suite quelconque de courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots$

$$L^2(\mathfrak{F}_n) \geq 2(2\pi - C_T)A(\mathfrak{F}_n) .$$

Pour une suite divergente de ceintures, $A(\mathfrak{F}_n)$ tend vers l'infini; il en est de même de $L(\mathfrak{F}_n)$ et l'on a évidemment $L^* = \infty$, ce qui démontre de nouveau la première partie du théorème D.

(Reçu le 2 avril 1941.)